

TÜREV

FATİH İHTİYAROĞLU - BARIŞ ŞAHBAZ

Kapak Tasarım : Apotemi Tasarım Ekibi

Dizgi : Apotemi Dizgi

Basım Yeri : Feryal Matbaa

M. Gökçek Bulvarı 1485. Cad. No: 15

İvedik Organize Sanayi/ANKARA

(0.312) 395 22 37 - 38

Bu kitabın tamamının ya da bir kısmının, kitabı yayınlayan şirketin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması, yayımlanması ve depolanması yasaktır.



apotemigrup@gmail.com

www.apotemi.com

İÇİNDEKİLER

ORTALAMA DEĞİŞİM ORANI	7
TÜREVİN TANIMI	10
TÜREV ALMA KURALLARI	12
TÜREV SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ	35
ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ	38
LİMİT PROBLEMLERİNDE PRATİK OLARAK TÜREV KULLANIMI	58
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU	75
BİRİNCİ TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU	77
MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ	121
İKİNCİ TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU	155
TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI	162
FONKSİYON GRAFİKLERİ	164
MARATON TESTLERİ	187

YENİ MÜFREDAT HAKKINDA



Sevgili öğrenciler;

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 2013 yılında almış olduğu kararla orta öğretim Matematik dersi öğretim müfredatı değişmiştir. Ortaöğretim 9, 10, 11 ve 12. Sınıf Matematik Dersi Öğretim Programlarının 2013-2014 Öğretim Yılından itibaren 9'uncu sınıflardan başlamak üzere kademeli olarak değiştirilmesi kararlaştırılmış ve bu dönüşüm süreci 2016-2017 öğretim yılı itibarıyla tamamlanmış olacaktır.

Yeni programda öğrencilere

- 9. sınıftaki matematik dersinde 216 saatte 47 kazanım
- 10. sınıftaki matematik dersinde 216 saatte 44 kazanım
- 11. sınıftaki matematik dersinde 216 saatte 38 kazanım
- 12. sınıftaki matematik dersinde 216 saatte 38 kazanım

verilmektedir.

Yeni programda **TÜREV** konusu, 12. sınıfta (ileri düzey) 70 saatte 13 kazanımla sunulmaktadır. **TÜREV konusu tüm lise müfredatındaki 864 saatlik matematik dersi öğretim programının oran olarak %8 ini, 12. sınıfta (ileri düzey) verilen 216 saatlik matematik dersi öğretim programının oran olarak %32 sini oluşturmaktadır. Ayrıca Türev konusunda elde edilen kazanımlar, İntegral gibi önemli bir konunun temeli oluşturmakta ve bu kazanımlar İntegral konusu içinde pek çok yerde kullanılmaktadır. Bu nedenle konunun matematik müfredatındaki ve LYS deki önemi ortadadır.**

Yukarıda saydığımız tüm gelişmeleri ve konunun önemini dikkate alarak, **TÜREV** konusunu elinizdeki bu kitapta size en güzel şekilde sunmaya çalıştık. **Apotemi Yayınları** olarak kitaptan en iyi verimi almanızı dileriz.

Kitapla ve yayınlarımızla ilgili görüş, öneri, istek ve yorumlarınızı aşağıdaki mail adreslerine iletmeniz bizi çok memnun edecek ve çalışmalarımızı güzelleştirme yolunda çok yararlı olacaktır.

fatihhtiyaroglu@gmail.com

apotemigrup@gmail.com



Sevgili Öğrenciler;

Matematiğin temel konularından **TÜREV** mühendislik, ekonomi, istatistik, fizik, kimya gibi pek çok bilim dalında problemlerin çözümünde kullanılır. Bu temel konunun en iyi şekilde anlaşılabilmesi, detaylı bir konu anlatımı ve bol örnek çözülmesi ile mümkün olabilir. Bunun gerçekleşebilmesi adına **APOTEMİ YAYINLARI** olarak '**tek konu tek kitap**' kitap serimizin ilk kitabını **TÜREV** konusuna ayırdık.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için kitabın anlatımında **Adımlama Tekniğini** uyguladık. İlk defa **APOTEMİ YAYINLARI** tarafından uygulanan bu konu anlatım tekniğini özgün sorularla destekleyerek, sizleri **TÜREV** konusunda karşılaşılabileceğiniz her türlü soruya hazırlamak amaçlanmıştır.

Adımlama Tekniğinde Türev ile ilgili her konu alt başlıklara ayrıldı. Her alt başlıkla ilgili gerekli bilgiler '**Adım**' başlığıyla verilip '**ADIM PEKİŞTİRME**' testleriyle bilgiler sağlanmıştır. Ve ilgili konuların bitiminde '**ADIM GÜÇLENDİRME**' testleriyle takviye yapıldı. Kitabın sonuna '**MARATON TESTLERİ**' konularak birçok kaynaktan yer almayan özgün sorularla son bir genel tekrar yapıldı.

Ciddi bir emek ve titiz bir çalışma sonucunda hazırlanan bu kitabın siz değerli öğrencilerimize faydalı olması dileğiyle...

Apotemi

FATİH İHTİYAROĞLU

BARIŞ ŞAHBAZ



- A) Ortalama Değişim Oranı
- B) Türev Tanımı
- C) Türev Alma Kuralları
- D) Türev-Sürekli­lik İliş­kisi
- E) Özel Tanımlı Fonksiyonların Türevi

ADIM



ORTALAMA DEĞİŞİM ORANI (Hızı)

Hareket eden bir cismin belli bir zaman aralığı boyunca ortalama hızı, alınan yolun geçen süreye bölümüyle hesaplanır.

Örneğin: A — 400 m — B — 800 m — C

Yukarıdaki gibi bir yolda hiç durmadan yoluna devam eden bir araç A dan B ye 1 dakikada, B den C ye 3 dakikada gitmiştir.

Aracın A ile C arasındaki ortalama hızı;

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}} = \frac{400 + 800}{1 + 3} = 300 \text{ m/dk}$$

veya

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\text{Son Konum} - \text{İlk Konum}}{\text{Son Zaman} - \text{İlk Zaman}} = \frac{1200 - 0}{4 - 0} = 300 \text{ m/dk}$$

Fizikte kullanılan ortalama hız kavramını, bir fonksiyonun bir aralıktaki ortalama değişim oranı (hızı) biçiminde ifade edebiliriz.

Tanım: Bir $y = f(x)$ fonksiyonunda $[x_0, x_1]$ aralığında x e göre ortalama değişim oranı (hızı),

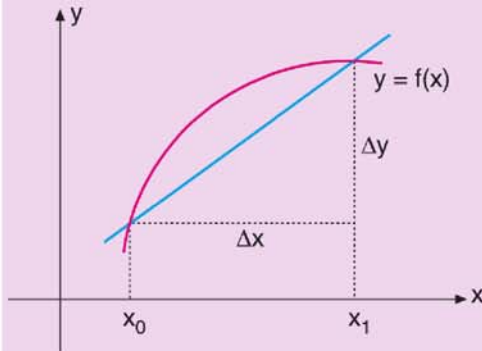
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$x_1 - x_0 = h$ olarak alınırsa

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Fonksiyondaki ortalama değişim oranını grafik üzerinde gösterelim.



ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = x + e^{x+1}$$

fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

Çözüm

f in belirtilen aralıktaki değişim oranı

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{(1 + e^2) - (-1 + e^0)}{2} \\ &= \frac{e^2 + 1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 2

$$y = x^3 + 1$$

fonksiyonunun $[a, a + 2]$ aralığında değişim oranı 1 olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+2) - f(a)}{(a+2) - (a)} = 1 \\ &= \frac{[(a+2)^3 + 1] - (a^3 + 1)}{2} = 1 \end{aligned}$$

HATIRLATMA

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Hatırlatmayı kullanırsak

$$\frac{a^3 + 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 + 2^3 - a^3}{2} = 1$$

$$\frac{6a^2 + 12a + 8}{2} = 1$$

$$3a^2 + 6a + 3 = 0$$

$$3(a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ bulunur.}$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \sin x - \cos x$

fonksiyonunun $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

- A) $\frac{4}{\pi}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{4}{3\pi}$
 D) $\frac{2}{\pi}$ E) 0

2. $f(x) = x^3 + x^2$

fonksiyonunun aşağıdaki aralıkların hangisinde ortalama değişim hızı 4 tür?

- A) $[-4, 0]$ B) $[-1, 3]$ C) $[0, 2]$
 D) $[1, 2]$ E) $[-2, 2]$

3. $f(x) = 1 + x \cdot \sin^2 a$

fonksiyonunun $[-1, 0]$ aralığındaki ortalama değişim oranı $\frac{1}{3}$ olduğuna göre, $\cos 2a$ kaçtır?

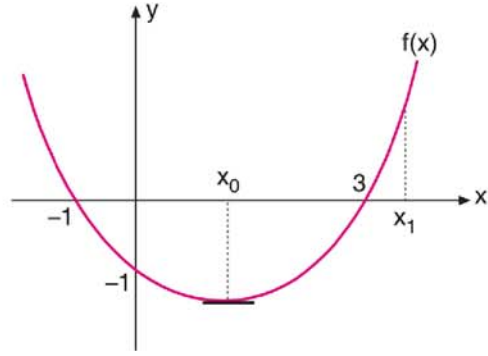
- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{7}{9}$

1) C

2) E

3) B

4.

Yukarıdaki parabol grafiği $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir. f in $[x_0, x_1]$ aralığındaki değişim hızı $\frac{4}{3}$ olduğuna göre, x_1 kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) $\frac{9}{2}$
 D) 4 E) $\frac{7}{2}$

5. Bir deney için kavanoza konulan bakterilerin sayısı her gün kontrol edilmektedir. Deneyin 12. gününde kavanozdaki bakteri sayısının 25 olduğu gözlemlenmiştir.

Kavanozdaki bakteri sayısının ortalama değişim hızı 2,5 olduğuna göre, deneyin 18. gününde kavanozdaki toplam bakteri sayısı kaçtır?

- A) 50 B) 48 C) 45
 D) 40 E) 36

4) B

5) D



ADIM



ANLIK DEĞİŞİM ORANI (Anlık Hız)

Ortalama hız bize bir hareketlinin belli anlardaki hız değişimleri hakkında bilgi vermez.

Bir $[a, b]$ zaman aralığında bir hareketlinin ortalama hızının nasıl hesaplandığını önceki adımda öğrendik.

Peki bu hareketlinin belli bir andaki (saniye, dakika, saat gibi) hızını nasıl bulabiliriz?

İşte burada devreye anlık hız kavramı giriyor. Anlık hız, hareketlinin çok kısa (sıfıra yakın) bir zaman aralığındaki hızı olarak ifade edilebilir.

Anlık hız, ortalama hızdaki değişim aralığının sıfıra yakın alınmasıyla hesaplanır. Bu hesaplama limit işlemi ile gerçekleştirilir.

Ortalama hızı $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ olarak ifade etmiştik.

Anlık hızda Δt zaman uzunluğu çok küçük (sıfıra yakın) alınır.

O halde bir hareketlinin anlık hızı ya da anlık değişim oranı şu şekilde hesaplanır:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ÖRNEK 1

Bir hareketlinin zamana (t : saat) bağlı konumu (x : km) $x(t) = 4t^2$ fonksiyonu ile ifade edilmiştir.

Buna göre, bu hareketlinin harekete geçtikten sonra 2. saatteki hızı kaç km dir?

Çözüm

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(t)}{2 - t} = \frac{4 \cdot 2^2 - 4t^2}{2 - t}$$

Yukarıda hareketlinin t saat ile 2. saat arasındaki ortalama hızı ifade edilmiştir.

2. saatteki anlık hızı arıyorsak t yi olabildiğince küçük ya da sıfıra yakın almalıyız ki tam 2. saatteki anlık hız değişim oranını bulabilelim.

Bunun için $t \rightarrow 0$ limiti hesaplanmalıdır.

O halde;

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{16 - 4t^2}{2 - t} = \frac{16 - 0}{2 - 0} = 8 \text{ olur.}$$

Yani hareketlinin tam 2. saatteki hızı 8 km dir.

BİR FONKSİYONUN ANLIK DEĞİŞİM ORANI

Fizikte anlık hız olarak adlandırılan ve yukarıda anlatılan kavramı fonksiyon üzerinde düşünelim.

Bir fonksiyonun bir x_0 noktasında x e bağlı anlık değişim oranı (hızı);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

şeklinde hesaplanır. Burada x ile x_0 arasındaki farkı çok küçük olarak düşündüğümüzü unutmayalım.

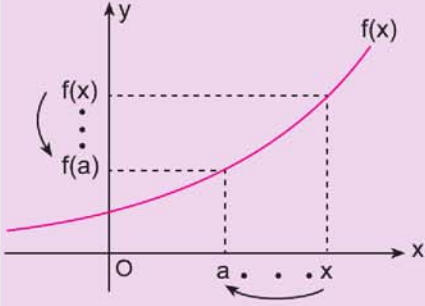
İşte bir fonksiyonda bu şekilde hesaplanan anlık değişim oranı matematikte bir fonksiyonun bir noktadaki türevi olarak tanımlanmıştır.

Şimdi türev kavramını daha geniş olarak ele alalım.

ADIM**TÜREV**

Bir fonksiyonun x değişkeninde meydana gelecek artma veya azalma x de (dx kadar) değişime neden olurken, x deki bu değişim y de (dy kadar) değişikliğe neden olur. Bu iki değişim miktarının oranı; $\frac{dx}{dy}$ limit durumunda, yani x de sıfıra yakın bir değişiklik olduğunda türev adını alır.

Bu anlattığımızı grafik üzerinde izah etmeye çalışalım.



Grafikte görüldüğü gibi x a ya doğru hareket ederse, y ekseninde $f(x)$, $f(a)$ ya doğru hareket edecektir.

Bu durumda

- y eksenindeki değişim; $f(x) - f(a)$
- x eksenindeki değişim; $x - a$

kadardır.

İşte bu değişim miktarının oranı;

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limit durumunda yani x de sıfıra yakın bir değişiklik olduğunda **türev** adını alır.

Şimdi türevin tanımını yapalım;

Tanım: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$a \in A$ da sürekli olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti bir reel sayıya eşit ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun **$x = a$ daki türevi** denir.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

olarak veya

$$f'(a) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=a}$$

şeklinde de gösterilebilir.

Türev tanımını şu şekilde de gösterebiliriz.

$h > 0$ olmak üzere

$x = a + h$ dersek

$h = x - a$ olur.

$x \rightarrow a$ iken $h \rightarrow 0$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki türevi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olarak gösterilir.

ADIM



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x - 1}$$

İşleminin sonucu nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(f(x) - f(1))}{x - 1} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= 2 \cdot f'(1) \end{aligned}$$

ÖRNEK 2

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{-h}$$

İşleminin sonucu nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{-h} &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= -f'(2) \end{aligned}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{-x}$$

İşleminin sonucu nedir?

- A) $-f'(x)$ B) $-f'(0)$ C) $f'(0)$
D) $f'(x)$ E) $f'(-1)$

$$2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4) - f(4+h)}{h}$$

İşleminin sonucu nedir?

- A) $f'(4)$ B) $f'(0)$ C) $-f'(0)$
D) $-f'(4)$ E) $f'(x)$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4}$$

İşleminin sonucu nedir?

- A) $2f'(2)$ B) $f'(2)$ C) $\frac{f'(2)}{2}$
D) $\frac{f'(2)}{4}$ E) $-f'(2)$

$$4. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+3) - f(h-2) + f(-2) - f(3)}{h}$$

İşleminin sonucu nedir?

- A) $f'(3)$ B) $f'(3) + f'(-2)$ C) $f'(-2)$
D) $f'(-2) - f'(-3)$ E) $f'(3) - f'(-2)$

1) B

2) D

3) C

4) E



ADIM**SABİT FONKSİYONUN TÜREVİ**

$f(x) = c$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = 0$ dir.

Sabit sayıya eşit olan bir fonksiyonun türevi sıfırdır.

ADIM PEKİŞTİRME**ÖRNEK 1**

$f(x) = 2008!$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$f(x) = 2008!$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan

$f'(x) = 0$ dir.

ÖRNEK 2

$f(x) = k^2 + 2k + 1$

olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$f(x) = k^2 + 2k + 1$

fonksiyonu x değişkenine bağlı olmadığından sabit fonksiyondur. Bu nedenle; $f'(x) = 0$ olur.

ÖRNEK 3

$f(x) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$f(x) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

fonksiyonu x değişkenine bağlı olmadığından sabit fonksiyondur. Bu nedenle; $f'(x) = 0$ olur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $6 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6$ B) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^5$ C) 1
D) 0 E) -1

2. $f(x) = e^\pi - \pi^e$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) $e - 1$ B) $e - \pi$ C) πe
D) 1 E) 0

3. $f(x) = \sum_{k=1}^n k$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) -1 B) 0 C) n
D) $n + 1$ E) $\frac{n(n+1)}{2}$

4. $f(x) = 7 \cdot x^{n-3} + x^{m+1}$

fonksiyonu için, $f'(x) = 0$ olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 0 E) -4

1) D

2) E

3) B

4) C



ADIM

$f(x) = x^n$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ dir.

$f(x) = k \cdot x^n$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$ dir.

ADIM PEKİŞTİRME**ÖRNEK 1**

$f(x) = x^{-10}$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$f'(x) = -10 \cdot x^{-10-1} = -10 \cdot x^{-11}$$

ÖRNEK 2

$f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

Önce $f(x)$ i düzenleyelim, sonra türevini alalım.

$$f(x) = \sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 3

$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x}}$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

Önce $f(x)$ i düzenleyelim, sonra türevini alalım.

$$f(x) = \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} = 3 \cdot x \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \text{ olur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \frac{1}{x^5}$

olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) 0 D) 4 E) 5

2. $f(x) = x \cdot \sqrt{x^3}$

olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?

- A) 8 B) $10\sqrt[3]{2}$ C) $10\sqrt{2}$ D) 0 E) 20

3. $n \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = x^{n+1} \text{ ve } f'(1) = 6$$

olduğuna göre, n kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4. $f(x) = \frac{x^4}{x^{-2} \cdot \sqrt{x}}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) $-\frac{11}{2}$ B) -6 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{11}{2}$

- 1) A 2) E 3) C 4) E

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = x^2 - 3x - ax + 1$

fonksiyonunda $f'(1) = 1$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

2. $f(x) = x^2 \cdot (x + 1)$

olduğuna göre, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1}$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 8

3. $f(x) = x^3 - 2x + 3$ olduğuna göre,

$$f'(m) = f(m) - m^3$$

eşitliğini sağlayan m reel sayılarının toplamı kaçtır?

- A) -1 B)
- $-\frac{2}{3}$
- C) 0 D)
- $\frac{1}{3}$
- E)
- $\frac{5}{3}$

4. $f(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots + x^{11}$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -11 B) -10 C) -1 D) 0 E) 1

5. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{20}}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) -210 B) -110 C) -1 D) 1 E) 210

6. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ ve $g(x) = 3x^2 - 5x + 4$

olduğuna göre, $(f - g)(x)$ fark fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) 0 B) 3 C) 6 D) 9 E) 19

7. $P(x)$ polinomunun türevi $P'(x)$ dir.

$$P(x) - P'(x) = 3x + 6$$

olduğuna göre, $P'(-2) + P(0)$ toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 9 C) 7 D) 3 E) -2

8. Türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy \text{ ve } f'(0) = -3$$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 0 E) 1

1) B 2) D 3) B 4) E

5) A 6) B 7) A 8) E

ADIM**İKİ FONKSİYONUN ÇARPIMININ TÜREVİ**

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$$

ADIM PEKİŞTİRME**ÖRNEK 1**

$f(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = (x^2 + 1)'.(x + 2) + (x^2 + 1).(x + 2)'$$

$$f'(x) = 2x.(x + 2) + x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x^2 + 4x + x^2 + 1 = 3x^2 + 4x + 1$$

ÖRNEK 2

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm**I. Yol**

$$f'(x) = (x - 1)'.(x - 2).(x - 3) + (x - 1).(x - 2)'(x - 3) + (x - 1).(x - 2).(x - 3)'$$

$$f'(x) = 1.(x - 2).(x - 3) + (x - 1).1.(x - 3) + (x - 1).(x - 2).1$$

Buna göre, $x = 2$ türevde yazılırsa

$$f'(2) = 0 + (2 - 1).1.(2 - 3) + 0 \Rightarrow f'(2) = -1$$

II. Yol

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ olduğuna göre}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3) - 0}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)(x - 3) = (2 - 1)(2 - 3) = -1 \text{ olur.}$$



$f(x) = (x - 1).(x - 2).(x - 3)$ türündeki bir fonksiyonun türevinde türevi istenen nokta $f(x)$ i sıfırlayan bir nokta ise sadece o parçanın türevi alınıp, istenen değer fonksiyonun geri kalan bölümünde yerine yazılır.

O halde sorumuzu bu pratik yöntemle çözelim.

$$f'(x) = (x - 1).(x - 2)'(x - 3)$$

$$f'(x) = (x - 1).1.(x - 3)$$

$$f'(2) = (2 - 1).1.(2 - 3) = -1 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 3

$f(x) = x.g(x)$ ve $g(0) = 5$ olduğuna göre $f'(0)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = (x.g(x))' = 1.g(x) + x.g'(x)$$

$$f'(0) = 1.g(0) + 0.g'(0)$$

$$f'(0) = g(0)$$

$$f'(0) = 5 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 4

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = x + 1$$

$(f.g.h)(x)$ çarpım fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm

Önce çarpım fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(f.g.h)' = f'.g.h + f.g'.h + f.g.h'$$
 olduğuna göre,

$$(f.g.h)'(-1) = f'(-1).g(-1).h(-1) + f(-1).g'(-1).h(-1) + f(-1).g(-1).h'(-1)$$

$$f'(x) = 4x^3, \quad g'(x) = 2x, \quad h'(x) = 1$$

$$f'(-1) = -4, \quad g'(-1) = -2, \quad h'(-1) = 1$$

$$f(-1) = 1, \quad g(-1) = 2, \quad h(-1) = 0$$

Şimdi bu değerleri türevde yerine yazalım.

$$(f.g.h)'(-1) = (-4).2.(0) + 1.(-2).(0) + 1.2.1 = 2 \text{ bulunur.}$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = (x^3 - 1)(2x^2 - 3x + 1)$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

2. $f(x) = x^3(x^3 + x^2 + x + 1)$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -6 B) -5 C) -4 D) 0 E) 2

3. $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 16 B) 15 C) 0 D) 4 E) -16

4. $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 6 E) 12

1) E 2) D 3) D 4) D

5. $f(x) = x^3 + 1$

$x = f(x) \cdot g(x)$

olduğuna göre, $g'(0)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6. $f'(x).g(x) + g'(x).f(x) + 1$

fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin türevidir?

- A)
- $f(x).g(x)$
- B)
- $f(x).g(x).x$
-
- C)
- $f(x) + g(x)$
- D)
- $f(x) + g(x) + x$
-
- E)
- $f(x).g(x) + x$

7. $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x^2 + x + 1$

 $(f.g.h)(x)$ çarpım fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) 42 B) 40 C) 36 D) 10 E) 8

8. $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

$f(x) = (x + 2).g(x)$

$g(-1) = 4$

$g'(-1) = -3$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -5 B) -1 C) 0 D) 2 E) 5

5) B 6) E 7) C 8) D

ADIM



İKİ FONKSİYONUN BÖLÜMÜNÜN TÜREVİ

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x^2-4} \text{ olduğuna göre, } f'(x) \text{ nedir?}$$

Çözüm

Öncelikle $f(x)$ fonksiyonunda sadeleştirme yaparak $f(x)$ i basitleştirip sonrasında türev alalım.

$$f(x) = \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-2) - (x-2)'(x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (x+1)}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

ÖRNEK 2

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+2} \text{ olduğuna göre, } f'(0) \text{ kaçtır?}$$

Çözüm

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' - \left(\frac{2}{x+2}\right)'$$

Her iki kesire ayrı ayrı bölüm türevi uygulayalım.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} - \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 2}{(x+2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1-0}{1^2} - \frac{(-2)}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2}$$

ÖRNEK 3

$$f(x) = \frac{ax}{x-1} \text{ fonksiyonu veriliyor.}$$

$f'(0) = 4$ olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = \frac{a \cdot (x-1) - 1 \cdot ax}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{a \cdot (-1) - 0}{(-1)^2} = \frac{-a}{1} = -a$$

$$f'(0) = -a = 4 \Rightarrow a = -4 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 4

f ve g türevlenebilir iki fonksiyondur.

$$f(x) = \frac{g(x)+1}{2x-1}, f'(3) = 1, g(3) = 6$$

olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot (2x-1) - (g(x)+1) \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(3) = \frac{g'(3) \cdot 5 - (g(3)+1) \cdot 2}{5^2}$$

$$f'(3) = \frac{g'(3) \cdot 5 - 7 \cdot 2}{25} = 1 \Rightarrow g'(3) = \frac{39}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 5

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ ve } g(x) = 2x$$

olduğuna göre, $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ değeri kaçtır?

Çözüm

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{g^2(1)}$$

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ ise } f(1) = 2 \text{ ve } f'(1) = 2$$

$$g(x) = 2x \text{ ise } g(1) = 2 \text{ ve } g'(1) = 2 \text{ olur.}$$

$$\text{Buna göre, } \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{2 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{(2)^2} = \frac{0}{4} = 0$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

- A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

2. $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2}$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $\frac{x^3 - 2x + 2}{x^3}$
- B)
- $\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3}$
- C)
- $\frac{x^3 + 1}{x^3}$
-
- D) 0 E) 1

3. $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 3x + 2}$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

- A) 1 B)
- $\frac{1}{2}$
- C)
- $\frac{1}{4}$
- D)
- $\frac{1}{8}$
- E) 0

4. $f(x) = \frac{x^2(x+1) + (x+1)}{x+1}$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

1) B 2) A 3) C 4) D

- 5.
- f
- ve
- g
- türevlenebilir fonksiyonlardır.

$f(x) = x^2 - x$ ve $g(1) = 2$

olduğuna göre, $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ kaçtır?

- A) 0 B)
- $\frac{1}{4}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 1 E) 2

- 6.
- $f(x) = \frac{ax+2}{2x-1}$
- fonksiyonu veriliyor.

 $f'(1) = 2$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 3 B) 0 C) -2 D) -4 E) -6

- 7.
- $f(x)$
- ve
- $g(x)$
- türevlenebilir fonksiyonlardır.

$f(x) = \frac{g(x)}{x}$, $f(2) = 2$, $g'(2) = 3$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A)
- $-\frac{1}{2}$
- B) 0 C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 1 E) 2

- 8.
- $f(x)$
- ve
- $g(x)$
- türevlenebilir iki fonksiyondur.

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{g(x)}$ ve $f'(1) = f'(-1)$

olduğuna göre, $\frac{g(1)}{g(-1)}$ oranı kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

5) C 6) E 7) C 8) A

ADIM



$f(x) = (g(x))^n$
BİÇİMİNDEKİ FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$$f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

şeklinde dir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = (x^2 + 1)^4$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot (x^2 + 1)^{4-1} \cdot (x^2 + 1)' \\ &= 4(x^2 + 1)^3 \cdot 2x \\ &= 8x \cdot (x^2 + 1)^3 \end{aligned}$$

ÖRNEK 2

$f(x) = (x^2 + x + 1)^{-2}$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = -2(x^2 + x + 1)^{-3} \cdot (2x + 1)$$

ÖRNEK 3

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ ise $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

Kareköklü ifadelerin türevi alınırken $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ pratik kuralı tercih edilmelidir.

Bu pratik soruya uygulanırsa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 1}} \\ f'(1) &= \frac{2 + 4}{2\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\cancel{6}\sqrt{6}}{2 \cdot \cancel{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

ÖRNEK 4

$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

$f(x)$ i üslü ifade olarak düzenleyelim.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} = (x^2 + x + 1)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(x^2 + x + 1)^{-1-1} \cdot (2x + 1)$$

$$f'(x) = -1(x^2 + x + 1)^{-2} \cdot (2x + 1)$$

$$f'(1) = -1 \cdot (1 + 1 + 1)^{-2} \cdot (2 + 1) \Rightarrow f'(1) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

ÖRNEK 5

$f(x) = g^2(x) + x^2$ ve $g'(2) = 0$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2x$$

$$f'(2) = 2 \cdot g(2) \cdot g'(2) + 4 = 0 + 4 \Rightarrow f'(2) = 4 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 6

$f(x) = \sqrt[3]{g^2(x) + 4x}$ fonksiyonu veriliyor.

$g(1) = 2$ ve $g'(1) = 3$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

$f(x)$ i üslü ifade olarak düzenleyelim.

$$f(x) = \sqrt[3]{g^2(x) + 4x} = (g^2(x) + 4x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (g^2(x) + 4x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (g^2(x) + 4x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (g^2(x) + 4x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 4)$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} (g^2(1) + 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot g(1) \cdot g'(1) + 4)$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} (8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 + 4)$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} \cdot (2)^{-2} \cdot 16 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = \frac{4}{3}$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^5$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -2 E) -10

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

olduğuna göre, $f'(\sqrt{3})$ kaçtır?

- A)
- $\frac{1}{2}$
- B)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D) 2 E)
- $\sqrt{3}$

3. $f(x) = (x^2 + x - 1)^{\frac{1}{3}}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 0 B)
- $\frac{1}{3}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 1 E)
- $\frac{3}{2}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A)
- $\frac{3\sqrt{2}}{8}$
- B)
- $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- C)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D)
- $\frac{5\sqrt{2}}{8}$
- E) 0

1) E 2) C 3) D 4) D

5. f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

$f(x) = (g(x) - x)^2$ ve $g(1) = 1$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

6. Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu için

$f(1) = 2$ ve $f'(1) = 1$

olduğuna göre, $x \cdot f^3(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) 20 B) 18 C) 12 D) 11 E) 8

7. f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$f(x) = g^2(x) - 4g(x)$ ve $f(2) = -4$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

8. f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{g^3(x)}$ ve $g(2) = 2$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A)
- $\frac{1}{4}$
- B)
- $\frac{1}{2}$
- C) 1 D) 2 E) 4

5) B 6) A 7) D 8) B

ADIM



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$$(\sin f(x))' = f'(x) \cdot \cos f(x)$$

$$(\cos f(x))' = -f'(x) \cdot \sin f(x)$$

$$(\tan f(x))' = f'(x) \cdot (1 + \tan^2 f(x))$$

$$(\cot f(x))' = -f'(x) \cdot (1 + \cot^2 f(x))$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = 2\cos 2x - 3\sin 3x$$

ÖRNEK 2

$f(x) = \tan x + \cot 2x$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = 1 \cdot (1 + \tan^2 x) - 2(1 + \cot^2 2x)$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 2 - 2\cot^2 2x$$

$$f'(x) = \tan^2 x - 2\cot^2 2x - 1$$

ÖRNEK 3

$f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$ olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = (\sin 2x)' \cdot \cos x + \sin 2x \cdot (\cos x)'$$

$$f'(x) = 2\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin \pi \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

ÖRNEK 4

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x$$

olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

HATIRLATMA (↺)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

Hatırlatmadaki yarım açı formüllerini kullanarak $f(x)$ fonksiyonunu basitleştirelim.

$$f(x) = \cos 2x + \sin 2x \quad \text{şimdi türev alalım.}$$

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x \text{ olur.}$$

ÖRNEK 5

$f(x) = \sin(\cos x)$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

HATIRLATMA (↺)

$$g(x) = \sin f(x) \text{ ise } g'(x) = f'(x) \cdot \cos(f(x)) \text{ dir.}$$

O halde $f(x) = \sin(\cos x)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = (\cos x)' \cdot \cos(\cos x) \Rightarrow f'(x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x) \text{ olur.}$$

ÖRNEK 6

$f(x) = \sin^3 2x$ olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

HATIRLATMA (↺)

$$f(x) = g^n(x) \text{ ise } f'(x) = n \cdot g^{n-1}(x) \cdot g'(x)$$

O halde $f(x) = \sin^3 2x$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)'$$

$$f'(x) = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x = 6 \cdot \cos 2x \cdot \sin^2 2x$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = 3.\sin 2x - 6.\cos 5x$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -30 B) -6 C) 0 D) 6 E) 30

2. $f(x) = \tan(x^2)$

olduğuna göre, $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $\tan 1$
- B)
- $\tan^2 1$
- C)
- $2\tan^2 1$
-
- D)
- $2(1 + \tan^2 1)$
- E)
- $2 + \tan^2 1$

3. $f(x) = 3 \cdot \tan 2x \cdot \cot 2x$

olduğuna göre, $\frac{d}{dx} f(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $\cos 6x$
- B)
- $\sec 6x$
- C)
- $3\cos 6x$
- D) 1 E) 0

4. $f(x) = \sqrt{\cos x + \sin x}$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A)
- $-\frac{1}{2}$
- B) 0 C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 1 E) 2

1) D 2) D 3) E 4) C

5. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

6. $f(x) = \frac{2}{\cos x}$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $2\tan x$
- B)
- $4\cot x$
- C)
- $2\cos^2 x$
-
- D)
- $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$
- E)
- $\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

7. $f(x) = \tan(\sin 3x)$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

8. $f(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 2x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9. $f(x) = 4\cos^2 x \cdot \sin^2 x$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $\sin 2x$
- B)
- $\cos 2x$
- C)
- $2\cos 2x$
-
- D)
- $2\sin 4x$
- E)
- $\cos 4x$

5) C 6) E 7) E 8) A 9) D

10. $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \cos x$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2\sin x + x \cdot \cos x$ B) $2\cos x + x \cdot \sin x$
 C) $\sin x - x \cdot \cos x$ D) $x \cdot \cos x - \sin x$
 E) $x(\sin x + \cos x)$

11. $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{1 - \cos x}$ B) $-\frac{1}{1 - \cos x}$ C) $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$
 D) $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$ E) $-\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x}$

12. $f(x) = \tan x \cdot \cot^2 x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{\pi}{2}$ D) -1 E) -2

13. $f(x) = (x + 1) \cdot \cos^3(x^2 - x)$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) π

14. $f(x) = \pi - x + \sqrt{2}\cos x + \tan 2x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) π B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) $\frac{\pi}{4}$

10) A 11) B 12) E 13) C 14) B

15. $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin x\right)$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{\pi}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ E) -3π

16. $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$

olduğuna göre, $f'(\pi^2)$ kaçtır?

- A) π B) 1 C) $-\frac{1}{\pi}$ D) $-\frac{2}{\pi^2}$ E) $-\frac{1}{2\pi^3}$

17. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \cos x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $-\pi$ E) $-\frac{3\pi}{2}$

18. $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) 2π E) $2\sqrt{3}\pi$

15) D 16) E 17) A 18) B



ADIM



ÜSTEL FONKSİYONUN TÜREVİ

- $f(x) = a^{g(x)}$ (a sabit sayı olmak üzere)
 $f'(x) = g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln a$
- $f(x) = e^{g(x)}$ (e doğal logaritma tabanı)
 $f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = 2^x + e^{2x} + e^x$$

olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$f'(x) = 1 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot e^{2x} + 1 \cdot e^x$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 2e^{2x} + e^x$$

ÖRNEK 2

$f(x) = e^{\sin x}$ olduğuna göre, $f'(\pi)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot e^{\sin x}$$

$$f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$f'(\pi) = \cos \pi \cdot e^{\sin \pi} = (-1) \cdot e^0$$

$$f'(\pi) = -1 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 3

$f(x) = 2^{x^2+1}$ olduğuna göre, $f'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$f'(x) = (x^2 + 1)' \cdot 2^{x^2+1} \cdot \ln 2$$

$$f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2+1} \cdot \ln 2$$

ÖRNEK 4

$$f(x) = \ln 3^{(x^2)}$$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

Çözüm

HATIRLATMA

$$\log_a^b = b \cdot \log^a$$

Hatırlatmadaki özelliği $f(x)$ e uygulayalım.

$$f(x) = \ln 3^{(x^2)} = x^2 \cdot \ln 3$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln 3 \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 \cdot \ln 3 = 6 \ln 3$$

ÖRNEK 5

$$f(x) = e^{\ln(\sin x)}$$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ kaçtır?

Çözüm

HATIRLATMA

$$a^{\log_a b} = b, \quad e^{\ln b} = b$$

Hatırlatmadaki özelliği $f(x)$ e uygulayalım.

$$f(x) = e^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ÖRNEK 6

$$f(x) = e^{x \cdot \sin x}$$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = (x \cdot \sin x)' \cdot e^{x \cdot \sin x}$$

$$f'(x) = (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) \cdot e^{x \cdot \sin x}$$

$$f'(0) = (0) \cdot e^0 = 0$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = 3^x + e^x$

olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $3\ln 3$ B) $e^3 + 3$ C) 1
D) $3\ln 3 + e$ E) $3\ln 3 + 1$

2. $f(x) = e^{\cot x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) $2e$ B) e C) $-2e$ D) $-e^{-1}$ E) $2e^{-1}$

3. $f(x) = x \cdot e^x$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $(x+1)e^x$ B) $x \cdot e^x$ C) $x^2 \cdot e^{2x}$
D) $(x-1)e^x$ E) e^x

4. $f(x) = \ln 3^{(3x-3)}$

olduğuna göre, $f'(81)$ kaçtır?

- A) $\ln 81$ B) $\ln 27$ C) $\ln 9$ D) $\ln 3$ E) 0

1) D 2) C 3) A 4) B

5. $f(x) = e^{\ln x}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\ln 2$ D) $2\ln 2$ E) 0

6. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 1}$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -2 B) 0 C) 2 D) e^{-1} E) e

7. $f(x) = e^{\tan x}$ olmak üzere

$f'(x) - f(x) = 3 \cdot e^{\tan x}$

eşitliğini sağlayan en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?

- A) 150 B) 120 C) 90 D) 60 E) 45

8. $f(x) = e^{-x}(2x^2 + 3x + 3)$ fonksiyonu için

$f'(a) = -2f(a)$

eşitliğini sağlayan a reel sayılarının toplamı kaçtır?

- A) -4 B) $-\frac{7}{2}$ C) -2 D) $-\frac{1}{2}$ E) 3

5) B 6) B 7) D 8) B



ADIM



LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

- $f(x) = \log_a g(x)$ (a sabit sayı olmak üzere)

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_a e = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

- $f(x) = \ln(g(x))$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \ln x + \log_2 x$$

olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \log_2 e \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} (1 + \log_2 e)$$

ÖRNEK 2

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

ÖRNEK 3

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

HATIRLATMA



$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

O halde

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(\sin x) - \ln x \text{ olduğuna göre,}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \cot x - \frac{1}{x}$$

ÖRNEK 4

$$f(x) = \ln(\sin^2 x) - \ln(\sin x \cdot \cos x)$$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

Çözüm

HATIRLATMA



$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Yukarıdaki hatırlatmayı kullanarak $f(x)$ i sadeleştirip sonra türev alalım.

$$f(x) = \ln(\sin^2 x) - \ln(\sin x \cdot \cos x)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$f(x) = \ln(\tan x)$$

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+1}{1} = 2$$

ÖRNEK 5

$$f(x) = \log_3 \sin^3 x$$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

Çözüm

HATIRLATMA



$$\log_a b^c = c \log_a b$$

Hatırlatmayı kullanırsak,

$$f(x) = \log_3 \sin^3 x = 3 \log_3 \sin x \text{ ise;}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} \cdot \log_3 e = 3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \log_3 e$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \frac{0}{1} \cdot \log_3 e = 0 \text{ olur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \log(3x)$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

- A) $\frac{\log e}{2}$ B) $\log e$ C) $e - 1$
 D) $\frac{\log e}{3}$ E) $\frac{e}{3}$

2. $f(x) = \ln(\sin x) + \ln e^x$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\cot x + x$ B) $\cot x + 1$ C) $\tan x$
 D) $\tan x + 1$ E) $\tan x + x$

3. $f(x) = \ln(2^{\sin 4x})$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) $-4\ln 2$ B) $4\ln 2$ C) $\ln 2$ D) 1 E) 0

4. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\cos x}\right)$

olduğuna göre, $f'(2\pi)$ kaçtır?

- A) $-\pi$ B) -1 C) 1 D) $\frac{1}{2\pi}$ E) π

1) D 2) B 3) A 4) D

5. $f(x) = \ln(\ln x^2)$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2\ln 2}$ B) $\frac{1}{\ln 2}$ C) $\frac{2}{\ln 2}$ D) $\frac{\ln 2}{2}$ E) 1

6. $f(x) = \log_2(\cos^2 x)$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) $\frac{-2}{\ln 2}$ B) $\frac{-1}{\ln 2}$ C) $-2\ln 2$ D) -1 E) 2

7. $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

olduğuna göre, $f'(e)$ kaçtır?

- A) $e^e - e$ B) $e^2 - e^e$ C) $e^e - e^{e-1}$
 D) 1 E) 0

8. $f(x) = \ln(1 - \cos^2 x) - \ln(\sin x)$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\cot x$ D) $\tan x$ E) 1

5) A 6) A 7) C 8) C



ADIM



BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ

$$((f \circ g)(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = x^3 + 1$ olduğuna göre, $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunun türevi neye eşittir?

Çözüm

$$((f \circ g)(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$f'(x) = 2x$ ve $g'(x) = 3x^2$ ifadelerini yukarıda bulduğumuz türevde yerine yazalım.

$$g'(x) \cdot f'(g(x)) = 3x^2 \cdot [2 \cdot (x^3 + 1)] = 6x^5 + 6x^2$$

ÖRNEK 2

$f(x^3 + 1) = 3x^2 + 2x + 1$ olduğuna göre, $f'(9)$ kaçtır?

Çözüm

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$3x^2 \cdot f'(x^3 + 1) = 6x + 2 \text{ ise } x = 2 \text{ için } f'(x^3 + 1) = f'(9) \text{ olur.}$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot f'(9) = 6 \cdot 2 + 2 \Rightarrow 12 \cdot f'(9) = 14 \Rightarrow f'(9) = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

ÖRNEK 3

$f(x^2 + 2x) = h(3x - 1)$ ve $f'(0) = 6$ ise $h'(-1)$ kaçtır?

Çözüm

Eşitliğin her iki yanının türevini alalım.

$$(2x + 2) \cdot f'(x^2 + 2x) = 3 \cdot h'(3x - 1)$$

$$x = 0 \text{ için } f'(x^2 + 2x) = f'(0) \text{ olur.}$$

$$(2 \cdot 0 + 2) \cdot f'(0) = 3 \cdot h'(-1) \Rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot h'(-1) \Rightarrow h'(-1) = 4$$

ÖRNEK 4

$f(x \cdot \sin x) = x^2$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

Çözüm

Eşitliğin her iki yanının türevini alalım.

$$(x \cdot \sin x)' \cdot f'(x \cdot \sin x) = 2x \Rightarrow (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) \cdot f'(x \cdot \sin x) = 2x$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ için } f'(x \cdot \sin x) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ olur. O halde}$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ olur.}$$

ÖRNEK 5

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3$$

olduğuna göre, $(h \circ g \circ f)'(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$(h \circ g \circ f)'(x) = (g \circ f)'(x) \cdot h'((g \circ f)(x))$$

$$= f'(x) \cdot g'(f(x)) \cdot h'(g(f(x))) = 1 \cdot 2 \cdot (x + 1) \cdot h'(g(x + 1))$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (x + 1) \cdot h'((x + 1)^2) = 2 \cdot (x + 1) \cdot 3(x + 1)^4$$

$$= 6 \cdot (x + 1)^5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 6

$$f(f(x) + x) = g(2x) + x$$

$$f'(1) = 2, \quad f(1) = 3, \quad g'(2) = 4$$

olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?

Çözüm

Eşitliğin her iki yanının türevini alalım.

$$(f(f(x) + x))' = (g(2x) + x)'$$

$$(f(x) + x)' \cdot f'(f(x) + x) = 2 \cdot g'(2x) + 1$$

$$(f'(x) + 1) \cdot f'(f(x) + x) = 2 \cdot g'(2x) + 1$$

Bu ifadede x yerine 1 yazılırsa $f'(4)$ bulunur.

$$(f'(1) + 1) \cdot f'(f(1) + 1) = 2 \cdot g'(2) + 1$$

$$3 \cdot f'(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$f'(4) = 3 \text{ bulunur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = x^2 - 3x$ ve $g(x) = \frac{x^4}{4}$
olduğuna göre, $(gof)'(1)$ kaçtır?
A) -8 B) -4 C) 0 D) 8 E) 16

2. $f(2x - 3) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2$
olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?
A) -3 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

3. Türevlenebilir f ve h fonksiyonları için
 $f(x^3 - 1) = h(x^2 + 1)$ ve $h'(5) = 6$
olduğuna göre, $f'(7)$ kaçtır?
A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 6 D) 12 E) 24

4. $f(2x + 1) = e^x \cdot \ln x$
olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?
A) $\frac{1}{e}$ B) $\frac{2}{e}$ C) $\frac{e}{2}$ D) e E) e^2

5. Türevlenebilir f ve g fonksiyonları için
 $f(3x - 2) = x \cdot g(x)$, $g(2) = 5$ ve $g'(2) = 2$
olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?
A) 12 B) 9 C) 4 D) 3 E) 1

1) D 2) B 3) B 4) C 5) D

6. $f(x) = x^2 - x$
olduğuna göre, $(f \circ f)'(1)$ kaçtır?
A) 3 B) -2 C) 1 D) 0 E) -1

7. $f(x \cdot \tan x) = x^2 + x$
olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?
A) 0 B) 1 C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

8. f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve
 $g(2x) = f(f(x) - x)$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$
olduğuna göre, $g'(2)$ kaçtır?
A) 9 B) 6 C) 3 D) 2 E) 1

9. $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x^2 + 1$
olduğuna göre, $(hogof)'\left(\frac{1}{3}\right)$ kaçtır?
A) 27 B) 24 C) 18 D) 3 E) 1

6) E 7) B 8) C 9) B



ADIM



ZİNCİR KURALI

y , t ye bağlı; t , x e bağlı; x de z ye bağlı türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$y = f(t)$, $t = g(x)$, $x = p(z)$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$y = \theta^2 + \theta$ ve $\theta = \frac{x-1}{2}$ ise, $\theta = 1$ için $\frac{dy}{dx}$ neye eşittir?

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = (2\theta + 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\theta = 1 \text{ için } \frac{dy}{dx} = (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$



$y = f(t)$ ve $x = g(t)$ olsun.

Yani x ve y , t ye bağlıdır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y \text{ nin } t \text{ ye bağlı türevi}}{x \text{ nin } t \text{ ye bağlı türevi}}$$

ÖRNEK 2

$y = t^4 + t^2$ ve $x = t^2 + 1$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ neye eşittir?

Çözüm

Pratiği kullanırsak y yi x türünden yazıp türev almaya gerek kalmaz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 + 2t}{2t} = 2t^2 + 1 = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$$

ÖRNEK 3

$y = \ln \theta$ ve $\theta = x^3 + 1$

olduğuna göre, $\theta = 9$ için $\frac{dy}{dx}$ neye eşittir?

Çözüm

$\theta = 9$ olması için $x = 2$ olmalıdır.

$$\theta = x^3 + 1 = 2^3 + 1 = 9$$

O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\theta} \cdot 3x^2 = \frac{1}{9} \cdot 12 = \frac{4}{3}$$

ÖRNEK 4

h bire bir fonksiyon olmak üzere,

$y = g(3t - 1)$, $t = h(x^3)$

$g'(5) = 4$ ve $h'(1) = h(1) = 2$

olduğuna göre, $t = 2$ için $\frac{dy}{dx}$ neye eşittir?

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3 \cdot g'(3t-1) \cdot 3x^2 \cdot h'(x^3)$$

$t = h(x^3)$ ve $h(1) = 2$ olduğu biliniyor.

Buna göre,

$t = 2$ için $x = 1$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3 \cdot g'(5) \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot h'(1) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72 \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 5

$y = t^3 + 1$, $t = u^2$, $u = x + 2$ veriliyor.

$\frac{dy}{dx} = h(x)$ olduğuna göre, $h(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3t^2 \cdot 2u \cdot 1$$

$$t = u^2 \text{ ve } u = x + 2 \Rightarrow t = (x + 2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = h(x) = 3 \cdot (x + 2)^4 \cdot 2 \cdot (x + 2) = 6 \cdot (x + 2)^5$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $y = 4t^3 - t^2$, $t = \frac{x^2}{2}$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $12x^2 - 2x$ B) $12x^3 - 2x^2$ C) $x^5 - x^3$
D) $3x^5 - x^3$ E) $2x^4 - x^2$

2. $y = 4\sin\theta$ ve $\theta = 2x + \cos x$

olduğuna göre, $x = \frac{\pi}{2}$ için $\frac{dy}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) 2π B) 4 C) 2 D) 0 E) -4

3. $y = \ln t$ ve $t = \frac{x^3}{4} - 1$

olduğuna göre, $y = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) $2e$ B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

4. $y = e^t$ ve $t = \ln x$

olduğuna göre, $t = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) e^{-1} C) e^{e+1} D) e^e E) e^2

1) D 2) E 3) B 4) A

5. $y = 2\cos(\pi\theta)$ ve $\theta = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

olduğuna göre, $x = \frac{\pi}{12}$ için $\frac{dy}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) $4\sqrt{3}\pi$ B) 0 C) -4π D) $-4\sqrt{3}$ E) $-4\sqrt{3}\pi$

6. $t^2 + y = 1$ ve $x \cdot t = 1 + t$

olduğuna göre, $x = 2$ için $\frac{dy}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) -2

7. g ve h türevlenebilir iki fonksiyondur.

$y = g(3t - 2)$, $t = h^2(x)$

$g'(25) = 10$, $h(2) = h'(2) = 3$

olduğuna göre, $x = 2$ için $\frac{dy}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) 12 B) 27 C) 90 D) 540 E) 720

8. $y = t^2 + 1$, $t = \sin(\theta - 2)$, $\theta = x + 2$

eşitlikleri veriliyor.

$\frac{dy}{dx} = g(x)$ olduğuna göre, $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

5) E 6) B 7) D 8) D



ADIM



YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad (\text{y nin 1. türevi})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad (\text{y nin 2. türevi})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' \quad (\text{y nin 3. türevi})$$

1. türevin tekrar türevi alınırsa 2. türev, 2. türevde elde edilen fonksiyonun tekrar türevi alınırsa 3. türev elde edilir. Bu şekilde devam edilerek istenilen mertebeden türev hesaplanır. Eğer türevlerin sonuçları belirli bir kuralda devam ediyorsa en son bulunacak mertebe, kurala bakılarak tespit edilebilir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$y = x^4 + x^3 + 2$$

olduğuna göre, $\frac{d^3y}{dx^3}$ neye eşittir?

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = y' = 4x^3 + 3x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 12x^2 + 6x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 24x + 6$$

ÖRNEK 2

$$f(x) = e^{-2x}$$

olduğuna göre, $f^{(20)}(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$$

$$f''(x) = (-2) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = 2^2 \cdot e^{-2x}$$

$$f'''(x) = 2^2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -2^3 \cdot e^{-2x}$$

Yukarıdaki gibi devam edilirse tek mertebeli türevlerde (-), çift mertebeli türevlerde (+) işaretli sonuçlar çıkmakta ve her defasında 2 nin kuvveti 1 artmaktadır.

Buna göre, 20. mertebeden türev şöyledir.

$$f^{(20)}(x) = 2^{20} \cdot e^{-2x}$$

ÖRNEK 3

$$f(x) = \sin 2x$$

olduğuna göre, $f^{(18)}(x)$ neye eşittir?

Çözüm

$$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x$$

$$f''(x) = -2 \cdot 2 \cdot \sin 2x = -2^2 \cdot \sin 2x$$

$$f'''(x) = -2^2 \cdot 2 \cdot \cos 2x = -2^3 \cdot \cos 2x$$

$$f^{(4)}(x) = -2^3 \cdot (-2) \cdot \sin 2x = 2^4 \cdot \sin 2x$$

$$f^{(5)}(x) = 2^5 \cdot \cos 2x$$

Yukarıdaki gibi devam edilirse her 4 türevde bir başa dönülmekte ve 2 nin kuvveti her defasında 1 artmaktadır.

İşaret 4 türevde bir (+), (-), (-), (+) düzeninde devam etmektedir.

Buna göre 18. mertebeden türev şöyledir;

$$f^{(18)}(x) = -2^{18} \cdot \sin 2x$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $y = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 2$

olduğuna göre, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $10x^2 - 5x$ B) $120x^2 + 2$ C) $40x^3 - 18$
D) $120x^2 - 18$ E) $40x^3 - 18x$

2. $f(x) = \cos x$

olduğuna göre, $f^{(100)}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 1 B) $\cos x$ C) $\sin x$ D) $-\cos x$ E) $-\sin x$

3. $f(x) = e^{-3x}$

olduğuna göre, $f^{(27)}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-3^{27} \cdot e^{-3x}$ B) $3^{27} \cdot e^{-3x}$ C) $-3^{36} \cdot e^{-3x}$
D) $3^{36} \cdot e^{-3x}$ E) $27! \cdot e^{-3x}$

4. $f(x) = \sin 3x$

olduğuna göre, $f^{(25)}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-3^{25} \cdot \cos 3x$ B) $-3^{25} \cdot \sin 3x$ C) $3^{25} \cdot \sin 3x$
D) $3^{25} \cdot \cos 3x$ E) $-3^{26} \cdot \cos 3x$

1) D 2) B 3) A 4) D

5. $f(x) = \ln x$

olduğuna göre, $f^{(50)}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{49!}{x^{50}}$ B) $\frac{48!}{x^{49}}$ C) $-\frac{49!}{x^{50}}$ D) $-\frac{50!}{x^{50}}$ E) $\frac{50!}{x^{50}}$

6. $\frac{d^2}{dx^2}(\cos^2 4x)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $32 \cdot \cos 8x$ B) $-32 \cdot \cos 8x$ C) $32 \cdot \sin 8x$
D) $-32 \cdot \sin 8x$ E) $-32 \cdot \cos 4x$

7. $e^{-x} \cdot \frac{d^2}{dx^2}(x^4 \cdot e^x)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $x^4 + 12x$ B) $x^4 + 4x^3$ C) $x^4 + 12x^2$
D) $x^4 + 8x^3 + 12x^2$ E) $x^4 + 8x^2 + 12$

8. $f(x) = x \cdot (1 - \ln x)$

olduğuna göre, $f^{(12)}(1)$ kaçtır?

- A) $-12!$ B) $-10!$ C) $-14!$ D) $10!$ E) $12!$

5) C 6) B 7) D 8) B



ADIM



TÜREV SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin var olabilmesi için o noktada;

- Sürekli olmalı
- Sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit olmalıdır.

DİKKAT !

BİR FONKSİYONUN;

- süreksiz olduğu noktalarda
- tanımsız olduğu noktalarda
- tanımlı olabileceği en geniş aralığın uç noktalarında

TÜREVİ YOKTUR.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?

Çözüm

İki noktada türevi yoktur. Bunlar $x = 3$ ve $x = -3$ noktalarıdır. Bu noktalar paydayı sıfır yaptığından fonksiyon bu noktalarda tanımsızdır.

ÖRNEK 2

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + \sqrt{3-x}$$

fonksiyonunun $(-6, 6)$ aralığında kaç tam sayı değeri için türevi yoktur?

Çözüm

$$\sqrt{3-x} : 3-x \geq 0 \text{ olduğundan } (-\infty, 3]$$

$$\ln x : x > 0 \text{ olduğundan } (0, \infty) \text{ aralığında tanımlanır.}$$

Fonksiyonda kesirli ifadenin paydasını sıfır yapan, logaritmik ifadenin içini sıfır ve sıfırdan küçük yapan ve kareköklü ifadenin içini sıfırdan küçük ve sıfıra eşit yapan x değerleri için türev yoktur.

Buna göre, $(-6, 6)$ aralığındaki tam sayı olan $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5\}$ değerleri için $f(x)$ in türevi yoktur.

ÖRNEK 3

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 2 \\ x^2 & x \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?

Çözüm

Bu şekildeki bir soruda önce parçalı fonksiyonun kritik noktasında sürekli olup olmadığı araştırılır.

HATIRLATMA



$x = a$ da süreklilik şartı

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Bu hatırlatma yardımıyla

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

olduğundan $f(x)$, $x = 2$ de süreklidir. Şimdi $f(x)$ in kritik noktasında sağ ve sol türevlerini araştıralım.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2)' = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2)' = 4 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)$$

$x = 2$ de sağdan türev, soldan türeve eşit olmadığından bu noktada TÜREV YOKTUR. Soruda verilen parçalı fonksiyonun denklemleri polinom olduğundan fonksiyon, 2 dışındaki diğer noktalarda sürekli ve türevlidir.

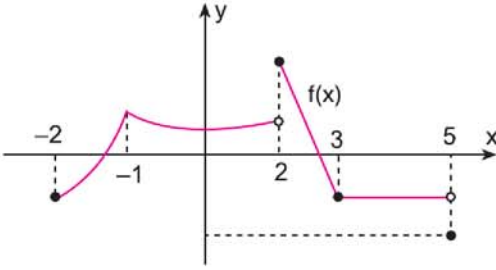
DİKKAT !

BİR ARALIKTA TÜREVLENEBİLME

Bir f fonksiyonunun $a < x < b$ aralığının bütün noktaları için türevi mevcut ise fonksiyon bu aralıkta türevlenebilirdir. Özel olarak bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında türevlenebilmesi için fonksiyonun (a, b) aralığında türevlenebilir ve $f'(a^+)$ ile $f'(b^-)$ mevcut olması gerekir.

Örneğin: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[1, 4]$ aralığındaki (uç noktalar dahil) tüm değerler için türevlidir. Fakat, bu fonksiyonun tanımlanabileceği en geniş aralık olan $[0, \infty)$ aralığının uç noktalarında türevi yoktur.

ÖRNEK 4



$f'(-2^+)$ ve $f'(5^-)$ var olmadığı bilindiğine göre, yukarıdaki grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu $[-2, 5]$ aralığında kaç noktada türevsizdir?

Çözüm

Grafikte türevin varlığı incelenirken, sivri noktalarda, süreksiz noktalarda türev yoktur.

Buna göre,

- $x = -2$ ve $x = 5$ için; -2 de sağdan, 5 te soldan türev var olmadığından,
- $x = -1$ ve $x = 3$ te sivri nokta olduğundan,
- $x = 2$ için süreksiz nokta olduğundan

bu noktalarda türev yoktur.

Yani $f(x)$ toplam 5 noktada türevsizdir.

ÖRNEK 5

$$f(x) = \begin{cases} x + a & x > 1 \\ 2x^2 - bx & x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 1$ de türevli olduğuna göre, a, b çarpımını kaçtır?

Çözüm

- $x = 1$ de fonksiyon türevli ise sürekli olmalıdır.

O halde

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - bx) \text{ olduğundan}$$

$$1 + a = 2 - b \text{ ise } a + b = 1 \quad \dots (*)$$

- $x = 1$ de fonksiyon türevli ise bu noktada sağdan türev, soldan türeve eşit olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a)' = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - bx)'$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x - b) = 4 - b$$

$$1 = 4 - b \text{ ise } b = 3 \text{ olur.}$$

(*) daki sonuca göre,

$$a + b = 1 \text{ olduğundan } a = -2 \text{ olmalıdır.}$$

Buna göre

$$a \cdot b = (-2) \cdot 3 = -6 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 6

$f : \mathbb{R} - \{-3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 9} & x \leq 2 \\ \frac{1}{x - 4} & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun reel sayılarda türevsiz olduğu kaç nokta vardır?

Çözüm

- $x < 2$ için
fonksiyon $x = -3$ te tanımsız olduğundan bu noktada türev yoktur.

- $x > 2$ için
fonksiyon $x = 4$ te tanımsız olduğundan bu noktada türev yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 9} = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 4} = -\frac{1}{2}$$

olduğundan $x = 2$ de $f(x)$ süreksizdir. Bu noktada türev yoktur.

Buna göre, f fonksiyonunun $x = -3$, $x = 2$ ve $x = 4$ olmak üzere üç noktada türevi yoktur.



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2-9}$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsisler toplamı kaçtır?

- A) -6 B) -3 C) 2 D) 3 E) 6

2. $f(x) = \ln(x-2)$

fonksiyonu aşağıdaki x değerlerinden hangisinde türevsizdir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

fonksiyonu aşağıdaki x değerlerinden hangisinde türevsizdir?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

4. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-1}$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsisler toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

1) C 2) A 3) A 4) E

5. $f: \mathbb{R} - \{-1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & x < 2 \\ \frac{1}{x-3} & x \geq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılar kümesinin kaç elemanı için türevsizdir?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6. $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq 1 \\ x^2+a & x > 1 \end{cases}$

fonksiyonu $x = 1$ de türevli olduğuna göre, a kaçtır?

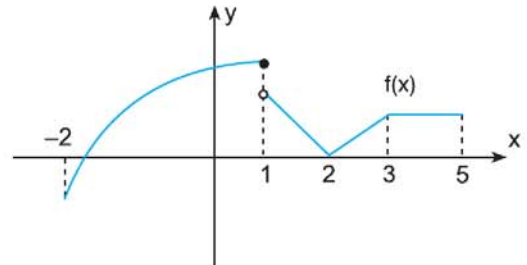
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ için türevi kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

8.



Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun $(-2, 5)$ aralığında türevsiz olduğu noktaların apsisler toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 11

5) B 6) C 7) E 8) C

ADIM



ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Parçalı fonksiyonun türevi araştırılırken türevi istenen nokta **kritik nokta ise sağ ve sol türeve bakılır**. Türevi istenen nokta kritik nokta değilse bu noktada sağ ve sol türev incelemeye gerek yoktur.

Parçalı fonksiyonda kritik noktanın, fonksiyonun parçalandığı yer olduğunu hatırlatalım.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 1 \\ 2x^2-3x & x \leq 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(1) + f'(2) + f'(0)$ toplamı kaçtır?

Çözüm

- **x = 1 de türev araştıralım.**

$f(x)$, $x = 1$ de süreklidir. O halde türev araştırılabilir.

$x = 1$ kritik nokta olduğundan bu noktada sağ ve sol türev incelenmelidir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)' = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2-3x)' = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x-3) = 1$$

$x = 1$ de sol türev, sağ türeve eşittir ve 1 çıkmıştır. O halde $f'(1) = 1$

- **x = 2 de türev araştıralım.**

$x = 2$ de $f(x)$ süreklidir. O halde türev araştırılabilir.

$x = 2$ kritik nokta olmadığından fonksiyonun $x > 1$ olan bölümünde türev incelenir.

$x > 1$ için $f(x) = x - 2$ olduğundan $f'(x) = 1$ ise $f'(2) = 1$ olur.

- **x = 0 da türev araştıralım.**

$x = 0$ da $f(x)$ süreklidir. O halde türev araştırılabilir.

$x = 0$ kritik nokta olmadığından fonksiyonun $x \leq 1$ olan bölümünde türev incelenir.

$x \leq 1$ için $f(x) = 2x^2 - 3x$ olduğundan

$$f'(x) = 4x - 3 \Rightarrow f'(0) = 0 - 3 = -3$$

Buna göre;

$$f'(1) + f'(2) + f'(0) = 1 + 1 - 3 = -1 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 2

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi nedir?

Çözüm

$f(x)$, $x = 1$ de süreklidir. O halde türev araştırılabilir.

$x = 1$ kritik nokta olduğundan bu noktada sağ ve sol türev incelenmelidir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^x - e)' \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x = e \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)' = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$x = 1$ de sağ türev, sol türeve eşit olmadığına göre bu noktada türev yoktur.

ÖRNEK 3

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \\ \sin x & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

Çözüm

Fonksiyon $x = \frac{\pi}{2}$ de sürekli değildir. Çünkü,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$$

$f(x)$ in $x = \frac{\pi}{2}$ için sağ limiti sol limitine eşit çıkmadığından fonksiyon bu noktada sürekli değildir. Fonksiyon bu noktada sürekli olmadığından türevi de yoktur.



ADIM



MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONUN TÜREVİ

Mutlak değerli bir fonksiyonun türevi araştırılırken türevi istenen nokta **kritik nokta ise bu noktada sağ ve sol türev incelenir**. Türevi istenen nokta kritik nokta değilse bu noktada mutlak değer, işarete göre kaldırılarak daha sonra türev alınır.

Mutlak değerli fonksiyonun kritik noktası, mutlak değerini içini sıfır yapan noktadır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = |2x - 6|$$

olduğuna göre, $f'(1)$ ve $f'(3)$ türevlerini bulunuz.

Çözüm

- x = 1 de türev araştıralım.**

$f(x)$, $x = 1$ de süreklidir. O halde türev araştırılabilir.

$x = 1$ kritik nokta değildir.

O halde $x = 1$ için mutlak değer içi negatif olduğundan, $f(x) = 6 - 2x$ olur.

Şimdi türev alalım;

$$f'(x) = -2 \text{ ise } f'(1) = -2 \text{ olur.}$$

- x = 3 de türev araştıralım.**

$f(x)$, $x = 3$ de süreklidir. O halde türev araştırılabilir.

$x = 3$ kritik noktadır. Buna göre sağ ve sol türev incelenmelidir.

x , 3'e sağdan yaklaşırken mutlak değer içi pozitif olduğundan $f(x) = 2x - 6$ olur. Şimdi türev alalım;

$$f'(x) = 2 \text{ ise } f'(3^+) = 2 \text{ olur.}$$

x , 3'e soldan yaklaşırken mutlak değer içi negatif olduğundan $f(x) = 6 - 2x$ olur. Şimdi türev alalım;

$$f'(x) = -2 \text{ ise } f'(3^-) = -2 \text{ olur.}$$

Buna göre;

$f'(3^+) = 2 \neq f'(3^-) = -2$ olduğundan $x = 3$ de türev yoktur.



$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$f(x) = |(ax + b)^n|$$

biçimindeki bir fonksiyonda

$$f(x) = \begin{cases} n = 1 \text{ ise } x = -\frac{b}{a} \text{ için türev} \\ \text{yoktur.} \\ n > 1 \text{ ise } x = -\frac{b}{a} \text{ için türev} \\ \text{sıfırdır.} \end{cases}$$

Yani $f(x) = |(ax + b)^n|$ biçimindeki fonksiyon türlerinde içi sıfır yapan değerler için,

- $n = 1$ ise sağ ve sol türev eşit çıkmadığından türev yoktur.
- $n > 1$ ise içi sıfır yapan x değeri için sağ ve sol türev sıfır çıkar.

ÖRNEK 2

$$f(x) = |x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^3|$$

fonksiyonunun hangi noktalarda türevi yoktur?

Çözüm

Yukarıdaki pratikten yararlanarak soruyu çözelim.

$$f(x) = |x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^3|$$

$$f(x) = |x^2| \cdot |x + 1| \cdot |(x + 2)^3|$$

fonksiyonunda sadece $x = -1$ değeri için türev yoktur.

ÖRNEK 3

$$f(x) = |x^2 - 4| + |x + 3|$$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

$x = 1$ için türevi bulalım.

$x = 1$ kritik nokta olmadığından sağ ve sol türevi incelememize gerek yoktur.

$x = 1$ için önce mutlak değerleri kaldıralım sonra da türev alalım.

$$f(x) = 4 - x^2 + x + 3 = -x^2 + x + 7$$

$$f'(x) = -2x + 1 \text{ ise } f'(1) = -1 \text{ bulunur.}$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

$$1. f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 1 \\ 3x - 2 & x < 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Yoktur

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x > 0 \\ \cos x & x \leq 0 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 2 D) 0 E) Yoktur

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ 3x & x \leq 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(0) + f'(3)$ toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 10 C) 9 D) 6 E) 3

- 1) A 2) B 3) E 4) C

$$5. f(x) = |x^2 - x - 2|$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsisler toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

$$6. f(x) = |2x - 6| + |x^2 - 4|$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsisler toplamı kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 0 D) 3 E) 7

$$7. f(x) = |x(x^3 - 3x^2 - 4x)|$$

fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

$$8. f(x) = |x^2 - 4| + |2x - 3|$$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

- A) 8 B) 6 C) 4 D) 3 E) 0

- 5) C 6) D 7) C 8) A



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

işleminin sonucu neye eşittir?

- A) $f'(-3)$ B) $f'(-1)$ C) $f'(0)$
D) $f'(1)$ E) $f'(3)$

2. $f(x) = x^3 + 3ax$ fonksiyonu veriliyor.

$f'(1) = 6$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 3)^3$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

4. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

5. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) $-\cos 1$ B) $\sin 1$ C) $-\sin 1$
D) $\cos 1$ E) $\sin 1 \cdot \cos 1$

6. $f(x) = \sin(x^2 - 1)$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

7. $f(x) = \tan \frac{x}{2}$

olduğuna göre, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $\sin x$
D) $\frac{1}{\sin 2x}$ E) $\frac{1}{\sin x}$

1) E 2) C 3) B 4) C

5) B 6) A 7) E

8. $\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sec x$ B) $\operatorname{cosec} x$ C) $\sin x$ D) $\cos x$ E) 0

9. $f(x) = e^{\cos x} + \cos x$

olduğuna göre, $\frac{df(x)}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $e^{\cos x} + \cos x$ B) $\sin x(e^{\cos x} + 1)$
 C) $\cos x(e^{\sin 2x} + 1)$ D) $e^{\cos x} + \sin x$
 E) $-\sin x(e^{\cos x} + 1)$

10. $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{\sin x}\right)$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) $-e$ B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

8) A

9) E

10) D

11. $f(e^x + x) = x^3 + x + 1$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

12. $y = \cos \theta$

$\ln \theta = x$

olduğuna göre, $x = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\sin 1$ B) $-\cos 1$ C) $-\sin \theta$
 D) $-\cos \theta$ E) 0

13. $f(x) = e^{-4x}$

fonksiyonunun 20. mertebeden türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $4^{20} \cdot e^{-4x}$ B) $4^{19} \cdot e^{-4x}$ C) $-e^{-4x}$
 D) $-2 \cdot e^{-4x}$ E) $-4^{20} \cdot e^{-4x}$

11) B

12) A

13) A



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

1. $f(x) = \tan x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

2. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -5 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{5}{2}$ E) 5

4. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{-3}$

olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

- A) -15 B) -6 C) -3 D) 3 E) 5

1) E 2) C 3) D 4) B

5. $g(x) = \sin x \cdot \tan x$

olduğuna göre, $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{6}$

6. $f(x) = \sin^2 x$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2\sin x$ B) $2\cos x$ C) $\sin 2x$
D) $\cos 2x$ E) $\tan x$

7. $f(x) = e^{\sin 2x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) e E) $2e$

8. f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

$$f(3x - 1) = g(6x - 3)$$

olduğuna göre, $f'(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $6 \cdot g'(3)$ B) $3 \cdot g'(3)$ C) $3 \cdot g'(2)$
D) $2 \cdot g'(3)$ E) $2 \cdot g'(2)$

5) E 6) C 7) B 8) D

9. $y = a^2 + 2a$

$a^3 = x - 1$

olduğuna göre, $x = 9$ için $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 4 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) -2

10. f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

$f(x) = e^{g(x)}$

$g'(2) = 3$

$g(2) = 2$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) $3e^3$ B) $3e^2$ C) $2e^2$ D) e^3 E) e^2

11. $x > 1$ olmak üzere,

$x = \sqrt{e^y + \sqrt{e^y + \dots}}$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{2x\sqrt{x}}{x^2 - x}$ B) $\frac{2x-1}{x^2 - x}$ C) $\frac{2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$

- D) $\frac{1}{x^2 - x}$ E) $\frac{1}{x - \sqrt{x}}$

9) C

10) B

11) B

12. $f(x) = \ln x^2$

fonksiyonunun 3. mertebeden türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\frac{2}{x^2}$ B) $-\frac{2}{x^3}$ C) $\frac{4}{x^2}$ D) $\frac{4}{x^3}$ E) 0

13. $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$

fonksiyonunun 12. mertebeden türevinin $x = \ln 3$ noktasındaki değeri olan $f^{(12)}(\ln 3)$ kaçtır?

- A) $3^9 \cdot (3^6 + 1)$ B) $3 \cdot (3^{11} + 1)$ C) $11 \cdot 3^{12}$
D) $3^8 \cdot (3^4 + 1)$ E) $3^{12} \cdot (3^3 + 1)$

14. f^{-1} , f in ters fonksiyonudur.

$f(x) = e^{2x} + 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ deki türevi kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) -1

15. $x > 1$ olmak üzere,

$f(x) = x^{(x \ln x^2)}$

olduğuna göre, $x = 2$ için $\frac{df(x)}{dx}$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) $\ln 2$ D) $\ln 4$ E) $\ln 16$

12) D

13) A

14) C

15) E



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu veriliyor.
 $f'(1) + f(-1) - f(0) = 6$
 olduğuna göre, a kaçtır?
 A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 3

2. $f(x) = (x-1)(x-2) - x^2 + 3x - 3$
 olduğuna göre, $f'(5) + f(5)$ toplamı kaçtır?
 A) 0 B) -1 C) 2 D) -2 E) 5

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 4}}$
 olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?
 A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{16}$

4. $y = \frac{x^4 - 1}{(x-1)(x+1)} - 1$
 olduğuna göre, $x = -2$ için $\frac{dy}{dx}$ in değeri kaçtır?
 A) 4 B) 0 C) -4 D) -16 E) -32

1) D 2) B 3) E 4) C

5. $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
 olduğuna göre, $f'(-1) + f(1)$ toplamının değeri kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) -2 E) -4

6. $f(x) = (x-2)^2(x+2)^2$
 olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

A) 12 B) 4 C) 0 D) -4 E) -12

7. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$
 olduğuna göre, $f'(\pi)$ kaçtır?
 A) $-\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{2}{\pi}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

8. $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$
 olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?
 A) 1 B) $\frac{1}{e}$ C) $\frac{2}{e}$ D) e E) e^2

5) E 6) E 7) B 8) B

9. $f(3x - 5) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

olduğuna göre, $f'(-2)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

10. $y = 2u^3 - u^2 + u$

$u = \ln x$

olduğuna göre, $x = 1$ için $\frac{dy}{dx}$ in değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) \sqrt{x} B) x C) $\sqrt{x} - 1$
D) $1 - \frac{1}{x}$ E) $1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

12. $f(x) = |x^2 - 4| + \frac{1}{x^2 - 9}$

fonksiyonu, $(-3, 7)$ aralığında x in kaç tam sayı değeri için türepsizdir?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9) A 10) B 11) E 12) B

13. $f(x) = \frac{1}{x}$

olduğuna göre, $f^{(13)}(1)$ değeri kaçtır?

- A) 14! B) 13! C) 12!
D) -13! E) -12!

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ 2x - a + 1 & x < 1 \end{cases}$

fonksiyonu $x = 1$ için türevlenebilir olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

15. f^{-1} , f fonksiyonunun tersidir.

$f : (-1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

$f(x) = x^2 + 2x + 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $x = 9$ daki türevi kaçtır?

- A) 6 B) $\frac{1}{6}$ C) 0 D) $-\frac{1}{6}$ E) -6

13) D 14) C 15) B



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-4

1. $f(x) = \sqrt{x} + x + \frac{1}{x} + 1$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A)
- $-\frac{1}{2}$
- B) 0 C)
- $\frac{1}{8}$
- D)
- $\frac{1}{4}$
- E)
- $\frac{1}{2}$

2. $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2}$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) -1 B)
- $-\frac{1}{2}$
- C) 0 D)
- $\frac{1}{2}$
- E) 1

3. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

olduğuna göre, $f'(8)$ kaçtır?

- A) -4 B)
- $\frac{1}{3}$
- C)
- $\frac{2}{3}$
- D) 4 E) 8

4. $P(x)$ polinomunun türevi $P'(x)$ dir.

$$P(x) + x.P'(x) = -6x^2 + 2x - 3$$

olduğuna göre, $P'(-1)$ kaçtır?

- A) 7 B) 5 C) 4 D) 2 E) -6

5. $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?

- A) 24 B) 6 C) 4 D) 1 E) 0

6. $f(x) = 2.\sin x.\cos x.\cos 2x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

- A) 4 B) 2 C)
- $\frac{1}{2}$
- D) -2 E) -4

7. $f(x) = \ln(e^x \cdot x)$

olduğuna göre, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- x
- B)
- $x + 1$
- C)
- $\frac{x+1}{x}$
-
- D)
- $\frac{x}{x+1}$
- E)
- $\frac{1}{x}$

1) E

2) E

3) B

4) B

5) A

6) D

7) C

8. Gerçel sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$f(g(x)) = x^4 + 30x + 1$$

$$g(x) = 2x + m$$

$$f'(1) = -1$$

olduğuna göre, m kaçtır?

- A) 5 B) 3 C) 1 D) -2 E) -3

9. Türevlenebilir f , g , h fonksiyonları için

$$h(x) = (f \circ g)(2x)$$

$$g'(2) = g(2) = 1$$

$$f'(1) = 4$$

olduğuna göre, $h'(1)$ kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

10. $\ln \theta = x$

$$y = e^{\theta} \cdot \theta$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $e^{\theta} + 1$ B) $e^{\theta} \cdot \theta + \theta$ C) $\theta^2 + \theta$
D) $e^{\theta} \cdot (\theta^2 + \theta)$ E) $e^{\theta} + \theta$

8) A

9) D

10) D

11. $f(x) = x \cdot e^x$

olduğuna göre, $f^{(21)}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $(x + 21) \cdot e^x$ B) $(x + 22) \cdot e^x$ C) $x \cdot e^x$
D) $-(x + 21) \cdot e^x$ E) $-(x + 22) \cdot e^x$

12. f^{-1} , f fonksiyonunun türevidir.

$$f(x) = 4 \cdot x^{n-5}$$

fonksiyonu için, $f'(x)$ sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(-1)$ kaçtır? ($n \neq 5$)

- A) -8 B) -6 C) -5 D) -4 E) 0

13. f^{-1} , f fonksiyonunun tersidir.

$$f: \mathbb{R} - \{-3, 0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ için türevi kaçtır?

- A) -6 B) -2 C) 1 D) 2 E) 6

11) A

12) D

13) A



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-5

$$1. f(x) = \begin{cases} x+a-1 & x \leq 1 \\ x+2 & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 1$ de türevlenebilen bir fonksiyon olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -1

$$2. f(x) = \begin{cases} 4x & x > 2 \\ x^2 + 4 & x \leq 2 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 8 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases}$$

olduğuna göre, $f'(3) + f'(1)$ toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

$$4. f(x) = |x-2| + |x-1|$$

olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

1) B 2) B 3) D 4) C

$$5. f(x) = \begin{cases} x+a & x > 1 \\ bx+2 & x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 1$ de türevli olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

6. f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

$$g(2x-1) = f\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$f'(1) = 2$$

$$f(1) = 1$$

olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$$7. f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \geq 2 \\ 3x + 1 & x < 2 \end{cases}$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) Yoktur B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

$$8. f(x) = |x^2 - 6x - 7|$$

fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

5) B 6) A 7) D 8) B

9. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsiser toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x - 9}$

fonksiyonu x in kaç tam sayı değeri için türevsizdir?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

11. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x+m}$

fonksiyonu her x reel sayısı için türevlenebilir olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $m < 0$ B) $m < 1$ C) $0 < m < 1$
D) $m > 1$ E) $m > 2$

9) D

10) B

11) D

12. Gerçek sayılarda tanımlı ve her gerçel sayı için türevlenebilen f fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \leq 2 \\ x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

biçiminde veriliyor.

Buna göre, $f(0) - f(4)$ ifadesinin değeri kaçtır?

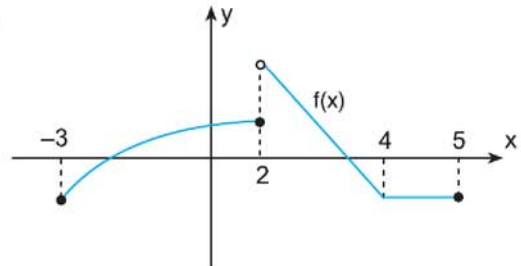
- A) -16 B) -10 C) -4 D) 4 E) 12

13. $f(x) = \ln |x - 2|$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) Yoktur

14.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunun $(-3, 5)$ aralığında türevsiz olduğu noktaların apsiser toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 11

12) B

13) A

14) B



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-6 (ÇÖZÜMLÜ)

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{-3h}$

işlemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $f'(x)$ B) $-f'(x)$ C) $f'(3)$
D) $-\frac{f'(x)}{3}$ E) $\frac{f'(x)}{3}$

2. $P(x)$ polinomunun türevi $P'(x)$ dir.

$P(1) = 5$

$P'(x) = 2x + 3$

olduğuna göre, $P(x)$ in sabit terimi kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $y = (ax + 1)(bx - 1)(cx + 1)(dx - 1)$

olduğuna göre, $x = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ in değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $a + b + c + d$ B) $a + b + c - d$ C) 0
D) $a + c + d - b$ E) $a + c - b - d$

1) E

2) B

3) E

4. $f(x) = (\cos x + \sin x)^3$

olduğuna göre, $f'(\pi)$ kaçtır?

- A) 6 B) 3 C) 0 D) -3 E) -6

5. $f(x) = \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos x}$

olduğuna göre, $f'(\pi)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

olduğuna göre, $f''(0)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 8

7. $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$

olduğuna göre, $f''(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-3 \cdot \sin 3x$ B) $-3 \cdot \cos 3x$ C) $-9 \cdot \sin 3x$
D) $-9 \cdot \cos 3x$ E) $9 \cdot \cos 3x$

4) D

5) D

6) B

7) D

8. $f(x) = \sin x$

$g(x) = e^x - 1$

olduğuna göre, $(f \circ g)'(0)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 1 E) 4

9. $f(x) = \ln x^{\sin x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C)
- $\frac{2}{\pi}$
- D)
- $\frac{\pi}{2}$
- E)
- 2π

10. Türevlenebilir f ve g fonksiyonları için,

$f(x) = x^2$

$g(1) = 1$

$f(g(x) + 7) = 2x^2 + 6$

olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

- A) 0 B)
- $\frac{1}{4}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 1 E) 2

8) D

9) C

10) B

11. $y = \cos t$

$t = \sin x$

olduğuna göre, $x = \pi$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D)
- π
- E)
- 2π

12. f^{-1} , f fonksiyonunun tersidir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $x = 4$ için türevi kaçtır?

- A) -2 B)
- $\frac{1}{12}$
- C)
- $\frac{1}{2}$
- D) 2 E) 4

13. $\frac{d^3}{dx^3}(\sin x \cdot \cot x)$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)
- $-\sin x$
- B)
- $-\cos x$
- C)
- $\sin x$
-
- D)
- $\cos x$
- E)
- $\tan x$

11) A

12) B

13) C



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-6 (ÇÖZÜMLER)

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{-3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(x+h) - f(x))}{-3h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{3h} \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{3}
 \end{aligned}$$

Cevap E

2. P(x) polinomunun 1. türevi $P'(x) = 2x + 3$ olduğuna göre P(x) 2. dereceden bir polinom olmalıdır.

Yani

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ şeklindedir.}$$

O halde

$$P'(x) = 2ax + b = 2x + 3 \text{ olmalıdır.}$$

Buradan $a = 1$, $b = 3$ bulunur.

$$P(x) = ax^2 + bx + c = x^2 + 3x + c$$

P(1) = 5 olduğuna göre

$$P(1) = 1 + 3 + c = 5 \text{ olduğundan sabit terim } c = 1 \text{ olur.}$$

Cevap B

$$3. \quad y = (ax + 1)(bx - 1)(cx + 1)(dx - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ (y nin x e bağılı türevini alalım.)}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= (ax + 1)' \cdot (bx - 1)(cx + 1)(dx - 1) + \\
 &\quad (ax + 1)(bx - 1)' \cdot (cx + 1)(dx - 1) + \\
 &\quad (ax + 1)(bx - 1)(cx + 1)' \cdot (dx - 1) + \\
 &\quad (ax + 1)(bx - 1)(cx + 1)(dx - 1)'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= a \cdot (bx - 1)(cx + 1)(dx - 1) + \\
 &\quad (ax + 1)b \cdot (cx + 1)(dx - 1) + \\
 &\quad (ax + 1) \cdot (bx - 1)c \cdot (dx - 1) + \\
 &\quad (ax + 1)(bx - 1)(cx + 1) \cdot d
 \end{aligned}$$

x = 0 için

$$y' = a \cdot (-1) \cdot (1) \cdot (-1) + (1) \cdot b(1) \cdot (-1) + (1) \cdot (-1) \cdot c \cdot (-1) + (1) \cdot (-1) \cdot (1) \cdot d$$

$$y' = a - b + c - d$$

Cevap E

$$4. \quad f(x) = (\cos x + \sin x)^3$$

$$f'(x) = 3(\cos x + \sin x)^2 \cdot (\cos x + \sin x)'$$

$$f'(x) = 3(\cos x + \sin x)^2 \cdot (-\sin x + \cos x)$$

$$\begin{aligned}
 f'(\pi) &= 3 \left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\sin \pi}_0 \right)^2 \cdot \left(\underbrace{-\sin \pi}_0 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \right) \\
 &= 3 \cdot 1 \cdot (-1) \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

Cevap D

$$5. f(x) = \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos x}$$

Önce $f(x)$ i daha sade hale getirip sonra türev alalım. Kesri ayırırsak;

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$f(x) = \tan x + \cos x$$

Şimdi türev alalım.

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - \sin x$$

$$f'(\pi) = 1 + \underbrace{\tan^2 \pi}_0 - \underbrace{\sin \pi}_0 = 1$$

Cevap D

$$6. f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

Önce $f(x)$ i daha sade hale getirip sonra türev alalım.

$$f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \tan x}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

HATIRLATMA (↻)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{ve} \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

O halde

$$f(x) = \frac{2 \tan x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \tan x \cdot \cos^2 x$$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin 2x}$$

$$f(x) = \sin 2x$$

Şimdi türev alalım.

$$f'(x) = 2 \cos 2x$$

$$f''(x) = 2 \cdot (-2) \cdot \sin 2x$$

$$f''(0) = 0 \text{ olur.}$$

Cevap B

$$7. f(x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$$

Önce $f(x)$ i daha sade hale getirip sonra türev alalım.

HATIRLATMA (↻)

$$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$$

O halde

$$f(x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$$

$$f(x) = \cos(x + 2x) = \cos 3x$$

Şimdi türev alalım.

$$f'(x) = (-3) \cdot \sin 3x$$

$$f''(x) = (-3) \cdot 3 \cdot \cos 3x$$

$$f''(x) = -9 \cdot \cos 3x$$

Cevap D

$$8. f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x - 1$$

$$(f \circ g)'(0) = g'(0) \cdot f'(g(0))$$

olduğuna göre, istenenleri bulalım.

$$g(x) = e^x - 1 \quad \text{ise} \quad g(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$g'(x) = e^x \quad \text{ise} \quad g'(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \cos x$$

$$f'(g(0)) = f'(0) = \cos 0 = 1$$

Bulduklarımızı yerine yazalım.

$$(f \circ g)'(0) = g'(0) \cdot f'(g(0)) = 1 \cdot 1 = 1$$

Cevap D



9. $f(x) = \ln x^{(\sin x)}$

Önce $f(x)$ i daha sade hale getirip sonra türev alalım.

HATIRLATMA



$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

O halde

$$f(x) = \sin x \cdot \ln x \text{ olur.}$$

Şimdi bu çarpımın türevini alalım.

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cdot \ln \frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cdot \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Cevap C

10. $f(x) = x^2$ ve $g(1) = 1$ dir.

$$f(g(x) + 7) = 2x^2 + 6$$

bileşke türev bilgisini kullanarak eşitliğin her iki yanının türevini alalım.

$$(g(x) + 7)' \cdot f'(g(x) + 7) = (2x^2 + 6)'$$

$$g'(x) \cdot f'(g(x) + 7) = 4x$$

$$x = 1 \text{ için}$$

$$g'(1) \cdot f'(g(1) + 7) = 4$$

$$g'(1) \cdot f'(8) = 4$$

$$f(x) = x^2 \text{ ise } f'(x) = 2x$$

$$\text{Buradan } f'(8) = 16 \text{ elde edilir.}$$

$$g'(1) \cdot f'(8) = 4 \text{ ise } g'(1) = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Cevap B

11. $y = \cos t$, $t = \sin x$

$t = \sin x$ olduğundan $y = \cos(\sin x)$ yazabiliriz.

Öncelikle $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

Şimdi elde ettiğimiz tekrar türevini alarak $\frac{d^2y}{dx^2}$ yi bulalım.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= (-\sin(\sin x) \cdot \cos x)' \\ &= -\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x + \sin(\sin x) \cdot \sin x \end{aligned}$$

$x = \pi$ için

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=\pi} = (-1) \cdot \cos(0) \cdot (-1) + 0 = -1 \text{ bulunur.}$$

Cevap A

12. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$

fonksiyonunun öncelikle tersini bulalım.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 4$$

$$f(x) = (x-1)^3 - 4$$

$$(x-1)^3 - 4 = y \Rightarrow (x-1)^3 = y+4$$

$$(x-1)^3 = y+4$$

$$x-1 = \sqrt[3]{y+4}$$

$$x = \sqrt[3]{y+4} + 1$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4} + 1 \text{ dir.}$$

Şimdi bulduğumuz f^{-1} fonksiyonun türevini bulalım.

$$\left(\sqrt[3]{x+4} + 1\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x+4)^{-\frac{2}{3}}$$

Buna göre, f^{-1} in $x = 4$ için türevi

$$= \frac{1}{3} \cdot (8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} \text{ bulunur.}$$

Cevap B



13. $\frac{d^3}{dx^3}(\sin x \cdot \cot x)$

Üç kez türev almadan önce ifadeyi sade hale getiririm.

$$\sin x \cdot \cot x = \cancel{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = \cos x$$

Türevini alacağımız ifadeyi $y = \cos x$ biçiminde yazalım.

Şimdi üç kez türev alalım.

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''' = \sin x$$

Cevap C





Limit Problemlerinde
Türevin Pratik Olarak Kullanılması
(L'Hospital Kuralı)

L' hospital Kuralı Hakkında

Bu bölümde müfredattan kaldırılan L' Hospital kuralını ele aldık. Evet kural müfredattan kaldırıldı ancak bu durum kuralın limit problemlerinde pratik olarak kullanılmasına engel değildir. Kural bir çok limit problemini türev yardımıyla kolaylaştırmaktadır. Zaten sınav sisteminde kullanılan pratikler müfredatın bir parçası olmak zorunda değildir. Limit konusunu iyi öğrenmiş birinin sınav içerisinde bir limit sorusunda burada anlatacağımız pratik kuralı uygulamak mümkün olabiliyorsa soruyu bu pratik yolla çözmesi, zaman kazanması açısından çok daha mantıklı olacaktır. **Ancak burada atlanmaması gereken bir nokta var; kural tüm limit problemlerine uygulanır, tüm limit problemleri bu kural yardımıyla çözülür yanılığısına düşülmemelidir.** Yukarıda da belirttiğimiz gibi öncelikle limit konusunun iyice kavranmış olması gerekmektedir.

Bu bölümde yer alan tüm soruların müfredat içerisinde yer alan limit konu bilgisiyle de çözülebileceğini belirtelim.

Konunun faydalı olması dileğiyle...

ADIM



LİMİT PROBLEMLERİNDE TÜREVİN PRATİK OLARAK KULLANILMASI (L'Hospital Kuralı)

Bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki limitini hesaplanırken $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaşırsa pratik çözüm olarak L'Hospital Kuralı uygulanarak belirsizlik kaldırılabilir.

L'Hospital Kuralı'na göre,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{eşitliği yazılabilir.}$$

Yani limit işleminde yukarıdaki belirsizliklerle karşılaşırsa pay ve paydanın **ayrı ayrı** türevleri alınıp limit işlemindeki belirsizlik giderilebilir.

ÖNEMLİ UYARI

Eğer L'Hospital 1. kez uygulanıp yine $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ elde ediliyorsa aynı şekilde L'Hospital kuralı tekrarlanır.

Limitte $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği giderilinceye kadar bu işleme devam edilir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

işleminin sonucu neye eşittir?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L'Hospital kuralı uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

DİKKAT !

L' Hospital kuralı $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olan bir limit probleminde her zaman kısa yol sunmaz. Belirsizlikleri gidermede öncelikle limit konusunda öğrendiğimiz bilgilere başvurulması daha doğru olur. Aşağıda Örnek 2 de bu durum açıkça görülmektedir. Limit konusunda öğrendiğimiz bilgi çok daha kısa bir çözüm sunar.

ÖRNEK 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{x \cdot \sin x} \quad \text{işleminin sonucu neye eşittir?}$$

Çözüm

Limit işleminde $\frac{0}{0}$ belirsizliği bulunmaktadır.

L'hospital kuralı ile çözüm yapabiliriz. Ancak bu soruda kural iki kez uygulanmak zorundadır. Süre ve işlem açısından çözüm uzar.

Bunun yerine limit konusunda öğrendiğimiz bilgilerle yapacağımız çözüm çok daha kısa olur.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{x \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{x} \cdot \frac{\tan 2x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

ÖRNEK 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{işleminin sonucu neye eşittir?}$$

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L'Hospital kuralı uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 7}{2x - 2} = -\frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{x + \sin x}$$

İşleminin sonucu nedir?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

L'Hospital kuralı uygulanabilir. Kuralı uygulamadan önce limiti alınan ifadeyi trigonometrideki yarım açı formülleri yardımıyla daha sade hale getirelim.

HATIRLATMA



$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2} \cdot \cos 2x}{x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{2}}{2(x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4(x + \sin x)} \end{aligned}$$

Şimdi L'Hospital uygulayalım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \cos 4x}{4 \cdot (1 + \cos x)} &= \frac{4 \cos 0}{4(1 + \cos 0)} \\ &= \frac{4}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 5

$f(x) = x^3 - 6x + 2$ olduğuna göre

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-4) - f(2)}{2x-4} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-4) - f(2)}{2x-4} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L'Hospital kuralı uygulanabilir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-4) - f(2)}{2x-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot f'(3x-4)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot f'(2)}{2} \dots (*) \end{aligned}$$

Şimdi $f'(2)$ değerini bulalım.

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 \text{ olduğuna göre, } f'(x) = 3x^2 - 6$$

O halde $f'(2) = 6$ bulunur.

Bulduğumuz bu değeri sonuçta (*) yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(3x-4) - f(2)}{2x-4} &= \frac{3 \cdot f'(2)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 6

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$$

İşleminin sonucu neye eşittir?

Çözüm

Bu tür sorulara türevin tanımı bölümünde de biraz değinmiştik. Bu tür soruların tümü; $\frac{0}{0}$ belirsizliğini sağlıyorsa, L'Hospital yardımıyla kolayca çözülebilir.

Şimdi sorumuzu çözelim.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} &= \frac{f(2) - f(2)}{0} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Şimdi L'Hospital kuralını uygulayalım.

(Değişken h olduğundan türev h ye göre alınacaktır.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) - (-1) \cdot f'(2-h)}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+0) + f'(2-0)}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2) + f'(2)}{2} = \frac{2f'(2)}{2} = f'(2)$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{3x + 3}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{12}{5}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{3x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 3 B) 1 C) $-\frac{1}{3}$ D) 0 E) -1

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\frac{3}{2}$

1) C 2) B 3) D 4) C

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) π^2 B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) 1 E) $-\frac{\pi}{2}$

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{2x+2} + e^{x+1} - 2}{e^{2x+2} - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) ∞

7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5-2h)}{h}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $f'(5)$ B) $-f'(5)$ C) $3 \cdot f'(5)$
D) $f'(0)$ E) $3 \cdot f'(0)$

8. $f(x) = x^2 - x + 5$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1) - f(3)}{x-1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

5) E 6) D 7) C 8) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) 0 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x - a}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan x}{\sin x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 2

1) C 2) A 3) C 4) E

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{x + \sin x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) -1

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x)}{\ln(3x^2)}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2+h)}{h}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $f'(0)$ B) $f'(1)$ C) $f'(2)$
D) $f'(3)$ E) $f'(4)$

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{x - \frac{\pi}{2}}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

5) D 6) D 7) C 8) A



9. $f(x) = x^2 + 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5-h)}{h}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -10 B) -5 C) 0 D) 10 E) 20

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^6 - 1)^2}{x^2 - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 6 E) 12

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin(\pi x)}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\pi$ B) $-\frac{3}{\pi}$ C) $-\frac{1}{\pi}$ D) 0 E) $\frac{3}{\pi}$

9) E

10) A

11) B

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + \cos x}{x^2} \right)$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) π E) ∞

13. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 9 B) 6 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \cos x + \sin(\sqrt{x})}{x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) ∞

12) A

13) C

14) E

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

1. $\lim_{x \rightarrow y} \frac{xy - y^2}{x - y}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-y$ B) 0 C) y D) $2y$ E) xy

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-1 + \cos x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x}{x^2 + x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot x}{\sin 2x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

1) C 2) A 3) C 4) C

5. $f(x) = 2e^x$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{2h}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-e^2$ B) $-e$ C) e D) e^2 E) $2e^2$

6. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{3h}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2 - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) π E) 2π

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin x + x \cos x} = 2$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

5) A 6) E 7) A 8) D



$$9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{x - \frac{\pi}{4}} \right]$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^{3x} + e^x - 2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

11. $f(x) = x^2 - 3x$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h+3) - f(3)}{3h}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 0 E) -3

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{\sin x}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x}{x - \pi}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 1 E) 3

14. $f(x) = x + 2x + 3x + \dots + nx$

olduğuna göre,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(x)}{n}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{x}{2}$ D) $\frac{2}{x}$ E) x

$$15. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos x - \sin x}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\sqrt{2}$ B) -1 C) 1 D) 2 E) $2\sqrt{2}$

9) B 10) D 11) A 12) C

13) A 14) C 15) E



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 1)^4 - 16}{(e^x + 1)^6 - 64}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x^3 + 3x - 4}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{6}$ E) 6

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^4 x - \cos^4 x}{1 - \cos 2x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 4

1) E

2) B

3) D

4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan \pi x}{x - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) π B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

5. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 + \sin^2 \alpha}{\alpha^2 \cdot \sin^2 \alpha}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) 1 E) ∞

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\cot\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) π B) 1 C) 0 D) -1 E) $-\frac{2}{3\pi}$

4) A

5) E

6) E



7. $f(x) = x^4 + x^2 + 2$ ve $g(x) = -x + 1$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)(x) - x^2}{x - 2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

8. a ve b birer gerçel sayıdır.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + 1} = 2b$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) -7 B) -1 C) 0 D) 1 E) 7

9. $f(x) = \sin x + \cos x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 1}{x}$$

işleminin sonucu kaçtır?

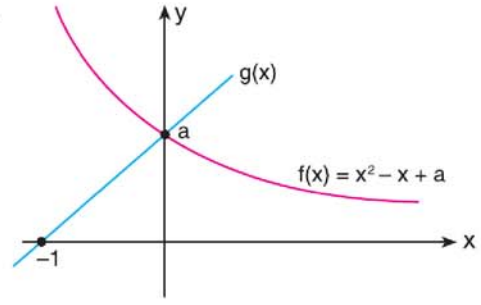
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7) E

8) B

9) E

10.



Yukarıdaki grafikte $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - g^2(x)}{2x}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a B) $2a^2$ C) a^2
D) $a^2 - a$ E) $-a^2 - a$

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots}{x + \sin x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) ∞

12. $f(x + y) = x + y$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{xh - h}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x-1}$ C) 0 D) 1 E) x

10) E

11) D

12) C

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-4
(ÇÖZÜMLÜ)

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot \cos x + x - 1}{x^2 - x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) -1

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) ∞ B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

1) E

2) D

3) D

4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos 2x + 1}{\cos x}$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x^2 + x} = 2$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) $-\frac{1}{2}$

6. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = \sin x$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) + (f \circ g)(x)}{x^2 + x}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4) E

5) A

6) B



7. $f(x) = x^2 + 2x$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+1) - f(1)}{6h}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 6

8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ olduğuna göre

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -2 E) -4

9. $f(x) = x^4 - 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+2)}{f(x^3)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

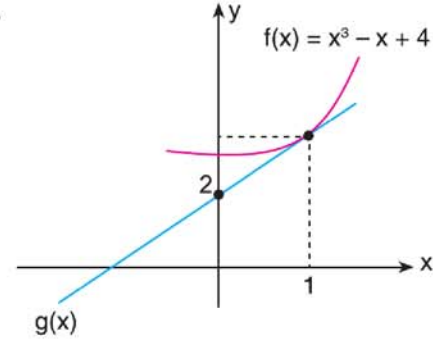
- A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 1

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x+\sin x}{ax}} = 2$$

olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\ln 2}$ C) $\frac{2}{\ln 2}$ D) $\ln 2$ E) 2

- 11.



Yukarıdaki grafikte $g(x)$ fonksiyonu, $x = 1$ apsisli noktada $y = f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - x^2}{g(x) + 2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) -42 B) -40 C) -20 D) 0 E) 21

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{2 \sin x}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 0 E) ∞

7) D

8) A

9) D

10) C

11) C

12) E

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-4 (ÇÖZÜMLER)

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4^2 - 16} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

Cevap E

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \cdot \cos x + x - 1}{x^2 - x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 1 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + 1}{2x - 1} = \frac{0 - 1 + 0 + 1}{0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \text{ bulunur.}$$

Soru pay ve payda çarpanlarına ayrılarak da çözülebilirdi.

Cevap D

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{3e^{3x} - 2e^{2x} + e^x} = \frac{1}{3 - 2 + 1} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Cevap D

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos 2x + 1}{\cos x} = \frac{0 - 1 + 1}{0} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cdot \cos 2x - 2 \sin 2x}{-\sin x} &= \frac{2 \cdot \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 2 \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)}{-\sin \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2 \cos \pi - 2 \sin \pi}{-\sin \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{-2 - 0}{-1} = 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Cevap E

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \cos ax}{2x + 1} = \frac{a \cdot \overbrace{\cos 0}^1}{1} = 2 \text{ bulunur.}$$

O halde a = 2 dir.

Cevap A



$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) + (f \circ g)(x)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x + \sin^2 x}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x + \sin^2 x}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \cos x + 2 \sin x \cos x}{2x + 1} \\ &= \frac{0 - 1 + 0}{0 + 1} = -1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Cevap B

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \frac{f'(1) - f'(1)}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{1} = \frac{f''(1)}{1} = f''(1) \dots (*)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3 \text{ ise}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4 \text{ olduğundan}$$

$$f''(1) = 6 - 4 = 2 \text{ sonuçta (*) yerine yazarsak}$$

$$f''(1) = 2 \text{ bulunur.}$$

Cevap A



$$7. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h+1) - f(1)}{6h} = \frac{f(1) - f(1)}{0} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot f'(3h+1) - 0}{6} = \frac{3 \cdot f'(1)}{6}$$

$$f(x) = x^2 + 2x$$

olduğuna göre,

$$f'(x) = 2x + 2$$

$f'(1) = 4$ tür. O halde

$$\frac{3 \cdot f'(1)}{6} = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2 \text{ olur.}$$

Cevap D

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+2)}{f(x^3)} = \frac{f(1)}{f(-1)} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x+2)}{3x^2 \cdot f'(x^3)} = \frac{f'(1)}{3 \cdot f'(-1)}$$

$$f(x) = x^4 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$

$$f'(1) = 4 \text{ ve } f'(-1) = -4$$

olduğuna göre,

$$\frac{f'(1)}{3 \cdot f'(-1)} = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Cevap D



10.

HATIRLATMA



$$\lim_{x \rightarrow a} k^{f(x)} = k^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Soruda yukarıda verilen hatırlatmayı kullanalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x+\sin x}{ax}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\sin x}{ax}} = 2$$

limitin sonucunun 2 çıkması için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\sin x}{ax} = \ln 2 \text{ olmalıdır. (Çünkü; } e^{\ln 2} = 2 \text{ dir.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\sin x}{ax} = \frac{0}{0} \text{ olduğundan}$$

L' Hospital uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\cos x}{a} = \frac{1+\cos 0}{a} = \frac{2}{a} \text{ olur.}$$

$$\frac{2}{a} = \ln 2 \text{ ise } a = \frac{2}{\ln 2} \text{ bulunur.}$$

Cevap C

11. Öncelikle g(x) fonksiyonunun denklemini bulalım.

Grafiğe bakılırsa g(0) = 2 dir. g nin grafiği doğru olduğundan denklemi g(x) = mx + 2 biçimindedir.

x = 1 için f ve g teğet olduğundan f(1) = g(1) dir.

$$f(1) = g(1) = 1^3 - 1 + 4 = 4 \Rightarrow g(x) = 2x + 2 \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - x^2}{g(x) + 2} = \frac{f^2(-2) - 4}{g(-2) + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 \cdot f(x) \cdot f'(x) - 2x}{g'(x)} \dots (*)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(-2) = 11$$

$$g'(x) = 2 \Rightarrow g'(-2) = 2$$

olduğundan (*) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 \cdot f(x) \cdot f'(x) - 2x}{g'(x)} &= \frac{2 \cdot f(-2) \cdot f'(-2) + 4}{g'(-2)} \\ &= \frac{2 \cdot (-2) \cdot 11 + 4}{2} = -20 \end{aligned}$$

Cevap C

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{2 \sin x} = \frac{0}{0}$$

olduğundan L' Hospital kuralını uygulayalım.

Pay kısmındaki ifadeyi

$$\sqrt{\sin 2x} = (\sin 2x)^{\frac{1}{2}} \text{ şeklinde yazıp türevini alalım.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \cdot (\sin 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \cos 2x}{2 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x} \cdot 2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^+} \\ &= \infty \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Soruyu bir de 2. yol olarak limit konusunda öğrendiğimiz bilgilerle çözelim.

2. yol

Soruyu limit konusunda öğrendiğimiz bilgileri kullanarak da çözebiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Belirsizliği gidermek için pay ve paydayı $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ile çarpalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{\sin 2x}}{2 \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2 \sin x} \right) \text{ şeklinde düzenlersek;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\sin 2x}{x}} \cdot \frac{x}{2 \sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^+}$$

$$= \frac{1}{0^+} = \infty \text{ olur.}$$

Cevap E





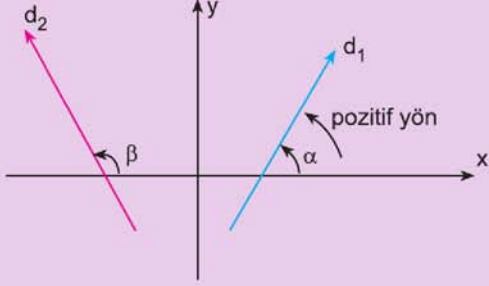
1. Türevin Geometrik Yorumu
2. Birinci Türevin Geometrik Yorumu
3. Maksimum Minimum Problemleri
4. İkinci Türevin Geometrik Yorumu
5. Türevin Fiziksel Anlamı
6. Fonksiyon Grafikleri

ADIM



TÜREVİN GEOMETRİK YORUMUNDA GEREKLİ OLACAK DOĞRUNUN ANALİTİĞİ İLE İLGİLİ HATIRLATMALAR

Bir doğrunun x eksenine pozitif yönde yaptığı açıya eğim açısı, bu eğim açısının tanjantına da eğim denir.



Yukarıda koordinat düzleminde gösterilen

d_1 doğrusunun eğimi; m_1

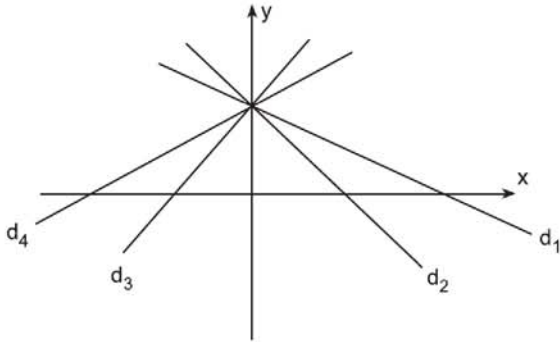
d_2 doğrusunun eğimi; m_2 olmak üzere

$$m_1 = \tan \alpha, m_2 = \tan \beta$$

Şimdi öğrendiğimiz bilgiyi bir örnekle pekiştirelim.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



Yukarıda koordinat düzleminde gösterilen d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularının eğimlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

Eğim, eğim açılarının tanjantına eşittir. Geniş açılardan tanjantları negatif olduğuna göre bu doğruların eğimleri $m_2 < m_1 < m_4 < m_3$ şeklinde sıralanır.

• x eksenine paralel doğruların eğimi sıfırdır.

• İki Noktası Bilinen Doğrunun Eğimi

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen bir doğrunun eğimi m ise,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ dir.}$$

• Eğimi Bilinen Bir Doğrunun Denklemine Yazma

Eğimi m olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen bir doğrunun denklemi şöyledir;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Bu bilgiyi bir örnekle pekiştirelim.

ÖRNEK 2

$A(2, -1)$ noktasından geçen ve x eksenine pozitif yönde 135° lik açı yapan doğrunun denklemi nedir?

Çözüm

$$\text{Eğim} = m = \tan 135^\circ = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ denkleminde}$$

$m = -1$ ve $A(2, -1)$ değerlerini yazalım.

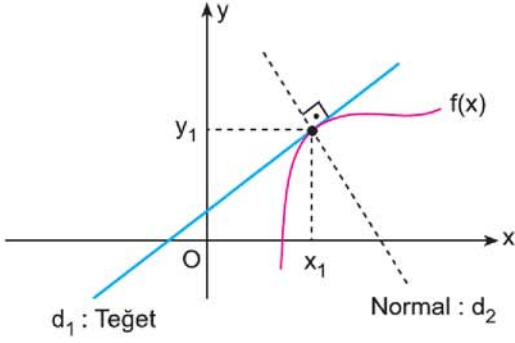
$$y - (-1) = (-1)(x - 2) \text{ olduğuna göre,}$$

$$y + 1 = -x + 2 \text{ ise}$$

$$y = -x + 1 \text{ olur.}$$



- **Bir Teğetin Normalinin Denklemi Bulma**



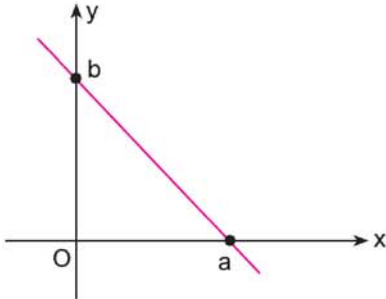
Yukarıda $f(x)$ fonksiyonuna x_1 noktasından çizilen d_1 teğetini bu noktada dik kesen d_2 doğrusuna $f(x)$ in x_1 noktasındaki normali denir.

(x_1, y_1) noktasından geçen eğimi m olan doğrunun normalinin denklemi

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

şeklindedir.

- **Eksenleri Kestiği Noktaları Bilinen Bir Doğrunun Denklemi Bulma**



Yukarıda x eksenini a noktasında, y eksenini b noktasında kesen doğrunun denklemi,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

şeklindedir.

- **Genel Denklemi Verilen Bir Doğrunun Eğimini Bulma**

Bir doğrunun genel denklemi

$ax + by = c$ şeklindedir.

Eğimi bulmak için y yalnız bırakılır.

$$ax + by = c \text{ ise}$$

$$by = -ax + c$$

$$y = \frac{-ax}{b} + \frac{c}{b}$$

Denklemi bu biçimde olan bir doğrunun eğimi x in katsayısıdır.

Yani eğim; $m = -\frac{a}{b}$ olur.

- **Orijinden Geçen Bir Doğrunun Denklemi Bulma**

Eğimi m olan ve başlangıç noktasından yani $O(0, 0)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$y = mx$$

şeklindedir.



- **Birbirine Paralel Doğruların Denklemi**

Birbirine paralel doğruların eğimleri eşittir.

Örneğin;

d_1 doğrusunun denklemi: $y_1 = ax + b$ ise

d_1 doğrusuna paralel olan d_2 doğrusunun denklemi

$y_2 = ax + c$ şeklindedir.

Burada $b \neq c$ olmak zorundadır.

- **Eğimleri Çarpımı -1 Olan Doğrular Birbirine Diktir.**

$d_1 : y = ax + b$, eğimi $= m_1 = a$

$d_2 : y = cx + d$, eğimi $= m_2 = c$

$m_1 \cdot m_2 = a \cdot c = -1$ ise

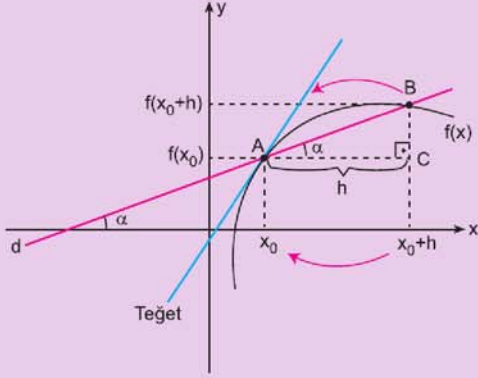
d_1 doğrusu d_2 doğrusuna diktir.



ADIM



TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU



AB doğrusunun eğimi: m_{AB}

$$m_{AB} = \tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

h değeri sıfıra yaklaşırken B noktası $f(x)$ eğrisi üzerinde A ya yaklaşır ve d doğrusu, teğet doğrusunun konumuna gelir.

Bu durumda, d doğrusunun eğiminin h sıfıra giderken limit değeri teğetin eğimine eşit olur.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = m_{teğet}$$

O halde bir fonksiyona bir noktadan çizilen teğetin eğimini dolayısıyla teğetin denklemini türev yardımıyla bulabiliriz.

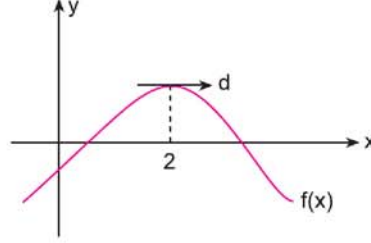
Buraya kadar öğrendiğimizi bir kalıba dönüştürürsek;

Bir fonksiyonun bir $A(x_0, y_0)$ noktasındaki türevi, fonksiyona bu noktadan çizilen teğetin eğimine eşittir.

m_t : Teğetin eğimi ise, $f'(x_0) = m_t$ olur.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



d doğrusu $x = 2$ de $f(x)$ e teğettir.

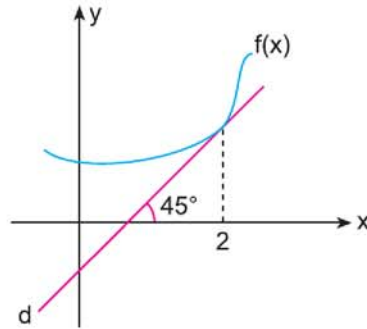
Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonun $x = 2$ için türevini bulalım.

Çözüm

d doğrusu $x = 2$ de $f(x)$ e teğettir. $f(x)$ fonksiyonun $x = 2$ noktasındaki türevi, $f'(2) = 0$ dir.

Çünkü bu noktadan çizilen d doğrusu x eksenine paraleldir. Yani eğim sıfırdır.

ÖRNEK 2



d doğrusu $x = 2$ de $f(x)$ e teğettir.

Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonun $x = 2$ için türevini bulalım.

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonun $x = 2$ noktasındaki türevi, $f'(2) = 1$ dir.

Çünkü $x = 2$ den çizilen d doğrusu x eksenine pozitif yönde 45° açı yaptığından

d doğrusunun eğimi $\tan 45^\circ = 1$ dir.



ADIM**BİR FONKSİYONA BİR NOKTASINDAN ÇİZİLEN TEĞETİN DENKLEMİNİ BULMA**

m_t : $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasından çizilen teğetin eğimi ise bu durumda $m_t = f'(x_0)$ olur.

Bir $f(x)$ fonksiyonuna (x_0, y_0) noktasından çizilen ve eğimi $m_t = f'(x_0)$ olan teğetin denklemi şu şekildedir;

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ADIM PEKİŞTİRME**ÖRNEK 1**

$$f(x) = x^2 + x$$

fonksiyonuna üzerindeki $x = 1$ noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

$f'(1)$; $x = 1$ noktasından çizilen teğetin eğimi olduğuna göre

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \text{ olur.}$$

Yani $x = 1$ den eğriye çizilen teğetin eğimi 3 tür.

ÖRNEK 2

$$f(x) = \cos 2x$$

fonksiyonuna üzerindeki $x = \frac{\pi}{3}$ den çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

O halde $x = \frac{\pi}{3}$ den çizilen teğetin eğim $-\sqrt{3}$ tür.

ÖRNEK 3

$$f(x) = x^2$$

eğrisine $A(1, 1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

Çözüm

$A(1, 1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi

$$y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1) \text{ dir.}$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

Bulduğumuzu teğet denkleminde yerine yazalım.

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 1)$$

$$y = 2x - 1 \text{ teğetin denklemdir.}$$

ÖRNEK 4

$$t = \frac{x-1}{2}$$

$$y = t^3 + 3t + 1$$

olduğuna göre, $g = f(x)$ fonksiyonuna $x = 5$ apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

Türev eğimi verdiğinden $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

Zincir Kuralı yardımıyla eğimi;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (3t^2 + 3) \cdot \frac{1}{2}$$

$x = 5$ için $t = 2$ dir.

O halde $x = 5$ için eğim;

$$(3t^2 + 3) \cdot \frac{1}{2} = (3 \cdot (2)^2 + 3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 5

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?



Çözüm

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$$

$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{x}$$

$$y = (2 - \sqrt{x})^2$$

$$y' = 2 \cdot (2 - \sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

olduğundan $x = 1$ için eğim;

$$2 \cdot (2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 6

$$f(x) = x^2 - 5x + ax$$

fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğeti x eksenine ile pozitif yönde 45° lik açı yaptığına göre a kaçtır?

Çözüm

Teğet x eksenine ile pozitif yönde 45° lik açı yapıyorsa teğetin eğimi 1 dir.

O halde

$x = 1$ noktasındaki teğetin eğimi $f'(1)$ olduğuna göre, $f'(1) = 1$ olmalıdır.

$$\text{Buna göre } f'(x) = 2x - 5 + a$$

$$f'(1) = 2 - 5 + a = 1 \text{ ise}$$

$$a = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 7

f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

$$g'(1) = g(1) = 2$$

olduğuna göre, $f(x) = x^2 \cdot g(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

$x = 1$ deki eğim $f'(1)$ dir.

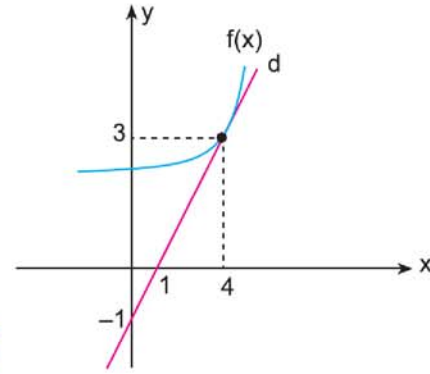
O halde öncelikle f in türevini bulalım.

$$f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$$

$$f'(1) = 2 \cdot g(1) + 1 \cdot g'(1)$$

$$f'(1) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 8



Yukarıdaki grafikte d doğrusu $f(x)$ fonksiyonuna $x = 4$ te teğettir.

Buna göre,

$$g(x) = x^2 \cdot f(2x)$$

fonksiyonuna $x = 2$ apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

$x = 2$ noktasında $g(x)$ fonksiyonuna çizilen teğetin eğimi $g'(2)$ dir.

Buna göre, öncelikle $g(x)$ in türevini bulalım.

$$g'(x) = 2x \cdot f(2x) + x^2 \cdot 2 \cdot f'(2x)$$

$$g'(2) = 4 \cdot f(4) + 4 \cdot 2 \cdot f'(4) \dots (*)$$

Grafik incelenirse $f(4) = 3$ tür. $f'(4)$, d doğrusunun eğimine eşittir.

Grafik incelenirse d doğrusunun eğiminin 1 olduğu görülür.

Buna göre $f'(4) = 1$ dir.

Bulduklarımızı (*) daki sonuçta yerine yazarsak

$$g'(2) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 9

$$y = x^3 + 3x^2 + ax^2 + 1$$

eğrisine üzerindeki $x = 1$ ve $x = -1$ apsisli noktalardan çizilen teğetler birbirine paralel ise a kaçtır?

Çözüm

Teğetler birbirine paralel ise eğimleri eşit olmalıdır. Eğimleri türev yardımıyla bulalım.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 2a$$

$x = 1$ den çizilen teğetin eğimi

$$f'(1) = 3 + 6 + 2a = 9 + 2a$$

$x = -1$ den çizilen teğetin eğimi

$$f'(-1) = 3 - 6 - 2a = -3 - 2a$$

$f'(1) = f'(-1)$ olmalıdır.

$$9 + 2a = -3 - 2a \Rightarrow 4a = -12$$

$$a = -3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 10

$$f(x) = x^3 - 3ax + 1$$

fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğeti $2x - y = 1$ doğrusuna dik olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonuna $x = 1$ den çizilen teğetin eğimi $f'(1)$ dir.

$$f'(x) = 3x^2 - 3a \text{ ise } f'(1) = 3 - 3a \text{ olur.}$$

$f(x)$ fonksiyonuna $x = 1$ den çizilen teğetle $2x - y = 1$ doğrusu birbirine dik olduğuna göre bu iki doğrunun eğimler çarpımı -1 olmalıdır.

$2x - y = 1$ doğrusunun eğimi 2 olduğuna göre,

$$2 \cdot f'(1) = -1 \text{ yani } 2 \cdot (3 - 3a) = -1 \text{ olmalıdır.}$$

$$6 - 6a = -1 \Rightarrow a = \frac{7}{6} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 11

$f(x) = x^3 - 1$ eğrisine üzerindeki $A(1, 0)$ noktasından çizilen teğet, eğriyi başka bir B noktasında kesmektedir.

Buna göre, B noktasının apsisi kaçtır?

Çözüm

$A(1, 0)$ noktasından eğriye çizilen teğetin eğimini bulup bu teğetin denklemini yazalım: $f'(x) = 3x^2$

Teğet $x = 1$ den çizildiğinden eğimi $f'(1) = 3$ olur.

$A(1, 0)$ dan geçen teğetin denklemi

$y - y_1 = m(x - x_1)$ olduğuna göre

$$y - 0 = 3 \cdot (x - 1) \text{ ise } y = 3x - 3 \text{ olur.}$$

Eğrinin denklemini, teğetin denklemine eşitleyerek teğetin eğriyi kestiği diğer noktanın, yani B noktasının apsisini bulalım.

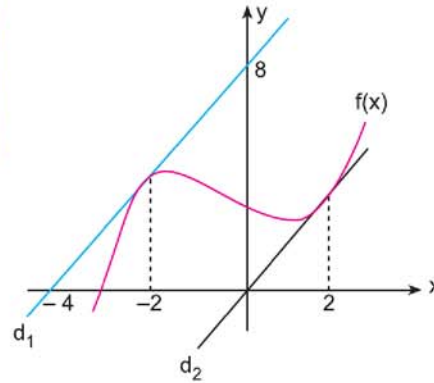
$$x^3 - 1 = 3x - 3 \Rightarrow x^3 - 3x = -2 \Rightarrow x(x^2 - 3) = -2 \text{ olur.}$$

$$x(x^2 - 3) = -2 \text{ denklemi } x = 1 \text{ ve } x = -2 \text{ için sağlanıyor.}$$

$$x = 1; A(1, 0) \text{ noktasına aittir.}$$

O halde B noktasının apsisi $x = -2$ olmalıdır.

ÖRNEK 12



Birbirine paralel d_1 ve d_2 doğruları $f(x)$ e sırasıyla $x = -2$ ve $x = 2$ apsisli noktada teğettir.

Buna göre, $f'(-2) + f(2)$ toplamı kaçtır?

Çözüm

d_1 doğrusunun eğimi 2 olduğundan $f'(-2) = 2$ olmalıdır.

$d_1 \parallel d_2$ olduğundan d_1 doğrusunun eğimi 2 ise d_2 doğrusunun eğimi de 2 olmalıdır. d_2 doğrusu başlangıç noktasından geçtiğinden denklemi $y = 2x$ olmalıdır.

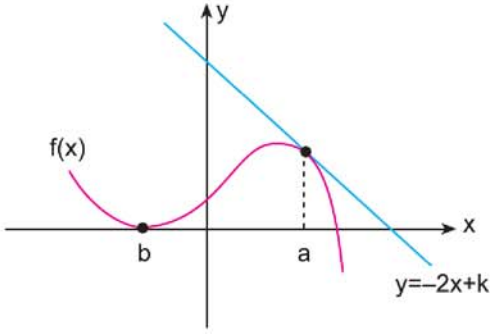
$x = 2$ için d_2 doğrusunda $y = 4$ tür.

f , $x = 2$ için d_2 doğrusuna teğetse $f(2) = 4$ olmalıdır.

O halde $f'(-2) + f(2) = 2 + 4 = 6$ olur.



ÖRNEK 13



Yukarıdaki grafikte $y = -2x + k$ doğrusu $x = a$ noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

$f'(a) + f'(b) = a - 4$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm

$x = a$ da $f(x)$ e çizilen teğet $y = -2x + k$ doğrusu olduğuna göre, $x = a$ da $f'(a)$, teğetin eğimine eşittir.

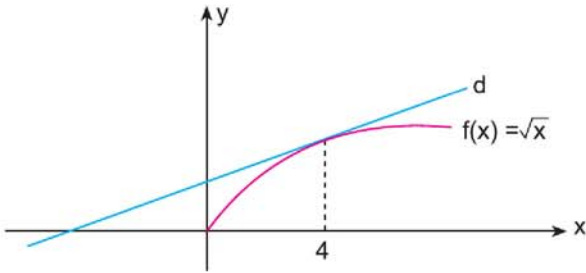
O halde $f'(a) = -2$ dir.

$x = b$ de $f(x)$ e çizilecek teğet x eksenine paraleldir. Teğetin eğimi sıfır olacağından $f'(b) = 0$ dir.

Buna göre, $f'(a) + f'(b) = -2 + 0 = a - 4 \Rightarrow a = 2$ olur.

O halde $f'(2) = f'(a)$ olacağından $f'(2) = -2$ olur.

ÖRNEK 14



Yukarıdaki grafikte d doğrusu $f(x)$ fonksiyonuna $x = 4$ apsisli noktada teğettir.

Buna göre, d doğrusunun denklemi nedir?

Çözüm

Önce d doğrusunun eğimini bulalım.

Doğrunun eğimi m olsun. $m = f'(4)$ olmalıdır.

O halde $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olduğundan

$$f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} = m \text{ olur.}$$

Buna göre, d doğrusu: $y = \frac{1}{4}x + k$ şeklindedir.

Şimdi k yı bulalım.

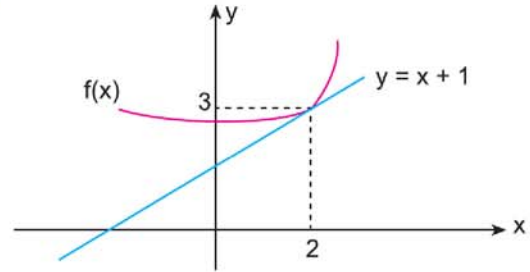
$x = 4$ noktası hem d doğrusuna hem de $f(x)$ e aittir.

O halde $f(4) = \sqrt{4} = 2$ olduğuna göre $x = 4$ için doğrunun y değeri 2 olmalıdır.

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + k \Rightarrow k = 1 \text{ olur.}$$

Buna göre, doğrunun denklemi $y = \frac{1}{4}x + 1$ olur.

ÖRNEK 15



Yukarıdaki grafikte $y = x + 1$ doğrusu $f(x)$ fonksiyonuna $x = 2$ de teğettir.

$f'(x)$, $f(x)$ in türevi olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 3}{x^2 - 2}$ limiti kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 3}{x^2 - 2} = \frac{f'(2) - 3}{2^2 - 2} = \frac{f(2) - 3}{2} \text{ olur.}$$

$x = 2$ de $f(x)$ e çizilen $y = x + 1$ teğetin eğimi 1 olduğundan $f'(2) = 1$ olur.

O halde limitin sonucu $\frac{1-3}{2} = -1$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ-1

1. $y = x^2 - x$

eğrisinin $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

2. $y = x^3 - 2x^2 + x - 5$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

3. $y = x^3 - x^2 + ax + 7$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 5 olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4. $y = e^x \cdot \ln x$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) e^{-1} B) 1 C) \sqrt{e} D) e E) e^2

- 1) A 2) C 3) B 4) D

5. $y = x^2 - x + 1$

parabolünün $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

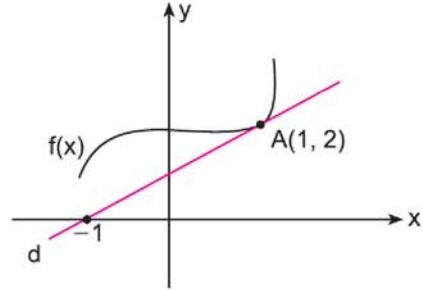
- A) $y = x - 1$ B) $y = 2x - 1$ C) $y = x$
D) $y = 2x$ E) $y = x + 1$

6. $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğeti $y = 3x - 1$ doğrusudur.

$g(x) = x \cdot f(2x)$ olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 11

7.

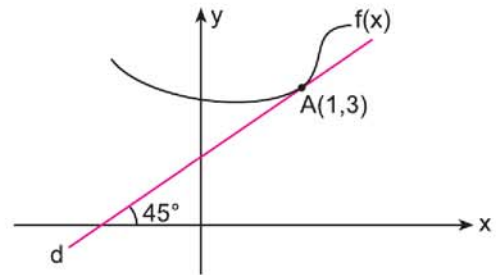


Yukarıdaki grafikte d doğrusu $A(1, 2)$ noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

$g(x) = x \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(1)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.



Yukarıdaki grafikte x eksenine ile pozitif yönde 45° lik açı yapan d doğrusu $f(x)$ fonksiyonuna $A(1, 3)$ noktasında teğettir.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

olduğuna göre, $g'(1)$ değeri kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

- 5) C 6) E 7) C 8) B



9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

fonksiyonuna üzerindeki $x = 1$ ve $x = m$ apsisi noktalarından çizilen teğetler birbirine paralel olduğuna göre, m kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

10. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

fonksiyonuna üzerindeki $x = 3$ ve $x = a$ apsisi noktalarından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre, a kaçtır?

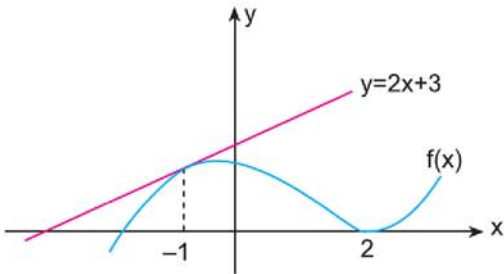
- A)
- $-\frac{1}{4}$
- B)
- $\frac{7}{8}$
- C)
- $\frac{7}{4}$
- D)
- $\frac{3}{2}$
- E) 2

11. $f(x) = x^3$

eğrisinin $x = 1$ apsisi noktasındaki teğeti eğriyi bir başka B noktasında kestiğine göre, B noktasının apsisi kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

12.



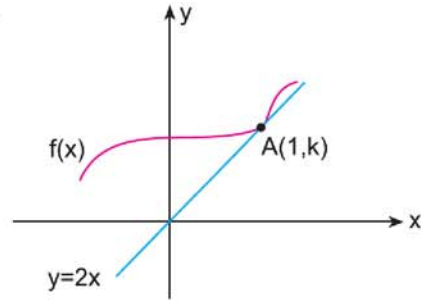
Yukarıdaki grafikte $y = 2x + 3$ doğrusu $x = -1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

Buna göre, $f'(-1) + f'(2) + f(-1)$ toplamı kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

9) A 10) B 11) A 12) D

13.

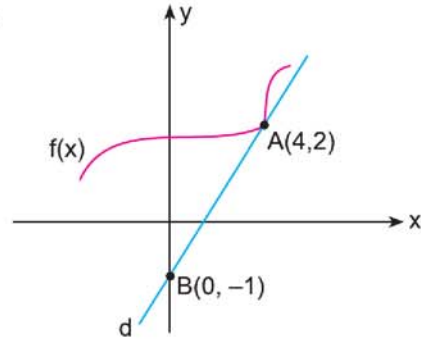


Yukarıdaki grafikte $y = 2x$ doğrusu $A(1, k)$ noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

Buna göre, $f'(1) + k$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

14.

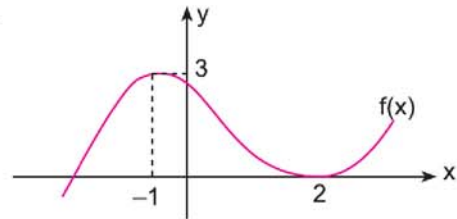


Yukarıdaki grafikte d doğrusu $A(4, 2)$ noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir. $f'(x)$, $f(x)$ in türevidir.

Bu göre, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x) - 2}{x - 2}$ limiti kaçtır?

- A)
- $-\frac{5}{8}$
- B)
- $-\frac{3}{4}$
- C)
- $\frac{3}{2}$
- D) 2 E) 4

15.



Yukarıdaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{f'(x) - 2}{x - 1} + \frac{f'(x + 3)}{x^3 - 1} \right]$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E)
- $-\frac{1}{2}$

13) D 14) A 15) B

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ-2

1. $x^3 - 2xy - 3 = 0$

olduğuna göre, $y = f(x)$ fonksiyonuna $x = 1$ apsisi noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) 3 E) 4

2. $y = \ln x^x$

eğrisinin $x = a$ noktasındaki teğetin eğimi 2 olduğuna göre, a kaçtır?

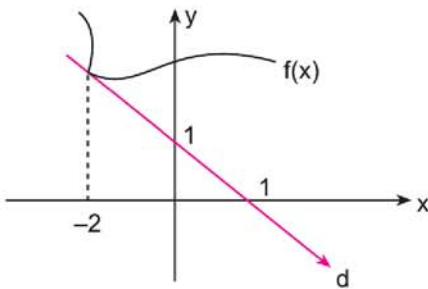
- A) e^{-2} B) e^{-1} C) e D) e^2 E) e^3

3. $y = x^3 - ax^2 + 1$

eğrisine üzerindeki $A(2, 5)$ noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4.



Yukarıdaki grafikte d doğrusu $x = -2$ apsisi noktasında $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine teğettir.

$g(2x) = x.f(x - 1)$ olduğuna göre, $g'(-2)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

1) B 2) C 3) D 4) B

5. $t = \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}$

$$y = t^2 - 7t - 11$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $y = f(x)$ parabolünün tepe noktasının apsisi kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) 1 C) $\frac{11}{6}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 6

6. $y = x^3 - 3ax + 2$

eğrisine üzerindeki $x = 2$ apsisi noktasından x eksenine paralel bir teğet çizilebildiğine göre, a kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

7. $y = -2x^2 + 6x + 1$

parabolünün $2x + y - 3 = 0$ doğrusuna paralel teğetin x eksenini kestiği noktanın apsisi kaçtır?

- A) $\frac{9}{2}$ B) 4 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

5) C 6) D 7) A



8. $y = \frac{\pi}{2} + \sin 2x$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = -2x + \frac{\pi}{2}$ B) $y = -2x$
 C) $y = -2x + \frac{3\pi}{2}$ D) $y = -2x + 2\pi$
 E) $y = -2x + \frac{5\pi}{2}$

9. $y = x^3 - ax^2 - 1$

eğrisine üzerindeki $x = 1$ ve $x = 2$ apsisli noktalardan çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre, a 'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{9}{2}$

10. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{3} + c$

parabolünün $A(6, 4)$ noktasındaki teğetinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

8) C 9) E 10) A

11. $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$

$g(x) = ax^2 + bx - 3$

olduğuna göre, f ve g fonksiyonlarının aynı apsisli noktalarındaki teğetlerinin birbirine paralel olması için $a + b$ toplamı kaç olmalıdır?

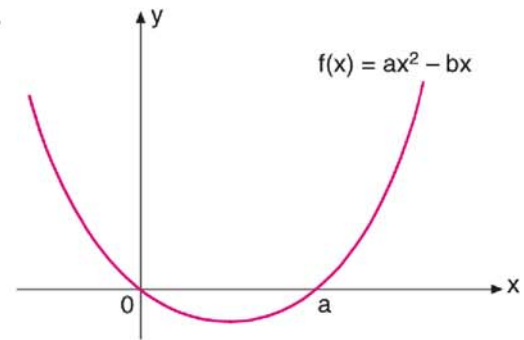
- A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

12. $y = x^3 + ax^2 + bx - 3$

eğrisi $x = -1$ apsisli noktada x eksenine teğet olduğuna göre, bu eğrinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 4x - 2$ B) $y = 4x + 4$ C) $y = 2x + 4$
 D) $y = -4x + 2$ E) $y = -4x - 4$

13.



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ parabolüne üzerindeki $x = 1$ apsisli noktadan çizilen teğet, y eksenini $(0, -1)$ noktasında kesmektedir.

Buna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

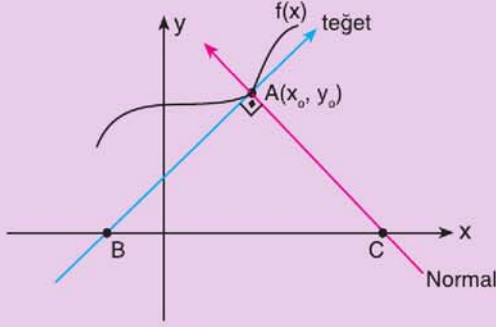
11) C 12) E 13) D



ADIM



BİR FONKSİYONA BİR NOKTASINDAN ÇİZİLEN NORMALİN DENKLEMİNİ BULMA



Yukarıdaki şekilde AB teğet doğrusuna A noktasında dik olan AC doğrusu $f(x)$ in x_0 noktasındaki normalidir. $f(x)$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki teğetinin eğimi $f'(x_0)$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki normalinin eğimi $-\frac{1}{f'(x_0)}$ olur.

O halde, $f(x)$ fonksiyonuna (x_0, y_0) noktasından çizilen normalin denklemi şu şekildedir;

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

fonksiyonuna üzerindeki $x = 1$ apsisli noktadan çizilen normalin eğimi kaçtır?

Çözüm

$-\frac{1}{f'(1)}$: $f(x)$ fonksiyonuna $x = 1$ noktasından çizilen normalin eğimidir.

$f'(x) = 2x + 2$ olduğuna göre, normalin eğimi

$$-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

ÖRNEK 2

$$y = \cos 2x$$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

O halde normalin eğimi

$$-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

bulunur.

ÖRNEK 3

$$f(x) = x^2 - 3x - ax$$

fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki normali $y = 2x + 1$ doğrusuna dik olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

Normal ve teğet birbirine dik olduklarından eğimleri çarpımı -1 dir.

Buna göre, $f(x)$ in $x = 1$ deki normalin eğimi;

$$f'(x) = 2x - 3 - a$$

$$-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2 - 3 - a} = -\frac{1}{-1 - a} = \frac{1}{a + 1} \text{ dir.}$$

$y = 2x + 1$ doğrusunun eğimi 2 olduğuna göre,

$$-\frac{1}{f'(1)} \cdot 2 = -1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{1}{a + 1} \cdot 2 = -1$$

$$2 = -a - 1 \Rightarrow a = -3 \text{ bulunur.}$$



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

eğrisinin üzerindeki $x = 1$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

2. $y = x^2 - 3x - 1$

parabolüne üzerindeki $x = 2$ apsisli noktadan çizilen normalin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $y + x + 1 = 0$ B) $y - x + 5 = 0$ C) $y + x = 0$
D) $y + 2x - 1 = 0$ E) $2y - x + 8 = 0$

3. $y = \ln(2x + 3)$

eğrisine üzerindeki $x = -1$ apsisli noktadan çizilen normalinin y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

4. $y = x \cdot \cos x$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) $-\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) 1 D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

1) B 2) A 3) B 4) B

- 5.
- m
- ve
- n
- sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$y = mx^2 + nx$$

parabolüne, üzerindeki $(1, 2)$ noktasından çizilen normal doğrusu y eksenini $(0, 3)$ noktasında kesmektedir.

Buna göre, $\frac{n}{m}$ oranı kaçtır?

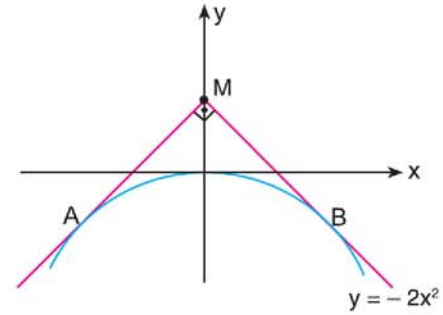
- A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{5}{3}$ E) -3

6. $y = \sin(\sin 2x)$

eğrisine üzerindeki $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktadan çizilen normalin eğimi kaçtır?

- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

- 7.



Yukarıdaki grafikte $y = -2x^2$ parabolü, bu parabol üzerindeki A ve B noktaları ile y eksenini üzerindeki M noktası verilmiştir.

A ve B noktalarından çizilen teğetler M noktasında dik kesiştiklerine göre, M noktasının ordinatı kaçtır?

- A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

5) E 6) C 7) C

ADIM



BİR FONKSİYONUN ARTAN veya AZALAN OLDUĞU BÖLGELERİ
1. TÜREV YARDIMIYLA BULMA

Bir $f(x)$ fonksiyonu

- ▶▶ $f'(x) > 0$ olduğu bölgede artandır.
- ▶▶ $f'(x) < 0$ olduğu bölgede azalandır.
 - ▶ Artan fonksiyonlarda, x değişkeni büyüdükçe y değeri büyür.

Örneğin $f(x)$ artansa; $f(4) > f(3)$

- ▶ Azalan fonksiyonlarda, x değişkeni büyüdükçe y değeri küçülür.

Örneğin $f(x)$ azalansa; $f(1) > f(2)$

- ▶▶ **Fonksiyon grafiği üzerinde artanlığı-azalanlığı yorumlarsak;**

Bir bölgede f in grafiğine çizilen teğetlerin eğimleri pozitifse f , o bölgede artandır.

Çizilen teğetlerin eğimleri negatifse f , o bölgede azalandır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

- I. $f(2) > f(1)$
- II. $f(-3) < f(0)$
- III. $f'(-1) > 0$
- IV. $f'(3) < 0$

$f(x)$ fonksiyonu her x reel sayısı için artan olduğuna göre, yukarıdakilerden hangileri doğrudur?

Çözüm

Bir fonksiyon bir bölgede artansa x değeri büyüdükçe $f(x)$ değeri de büyür ve daima artan olduğu bölgede $f'(x) > 0$ dir.

O halde

- I. $f(2) > f(1)$ f artan olduğundan doğrudur.
- II. $f(-3) < f(0)$ f artan olduğundan doğrudur.
- III. $f'(-1) > 0$ $f(x)$ artan olduğundan 1. türevi her yerde pozitiftir. Yani doğrudur.
- IV. $f'(3) < 0$ f , her x reel sayısı için artan olduğundan $x = 3$ için 1. türevi pozitif olmalı. Bu şık yanlıştır.

ÖRNEK 2

$f(x)$, (a, b) aralığında negatif tanımlı azalan bir fonksiyon olduğuna göre,

$$(a - 2) \cdot f^2(x)$$

fonksiyonunun (a, b) aralığında artan olması için a hangi aralıkta yer almalıdır?

Çözüm

$f(x)$, (a, b) aralığında negatif tanımlı ise bu aralıkta $f(x) < 0$ dir. Bu aralıkta azalan ise $f'(x) < 0$ dir.

$(a - 2) \cdot f^2(x)$ fonksiyonun artan olması için 1. türevi pozitif olmalıdır.

$$\left((a - 2) \cdot f^2(x) \right)' = (a - 2) \cdot 2 \cdot \underline{f(x)} \cdot \underline{f'(x)}$$

olduğundan $(a - 2) \cdot f^2(x)$ fonksiyonunun türevinin pozitif olması için $(a - 2)$ nin pozitif bir reel sayı olması gerekir.

O halde

$$a - 2 > 0$$

$$a > 2 \text{ olmalıdır.}$$

ÖRNEK 3

- I. $f(x) + x$
- II. $-f^3(x)$
- III. $\frac{1}{f(x)}$
- IV. $1 - f(x)$

Değer kümesi pozitif gerçel sayılar olan $f(x)$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta artan olduğuna göre, yukarıdakilerden hangileri aynı aralıkta azalandır?



Çözüm

Bu tür sorularda şıklardaki fonksiyonların 1. türevi bulunup soruda verilen bilgiler 1. türevde kullanılır.

I. $(f(x) + x)' = f'(x) + 1$

f fonksiyonu artan olduğundan $f'(x) > 0$ dir. O halde $f'(x) + 1 > 0$ olur. Bu şıktaki fonksiyon artandır.

II. $(-f^3(x))' = -3.f^2(x).f'(x)$

$f(x)$ artan olduğundan $f'(x) > 0$ dir ve $f^2(x)$ daima pozitiftir. O halde $-3.f^2(x).f'(x) < 0$ olur.

Yani bu şıktaki $-f^3(x)$ fonksiyonu azalandır.

III. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$f(x)$ artan olduğundan $f'(x) > 0$ dir ve $f^2(x)$ daima pozitiftir. O halde $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} < 0$ olur.

Yani bu şıktaki fonksiyon azalandır.

IV. $(1 - f(x))' = -f'(x)$

$f'(x) > 0$ olduğundan $-f'(x) < 0$ olur. Yani bu şıktaki $(1 - f(x))$ fonksiyonu azalandır.

Buna göre, II., III. ve IV. şıklardaki fonksiyonlar azalandır.

ÖRNEK 4

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2kx$$

fonksiyonu daima artan olduğuna göre, k'nın değer aralığı ne olmalıdır?

Çözüm

HATIRLATMA



Her $x \in \mathbb{R}$ için

$ax^2 + bx + c > 0$ eşitsizliğinin geçerli olması için

$\Delta < 0$ ve $a > 0$ olmalıdır.

$f(x)$ fonksiyonu daima artarsa 1. türevi pozitif olmalıdır.

$$f'(x) = x^2 - 4x + 2k > 0 \text{ dir.}$$

Hatırlatmadaki bilgiyi kullanırsak

$$x^2 - 4x + 2k > 0 \text{ olması için } \Delta < 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.2k < 0 \dots\dots \star$$

$$16 - 8k < 0 \Rightarrow 16 < 8k \text{ ise } 2 < k \text{ bulunur.}$$

DİKKAT !

Bu sorunun çözümünde $\Delta \leq 0$ olarak alınmalıdır. Çünkü, bir aralıkta daima artan olan bir fonksiyonun o aralıkta türevi "sonlu sayıda nokta" için sifıra eşit oluyorsa, türevin sifıra eşit çıktığı o noktalar fonksiyonun artanlığını bozamaz. Fonksiyon, aralığın tamamında artan kabul edilir. Azalanlık için de aynı durum söz konusudur.

Yukarıdaki sorunun çözümünde $\Delta = 0$ ı sağlayan tek nokta vardır ve bu nokta fonksiyonun artanlığını bozamaz. Ancak ÖSYM tarafından 1997 de sorulan benzer bir sorunun çözümü için şıklarda $\Delta < 0$ aldığından sınava girecek adaylar düşünülerek çözüm kitapta bu şekilde verilmiştir. Bu soruya benzer sonraki yıllarda çıkacak bir soruda $\Delta \leq 0$ durumunun ÖSYM tarafından dikkate alınacağı kanaatindeyiz.

ÖRNEK 5

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 6$$

fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu aralıkta $f'(x) > 0$ dir. $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$ olduğuna göre, $-3x^2 + 6x + 9 > 0$ için f artandır.

Eşitsizliğin her iki yanını -3 e bölüp $(x - 3)(x + 1) < 0$ eşitsizliğinin işaret tablosunu inceleyelim.

x	-1	3
$(x-3)(x+1)$	+	-

Taralı bölgede yani $(-1, 3)$ aralığında $f(x)$ artandır.

ÖRNEK 6

$$f(x) = \frac{kx+1}{x+k}$$

daima azalan olduğuna göre, k'nın değer aralığı ne olmalıdır?

Çözüm

$f'(x) < 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = \frac{k(x+k) - 1.(kx+1)}{(x+k)^2} = \frac{k^2 - 1}{(x+k)^2}$$

$$= \frac{k^2 - 1}{(x+k)^2} < 0 \Rightarrow k^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < k < 1 \text{ olur.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x)$ fonksiyonu her x reel sayısı için azalan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

- A) $f(3) < f(7)$ B) $f'(-3) > 0$ C) $f'(0) = 0$
D) $f(5) > 0$ E) $f'(6) < 0$

2. $f(x)$ fonksiyonu her x pozitif sayısı için azalan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta daima artandır?

- A) $2.f(x)$ B) $f(x) + 6$ C) $f(x^2)$
D) $-\frac{1}{f(x)}$ E) $-f^3(x)$

3. $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında; negatif tanımlı ve artan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta daima artandır?

- A) $\frac{1}{f(x)}$ B) $\frac{1}{f^2(x)}$ C) $f(x^2)$
D) $f^2(x)$ E) $1 - f(x)$

4. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?

- A) $(-1, 5)$ B) $(-5, 1)$ C) $(-\infty, -1)$
D) $(5, \infty)$ E) $(-3, 1)$

1) E 2) E 3) B 4) A

4. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B) $(0, e)$ C) $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$
D) $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ E) (e, ∞)

6. $f(x) = -x^3 + x^2 - kx$

fonksiyonu daima azalan olduğuna göre, k nın en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. $f(x) = \frac{3x+m}{mx+3}$

fonksiyonu daima artan olduğuna göre, m nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) -1 D) -2 E) -3

8. $f(x) = \frac{ax+4}{4x+a}$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?

- A) $(-4, 4)$ B) $(-\infty, -4)$ C) $(4, \infty)$
D) $(-2, 6)$ E) $(-6, 2)$

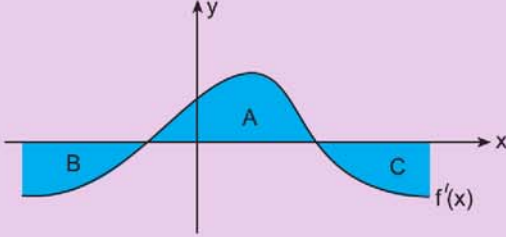
5) C 6) B 7) D 8) A



ADIM



ARTAN VEYA AZALAN FONKSİYONLARIN GRAFİKLE İNCELENMESİ



Yukarıda $f(x)$ in 1. türevinin grafiği verilmiştir. 1. türevin pozitif olduğu bölgede $f(x)$ artan, 1. türevin negatif olduğu yerlerde $f(x)$ azalandır.

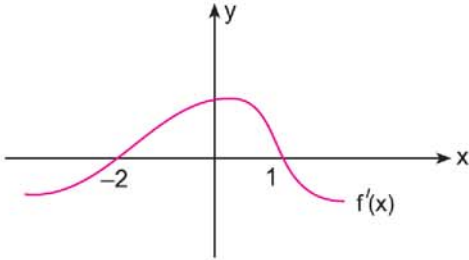
Buna göre;

A bölgesinde $f(x)$ artandır. ($f'(x) > 0$)

B ve C bölgelerinde $f(x)$ azalandır. ($f'(x) < 0$)

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun 1. türevinin grafiği verilmiştir.

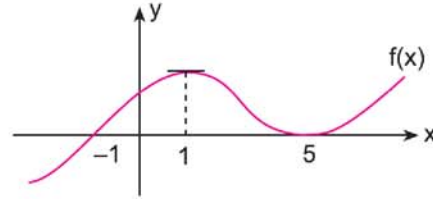
- I. $f(x)$, $(-\infty, -2)$ aralığında azalandır.
- II. $f(-1) < f(0)$
- III. $f(x)$, $(2, 3)$ aralığında azalandır.
- IV. $f(4) > f(3)$

Buna göre, yukarıda verilenlerden hangileri doğrudur?

Çözüm

- I. $f'(x)$ grafiği incelenirse $(-\infty, -2)$ aralığında $f'(x) < 0$ dir. Buna göre $f(x)$ bu bölgede azalandır.
Yani bu şık doğrudur.
- II. $f'(x)$ grafiğinde $(-2, 1)$ aralığında $f'(x) > 0$ dir. Yani $f(x)$ artandır. Artan fonksiyonlarda x büyüdükçe değer büyür.
Yani $f(-1) < f(0)$ doğrudur.
- III. $f'(x)$ grafiğinde $(1, \infty)$ aralığında değerler negatiftir. Yani $f'(x) < 0$ dir. O halde $f(x)$ bu bölgenin tamamında azalandır.
Yani $f(x)$; $(2, 3)$ aralığında azalandır. Doğru.
- IV. $f'(x)$ grafiğinde $(1, \infty)$ aralığında $f'(x) < 0$ olur. O halde $f(x)$ bu bölgenin tamamında azalandır. Azalan bölgede x büyüdükçe değer azalır.
Yani $f(4) > f(3)$ yanlıştır.

ÖRNEK 2



Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

- I. $(-1, 1)$ aralığında $f'(x) > 0$ dir.
- II. $(1, \infty)$ aralığında $f'(x) < 0$ dir.
- III. $f(2) < f(4)$

yargılarından hangileri doğrudur?

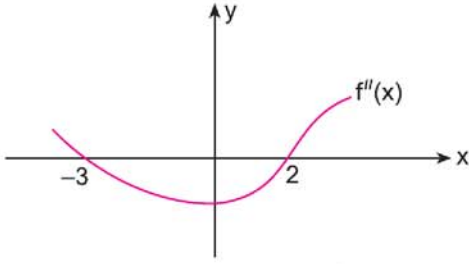
Çözüm

- I. Grafik incelenirse $(-1, 1)$ aralığında $f(x)$ artandır. Dolayısıyla $f'(x) > 0$ olmalıdır. Yargı doğrudur.
- II. Grafikte $(1, 5)$ aralığında $f(x)$ azalan fakat $(5, \infty)$ aralığında $f(x)$ artandır. Dolayısıyla $(1, \infty)$ aralığının tamamında $f'(x) < 0$ olamaz. Yargı yanlıştır.
- III. $(1, 5)$ aralığında $f(x)$ azalandır. Azalan bir bölgede x küçüldükçe değer büyüyecektir. O halde $f(2) < f(4)$ yargısı yanlıştır. Tam tersi olmalıydı.

Buna göre, yalnızca I doğrudur.



ÖRNEK 3



Yukarıda f in 2. türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

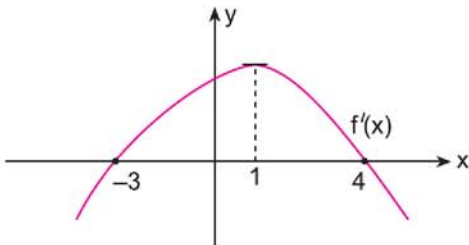
- I. $f'(-4) > f'(-5)$
- II. $f'(x)$, $(-3, 2)$ aralığında azalandır.
- III. $f'(5) < f'(4)$

Çözüm

Bu örnekte $f''(x)$ grafiğinden yararlanarak $f'(x)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu durumları inceleyeceğiz.

- I. $f''(x)$ grafiği incelenirse $(-\infty, -3)$ aralığında $f''(x) > 0$ dir. O halde $f'(x)$ bu bölgede artandır. Artan olduğundan x büyürse $f'(x)$ değeri de büyür. Buna göre, $f'(-4) > f'(-5)$ doğrudur.
- II. $f''(x)$ grafiği incelenirse $(-3, 2)$ aralığında $f''(x) < 0$ dir. Yani $f'(x)$ bu bölgede azalandır. Bu şık da doğrudur.
- III. $f''(x)$ grafiği incelenirse $(2, \infty)$ aralığında $f''(x) > 0$ dir. O halde $f'(x)$ bu bölgede artandır. Artan olduğundan $f'(5) > f'(4)$ olmalıdır. Bu şık yanlıştır.

ÖRNEK 4



Yukarıda f in 1. türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- I. $f''(3) > 0$
- II. $f''(-2) > 0$
- III. $f''(0) > f''(2)$

Çözüm

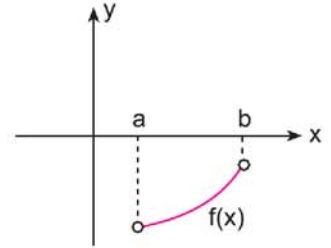
- I. $f'(x)$, $(1, \infty)$ aralığında azalan olduğundan $f''(3) < 0$ olmalıdır. Bu şık yanlıştır.
- II. $f'(x)$, $(-\infty, 1)$ aralığında artan olduğundan $f''(-2) > 0$ olmalıdır. Bu şık doğrudur.
- III. $f'(x)$, $(-\infty, 1)$ aralığında artan olduğundan $f''(0) > 0$ dir.

$f'(x)$, $(1, \infty)$ aralığında azalan olduğundan $f''(2) < 0$ dir. O halde $f''(0) > f''(2)$ doğrudur.

Buna göre, II ve III doğrudur.

ÖRNEK 5

Yanda $f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki grafiği verilmiştir.



Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- I. $x \cdot f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında daima artandır.
- II. $f^3(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında negatif tanımlı ve artandır.

Çözüm

Grafik incelenirse $f(x)$, (a, b) aralığında negatif değerler alır ve artan bir fonksiyon olduğundan $f'(x) > 0$ olmalıdır.

O halde bu bilgileri şıklarda kullanalım.

- I. $x \cdot f(x)$ fonksiyonunun artan olup olmadığını anlamak için türevini alalım. $x \in (a, b)$ olmak üzere,

$$(x \cdot f(x))' = \underbrace{1 \cdot f(x)}_{-} + \underbrace{x \cdot f'(x)}_{+}$$

olduğundan türevin sonucunun pozitif mi ya da negatif mi olduğu anlaşılabilir. $x \cdot f(x)$ fonksiyonu daima artandır diyemeyiz. Bu şıkta "daima artandır" şeklinde kesin bir cevap belirtemeyiz.

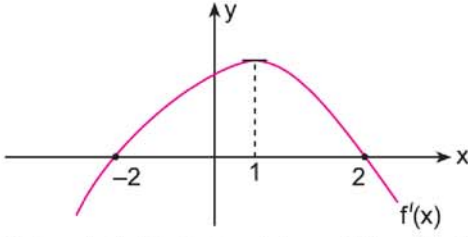
- II. $f(x)$ negatif tanımlı olduğundan $f^3(x)$ fonksiyonu da negatif tanımlıdır. $f^3(x)$ fonksiyonunun türevi incelenirse

$$(f^3(x))' = \underbrace{3 \cdot f^2(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$$

olduğundan fonksiyon artandır. Yani $f^3(x)$ fonksiyonu negatif tanımlı ve artandır. Şık doğrudur.

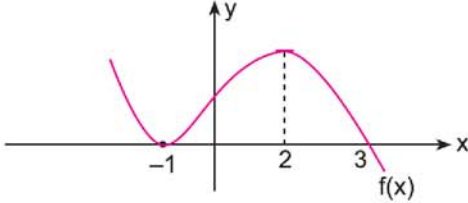
ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1.

Yukarıda $f(x)$ in 1. türevinin grafiği verilmiştir.Buna göre, aşağıdakilerden hangisi **kesinlikle** yanlıştır?

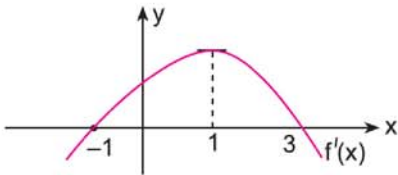
- A) $f(-1) < 0$ B) $f'(-3) < 0$ C) $f'(-2) = 0$
 D) $f'(4) < f'(5)$ E) $f'(-1) < f'(1)$

2.

Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

- A) $f'(-2) < 0$ B) $f'(0) > 0$ C) $f'(4) < 0$
 D) $f'(0) < f'\left(\frac{3}{2}\right)$ E) $f'\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

3.

Yukarıda $f(x)$ in 1. türevinin grafiği verilmiştir.Buna göre, aşağıdakilerden hangisi **doğrudur**?

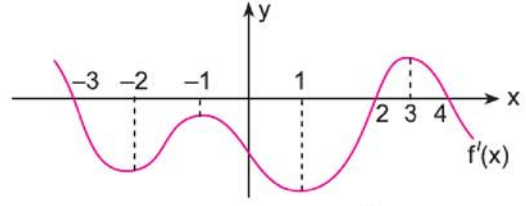
- A) $f(x)$, $(-1, 1)$ aralığında azalır.
 B) $f(x)$, $(1, 3)$ aralığında azalır.
 C) $f'(x)$, $(1, 3)$ aralığında azalır.
 D) $f'(2) < 0$
 E) $f(2) < f(0)$

1) D

2) E

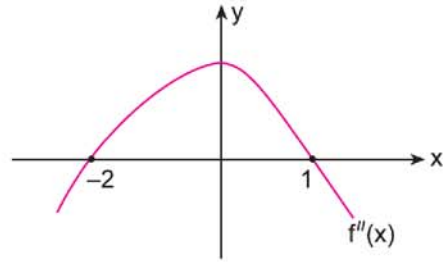
3) C

4.

Yukarıda $f(x)$ in 1. türevinin grafiği verilmiştir.Buna göre, $f(x)$ aşağıdaki aralıkların hangisinde artar?

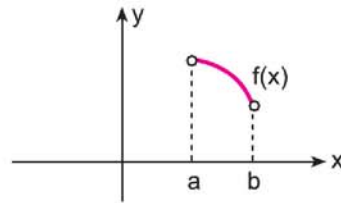
- A) $(2, 4)$ B) $(1, 2)$ C) $(-1, 1)$
 D) $(-2, -1)$ E) $(-3, -2)$

5.

Yukarıda $f(x)$ in 2. türevinin grafiği verilmiştir.Buna göre, aşağıdakilerden hangisi **doğrudur**?

- A) $f'(x)$, $(-2, 1)$ aralığında artar.
 B) $f'(x)$, $(-\infty, -2)$ aralığında artar.
 C) $f''(-3) > 0$
 D) $f'(-4) < f'(-3)$
 E) $f''(0) < 0$

6.

Yukarıda $f(x)$ in (a, b) aralığındaki grafiği verilmiştir.Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi (a, b) aralığında artar?

- A) $3 \cdot f(x)$ B) $f(x^2)$ C) $f(x) - x^2$
 D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $\frac{f(x)}{x}$

4) A

5) A

6) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1. $y = x^2 - ax - 10$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 3 olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2. $f(x) = x^2 - 3x - 4$

fonksiyonunun grafiğine $x = 2$ apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi k olduğuna göre, $f(k)$ kaçtır?

- A) -6 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

3. $y = x^2 + 2x - 3$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x - 1$ B) $y = 4x - 1$ C) $y = 4x$
D) $y = 4x - 4$ E) $y = 4x - 5$

4. $y = x^2 - ax - 2$

eğrisinin $x = 3$ apsisli noktasındaki teğeti $y = 2x + 1$ doğrusuna paralel olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

1) B 2) A 3) D 4) B

5. $y = x^2 - 3x - 1$

eğrisinin $x = 2$ noktasındaki teğeti $y = ax + 1$ doğrusuna dik olduğuna göre, a kaçtır?

- A)
- $-\frac{1}{4}$
- B)
- $-\frac{1}{2}$
- C) -1 D) 1 E) 2

6. $y = \frac{ax+1}{x-1}$

eğrisinin $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 3 olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) -1 E) -4

7. $f(x) = x^3 - x + 1$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) -6 B) -4 C) -2 D) 1 E) 2

8. $y = x^2 - 3x - 1$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) 2 B) 1 C)
- $-\frac{1}{4}$
- D) -1 E) -2

5) C 6) E 7) A 8) B



9. $y = x^3 - ax + 1$

eğrisinin $x = 2$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi $-\frac{1}{6}$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 8 B) 6 C) 4 D) -2 E) -1

10. $y = x^2 + 3x$

eğrisinin $x = -1$ apsisli noktasındaki normalinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $y = x - 3$
- B)
- $y = x + 3$
- C)
- $y = -x + 1$
-
- D)
- $y = -x - 1$
- E)
- $y = -x - 3$

11. $f(x) = x^4 - 1$

olduğuna göre, $g(x) = x.f(x + 1)$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

- A) 15 B) 17 C) 32 D) 47 E) 79

12. $f(x) = ax^2 - 5x$

parabolünün $x = 1$ apsisli noktasındaki teğeti x eksenini ile pozitif yönde 45° lik açı yaptığına göre, a kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

9) B 10) E 11) D 12) C

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

eğrisinin $x = 4$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

- A) -2 B) -1 C)
- $-\frac{1}{2}$
- D) 1 E) 2

14. $y = f(x)$ fonksiyonuna üzerindeki $A(2, 1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $y = 2x + m$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

15. $x^2y - 2xy - 3 = 0$

denklemini ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonuna üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi 0 olduğuna göre, $x_0 + y_0$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B)
- $\frac{1}{2}$
- C)
- $-\frac{1}{2}$
- D) -1 E) -2

16. $y = \sin(\cos 3x)$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{6}$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

- A) 1 B)
- $\frac{1}{2}$
- C)
- $\frac{1}{3}$
- D) -1 E) -3

13) C 14) B 15) E 16) E



ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

1. $y = x^3 + ax^2 + 2x$

eğrisine $x = -1$ ve $x = 2$ apsisli noktalarında çizilen teğetler birbirine paralel olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) -2 E) -3

2. $y = x^2 - 2xm + 1$

eğrisinin $x = -1$ apsisli noktasındaki teğeti x eksenine paralel olduğuna göre, m kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

3. $f(x) = x^2$

parabolüne $x = a$ ve $x = 1$ apsisli noktalarından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 4 B) 1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) -2

4. $f(x) = x^3 - 1$

eğrisine $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet $y = ax + 4$ doğrusu ile dik kesiştiğine göre, a kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

1) C 2) D 3) D 4) B

5. $y = \sqrt{10 - (x+1)^2}$

eğrisine $x = a$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi $\frac{1}{3}$ olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) 1

6. $y = \sin(\cos x)$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 1

7. $y = x \cdot \sin x$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x - \frac{\pi}{2}$ B) $y = x$ C) $y = x + \frac{\pi}{2}$
D) $y = -x$ E) $y = -x + \frac{\pi}{2}$

8. "Herhangi iki eğrinin kesim noktalarındaki teğetleri birbirine dik ise bu eğrilere dik kesişen eğriler denir."

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

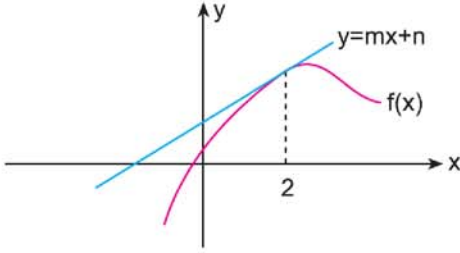
eğrisi $g(x) = x^3$ eğrisiyle dik kesiştiğine göre, k kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) 1 E) $\frac{1}{3}$

5) A 6) E 7) B 8) E



9.

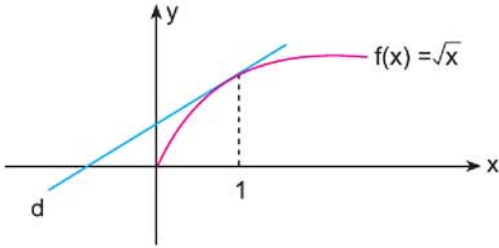


Yukarıdaki grafikte $y = mx + n$ doğrusu, $x = 2$ apsisi noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

$f'(2) = 6 - m$ olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

10.

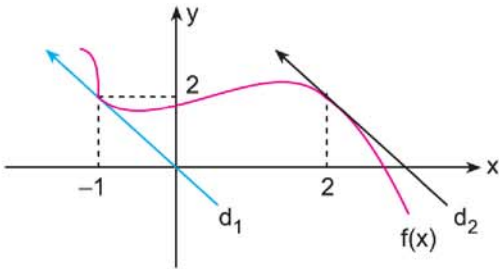


Yukarıdaki grafikte d doğrusu, $x = 1$ apsisi noktasında $f(x) = \sqrt{x}$ eğrisine teğettir.

Buna göre, d doğrusunun eğimi kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

11.



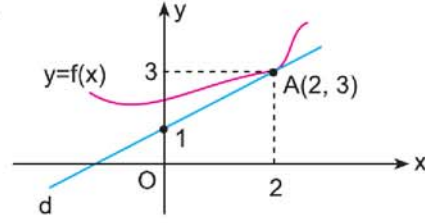
Yukarıdaki grafikteki d_1 ile d_2 doğruları birbirine paraleldir. d_1 doğrusu $x = -1$ apsisi noktasında, d_2 doğrusu $x = 2$ apsisi noktasında, $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

Buna göre, $f'(-1) + f'(2)$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 0 C) -2 D) -4 E) -5

9) E 10) C 11) D

12.

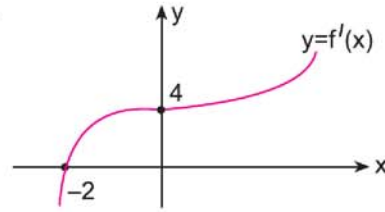


Yukarıdaki grafikte, d doğrusu $A(2, 3)$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

$g(x) = (x + 1) \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(2)$ kaçtır?

- A) 0 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

13.



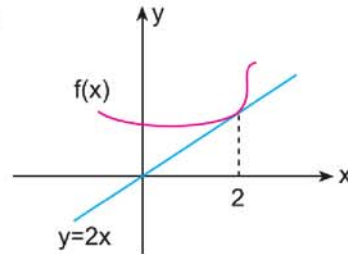
Yukarıdaki grafik $f(x)$ in 1. türevine aittir.

$$g(x) = f(x) + f(x - 2)$$

olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ apsisi noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 4

14.



Yukarıdaki grafikte $y = 2x$ doğrusu $x = 2$ apsisi noktasında $f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f(x)}{x^2 - 2}$ limiti kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

12) D 13) E 14) A

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3

1. $y = x^2 + 5$

eğrisinin $y = 2x + 4$ doğrusuna teğet olduğu noktanın koordinatlar toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 6 D) 7 E) 9

2. $y = x^2 - 4x + 7$

eğrisinin eğimi 2 olan teğetinin eğriye değme noktasının ordinatı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

3. $y = \sqrt{3x} \cdot \ln x$

eğrisinin apsisi $x = 1$ olan noktasındaki teğetinin x eksenini ile yaptığı dar açının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 60 B) 45 C) 30 D) 25 E) 15

4. $y^2 = x^2 - 1$

eğrisine teğet ve eğimleri 2 olan doğruların y ekseninin kestiği noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A)
- $2\sqrt{3}$
- B)
- $2\sqrt{2}$
- C)
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- E) 1

1) D 2) D 3) A 4) A

5. $xy - y = x^2 + 3x$

denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonuna üzerindeki $A(x_0, x_0)$ noktasından çizilen teğetin eğimi 3 olduğuna göre, x_0 kaçtır?

- A)
- $-\frac{9}{4}$
- B) -1 C)
- $-\frac{1}{3}$
- D) 0 E) 2

6. $y = x^3 - x^2 + 2ax + 1$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi a , normalin eğimi $b + 1$ olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

- A) -2 B)
- $-\frac{3}{2}$
- C)
- $-\frac{1}{4}$
- D) 0 E) 2

7. $y = 2x^2 - 2x$

$y = x^2 - ax - b$

eğrileri $x = 1$ apsisli noktada birbirlerine teğet olduklarına göre, a kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

8. $y = \ln(f(x))$

eğrisi $A(1, 2)$ noktasından geçmektedir.

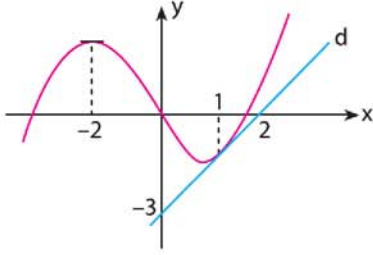
Bu eğrinin A noktasından geçen teğetinin eğimi 3 olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A)
- e^2
- B)
- $2e^2$
- C)
- $3e^2$
- D)
- $4e^2$
- E)
- $6e^2$

5) D 6) D 7) B 8) C



9.



Yukarıdaki grafikte d doğrusu $x = 1$ apsisli noktada f fonksiyonuna teğettir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(-x) + f(x-1)}{f'(x-1)}$ limiti kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{3}{2}$

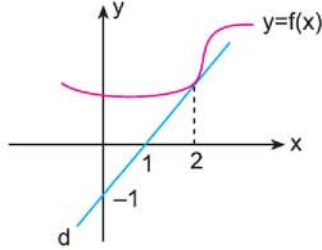
10. Yandaki grafikte d doğrusu $x = 2$ apsisli noktada $y = f(x)$ e teğettir.

Buna göre,

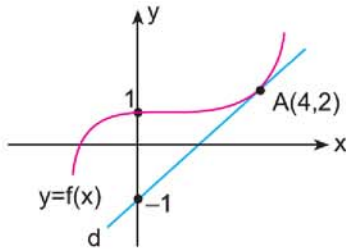
$$g(x) = x \cdot f(x) + x^2$$

fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 2



11.



Yukarıdaki grafikte d doğrusu $A(4, 2)$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonuna teğettir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x+3)}{f'(x-1)}$ limiti kaçtır?

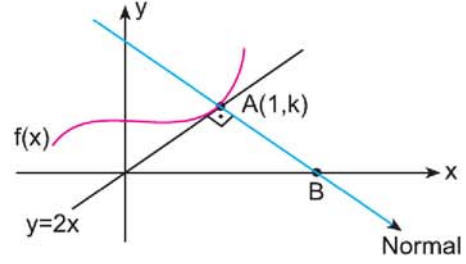
- A) 5 B) 3 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

9) B

10) B

11) D

12.

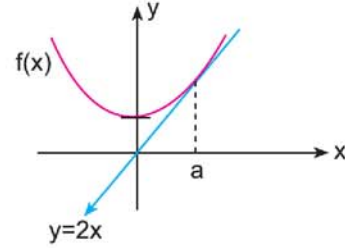


Yukarıdaki grafikte $f(x)$ fonksiyonunun $A(1, k)$ noktasındaki teğeti ve normali verilmiştir.

Teğetin denklemi $y = 2x$ olduğuna göre, normalin x eksenini kestiği B noktasının apsisi kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

13.

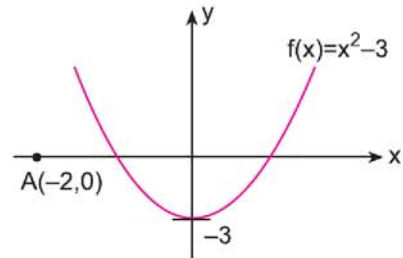


Yukarıdaki grafikte $y = 2x$ doğrusu $x = a$ noktasında $f(x) = x^2 + k$ parabolüne teğettir.

Buna göre, $a + k$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

14.



Yukarıdaki grafikte verilen $f(x)$ parabolü üzerinde bulunan aşağıdaki noktaların hangisinden çizilecek teğet $A(-2, 0)$ noktasından geçer?

- A) $(-2, 1)$ B) $(-1, 1)$ C) $(-1, -2)$
D) $(-3, -3)$ E) $(-3, 4)$

12) C

13) B

14) C

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-4

1. $f(x) = x^2 - 4x - 7$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde daima artandır?

- A) (-2, 3) B) (-1, 2) C) (0, 2)
D) (1, 3) E) (3, 4)

2. $f(x) = x^2 + 2ax$

fonksiyonu daima artan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $x > a$ B) $x < a$ C) $x < -a$
D) $x > -a$ E) $2x < a$

3. Aşağıdaki fonksiyonların hangisi reel sayılarda daima artandır?

- A) $f(x) = x^2$ B) $f(x) = \cos x$ C) $f(x) = e^x$
D) $f(x) = x^2 + 1$ E) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

4. $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x-a}{x-2}$$

fonksiyonu daima azalan olduğuna göre, a 'nın en geniş değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $0 < a < 2$ B) $a < 0$ C) $a > 0$
D) $a < 2$ E) $a > -2$

1) E 2) D 3) C 4) D

5. f ve g reel sayılarda türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - g(x)$$

fonksiyonu her x reel sayısı için daima artan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) $g(x) > 0$ B) $g'(x) > 0$ C) $g(x) < 2x$
D) $g'(x) < 0$ E) $g'(x) < 2x$

6. $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi aynı aralıkta kesinlikle azalandır?

- A) $f^2(x)$ B) $f^3(x)$ C) $x \cdot f(x)$
D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $-\frac{1}{f^3(x)}$

7. $f(x)$ fonksiyonu, $(1, 5)$ aralığında artan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(4) > 0$ B) $f'(3) > 0$ C) $f'(2) < 0$
D) $f(3) > f(2)$ E) $f(4) > f(3)$

8. $f(x) = x^2 - 2ax - 8$

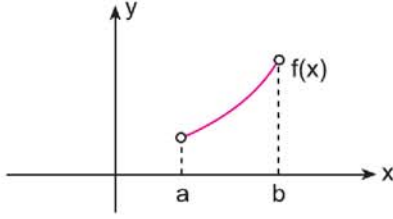
fonksiyonu $(-1, 4)$ aralığında daima azalan olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 5

5) E 6) D 7) C 8) E



9.

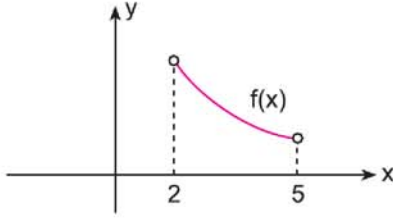


Yukarıdaki grafik (a, b) aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi (a, b) aralığında azalandır?

- A) $5f(x)$ B) $f^3(x)$ C) $f^2(x) + x$
 D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $-\frac{1}{f^2(x)}$

10.

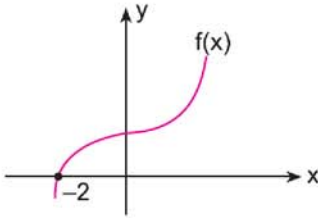


Yukarıdaki grafik $(2, 5)$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(3) < 0$ B) $f(3) > f(4)$ C) $f'(4) < 0$
 D) $f'\left(\frac{5}{2}\right) > 0$ E) $f(3) > 0$

11.



Yukarıdaki grafik $f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

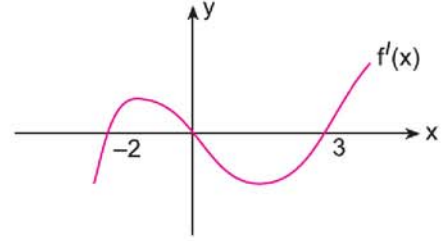
- A) $f(2) > f(1)$ B) $f(0) > f(-2)$ C) $f'(-1) > 0$
 D) $f'(-1) < f'(-2)$ E) $f'(-2) = 0$

9) D

10) D

11) E

12.

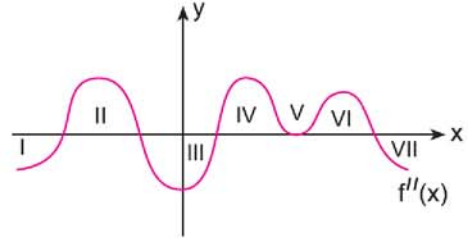


Yukarıdaki grafik $f(x)$ in 1. türevine aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(-3) < 0$ B) $f'(0) = 0$ C) $f'(4) > 0$
 D) $f(1) < f(2)$ E) $f(3) < f(4)$

13.

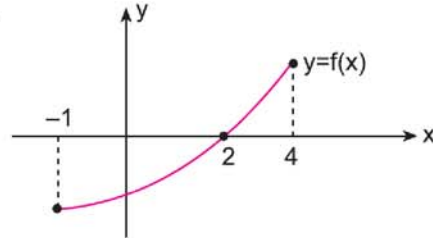


Yukarıda $f(x)$ in 2. türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, grafikte belirtilmiş 7 bölgenin kaçında $f(x)$ fonksiyonunun 1. türev fonksiyonu artan olur?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

14.



Yukarıdaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f(-1) < f(0)$ B) $f(2) = 0$ C) $f'(0) > 0$
 D) $f'(1) < 0$ E) $f'(3) > f'(2)$

12) D

13) B

14) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-5

1. $f(x) = x^3 - 3x$

f(x) fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde daima azalandır?

- A) (-1, 2) B) (0, 1) C) (1, 4)
D) (0, 3) E) (-3, -1)

2. $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$f(x)$ fonksiyonu daima azalan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı tanım kümesinde azalandır?

- A) $-f(x)$ B) $-f(x).x$ C) $\frac{1}{f(x)}$
D) $-f(x) - x^2$ E) $x^3 - f(x)$

3. $f(x)$ fonksiyonu $(a, a + 4)$ aralığında daima azalan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(a + 1) < 0$ B) $f'(a + 2) < 0$
C) $f(a) = f(a + 1)$ D) $f(a + 1) > f(a + 2)$
E) $f(a + 3) < f(a)$

4. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi pozitif reel sayılarda daima artandır?

- A) $f(x) = \ln x$ B) $f(x) = e^{-x}$ C) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
D) $f(x) = \sqrt{x} - x$ E) $f(x) = 1 - x^2$

1) B 2) B 3) C 4) A

5. $f(x)$, (a, b) aralığında negatif tanımlı ve azalan bir fonksiyondur.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi aynı aralıkta kesinlikle azalandır?

- A) $f^2(x)$ B) $-f(x)$ C) $\frac{1}{f(x)}$
D) $-x + f(x)$ E) $x.f(x)$

6. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{ax - x}$$

f(x) fonksiyonu daima azalan olduğuna göre, a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $a < 0$ B) $0 < a$ C) $a < 1$
D) $1 < a$ E) $-1 < a < 2$

7. $f(x) = x^3 + 2ax^2 + x + 2$

f(x) fonksiyonu her x reel sayısı için daima artan olduğuna göre, a sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

8. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları (a, b) aralığında tanımlı ve bu aralıkta artandır.

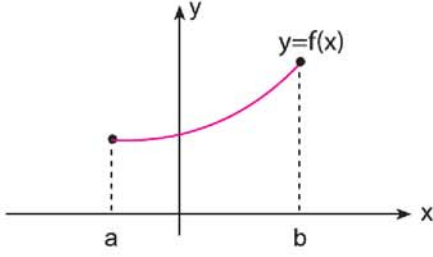
Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi (a, b) aralığında azalandır?

- A) $f(x).g(x)$ B) $f(x) - g(x)$ C) $\frac{f(x)}{g(x)}$
D) $f^2(x) + g^2(x)$ E) $-f(x) - g(x)$

5) D 6) D 7) C 8) E



9.

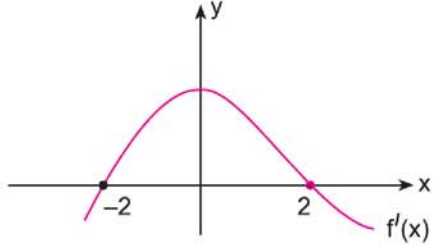


Yukarıdaki grafik $[a, b]$ aralığında tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi (a, b) aralığında kesinlikle azalandır?

- A) $a \cdot f(x)$ B) $f^2(x)$ C) $f(x) - a$
D) $f(x) + b$ E) $-a \cdot f(x)$

10.

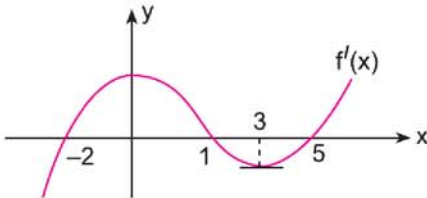


Yukarıdaki grafik $f(x)$ in 1. türevine aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(-2) = 0$ B) $f(0) < f(1)$ C) $f(-2) < f(-1)$
D) $f(3) < f(4)$ E) $f(-1) < f(0)$

11.



Yukarıdaki grafik $f(x)$ in 1. türevine aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

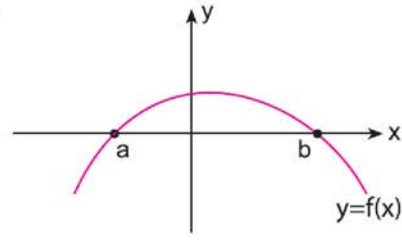
- A) $f''(-1) > 0$ B) $f''(2) < 0$ C) $f''(4) < 0$
D) $f''(-3) > 0$ E) $f''(6) > 0$

9) A

10) D

11) C

12.

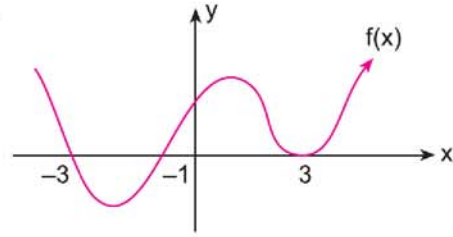


Yukarıdaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, x reel sayısı aşağıdaki aralıkların hangisinden seçilirse $x \cdot f(x)$ fonksiyonu daima azalan bir fonksiyon olur?

- A) $(-\infty, \infty)$ B) $(a, 0)$ C) (a, b)
D) $(0, b)$ E) (b, ∞)

13.



Yukarıdaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

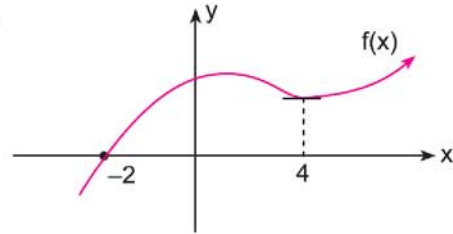
Buna göre, aşağıdaki aralıkların hangisinde

$$\frac{f'(x)}{f(x)} < 0$$

eşitsizliği daima sağlanır?

- A) $(3, 4)$ B) $(1, 2)$ C) $(-3, -2)$
D) $(-4, -3)$ E) $(-3, -1)$

14.



Yukarıdaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, $f'(a) > 0$ eşitsizliği, a sayısı aşağıdakilerden hangisi olursa kesinlikle doğru olur?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12) E

13) D

14) E

