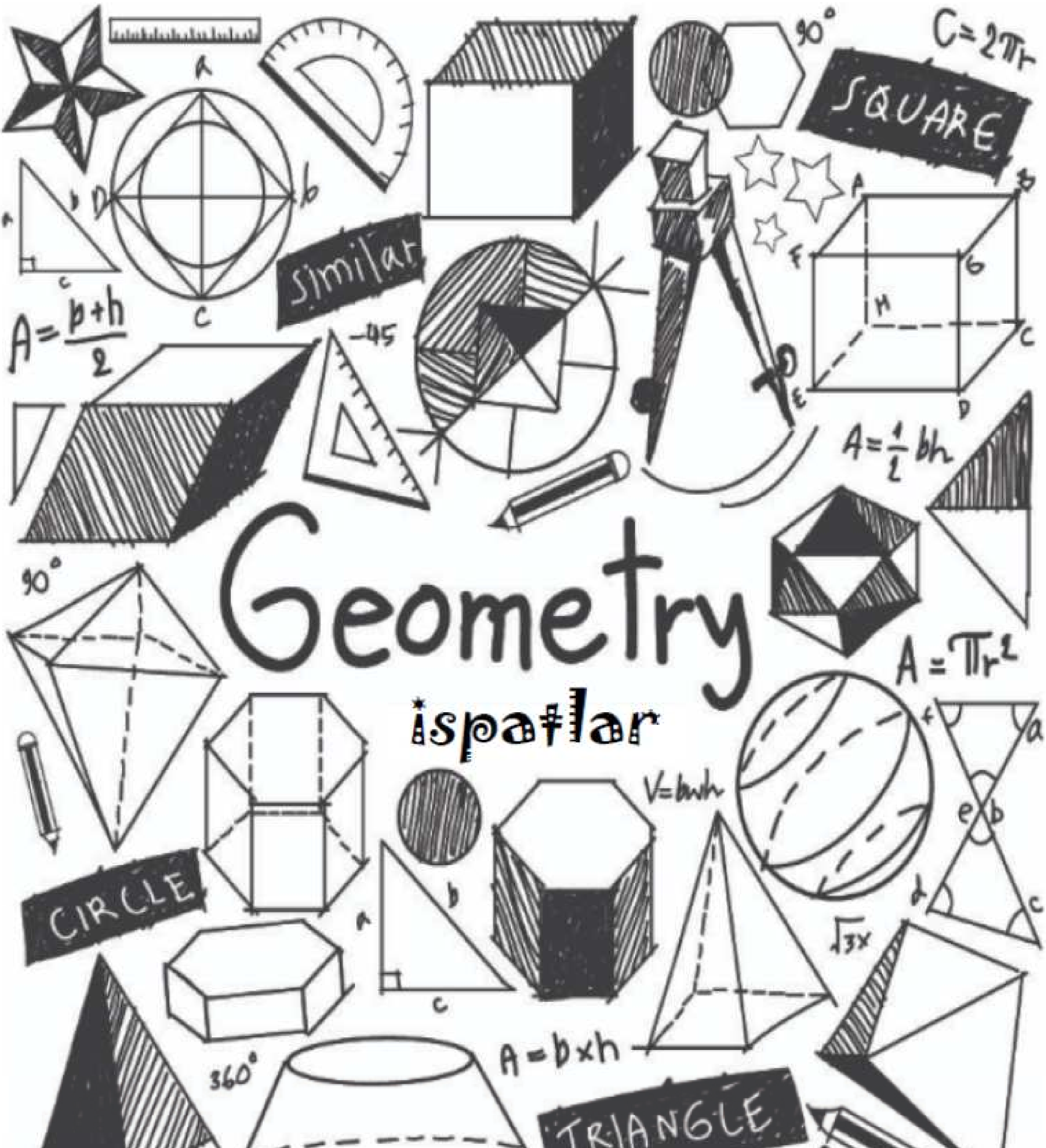
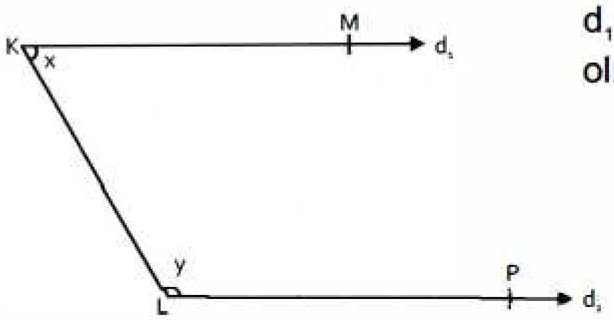


ispatlar

- gunesis -

İÇİNDEKİLER

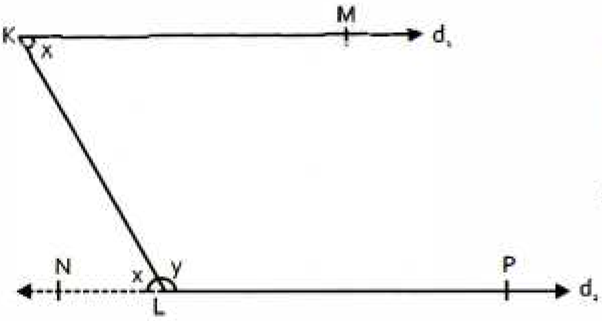
01



$d_1 \parallel d_2$, $m(M\widehat{K}L) = x$, $m(K\widehat{L}P) = y$
olmak üzere

$\boxed{x + y = 180^\circ}$ dir.

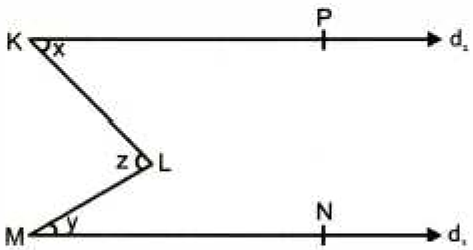
ispat:



iç ters açı özelliğinden
$m(M\widehat{K}L) = m(K\widehat{L}N) = x$ dir.

$\Rightarrow \boxed{x + y = 180^\circ}$ elde edilir.

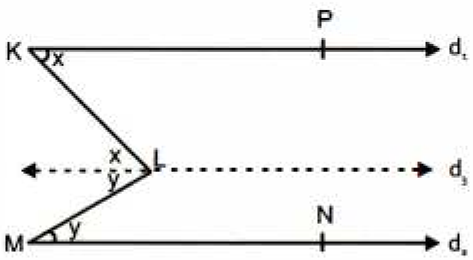
02



$d_1 \parallel d_2$, $m(P\widehat{K}L) = x$, $m(K\widehat{L}M) = z$,
$m(L\widehat{M}N) = y$ olmak üzere

$\boxed{x + y = z}$ dir.

ispat:



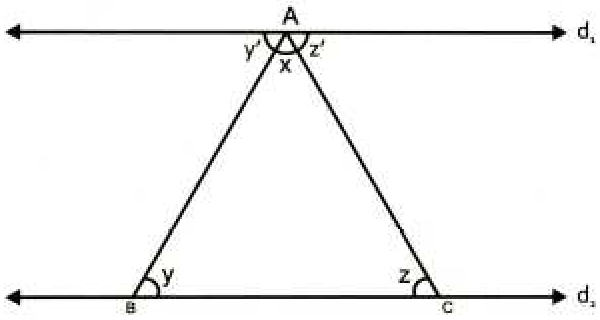
L noktasından geçen ve $d_1 \parallel d_3 \parallel d_2$
olacak şekilde bir d_3 doğrusu
çizilirse iç ters açı özelliğinden

$\boxed{x + y = z}$ elde edilir.

03

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

ispat:



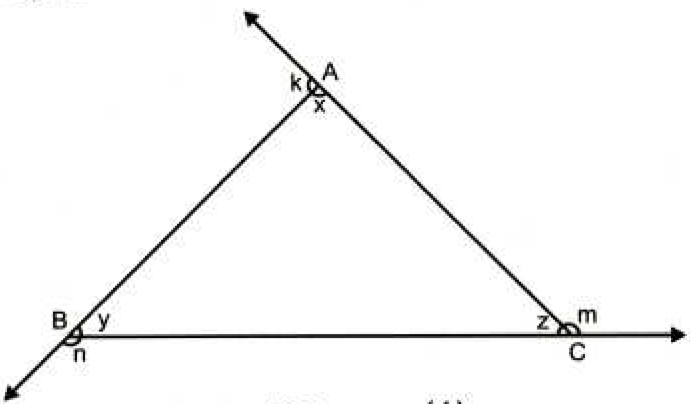
ABC bir üçgen, $d_1 // d_2$,
iç ters açı özelliğinden
$y' = y$ ve $z' = z$ dir
$y' + x + z' = 180°$

$\boxed{x + y + z = 180°}$
elde edilir.

04

Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

ispat:



ABC bir üçgen,

$x + y + z = 180$ ...(1)
$k + x = 180$ ...(2)
$m + z = 180$ ...(3)
$n + y = 180$ ...(4)

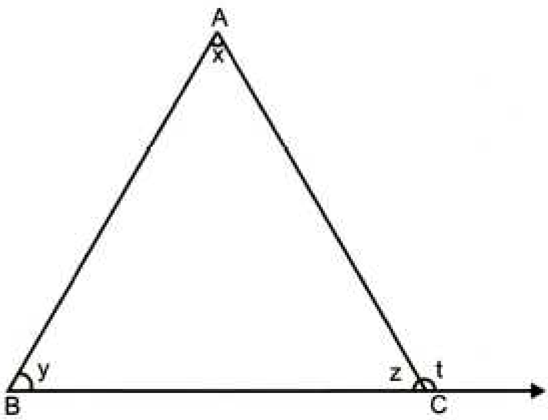
(1),(2),(3),(4) denklemleri taraf tarafa (2) + (3) + (4) - (1) işlemlerine sokulursa

$\boxed{k + m + n = 360°}$ elde edilir.

05

Bir üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

ispat:



ABC bir üçgen,

$$x + y + z = 180 \quad ...(1)$$
$$t + z = 180 \quad ...(2)$$

(1),(2) denklemleri taraf tarafa (1) - (2) işlemine sokulursa

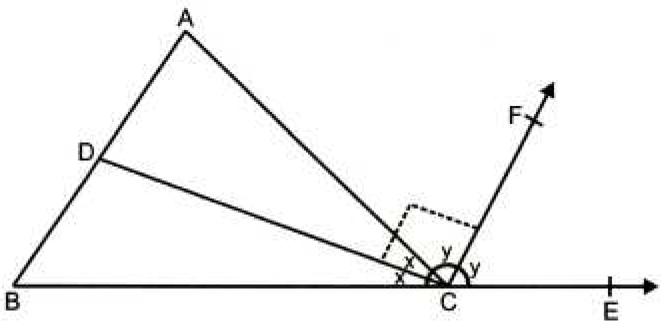
$$x + y - t = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x + y = t}$ elde edilir.

06

Bir üçgende aynı köşeye ait iç açıortay ile dış açıortay birbirine diktir.

ispat:



ABC bir üçgen,

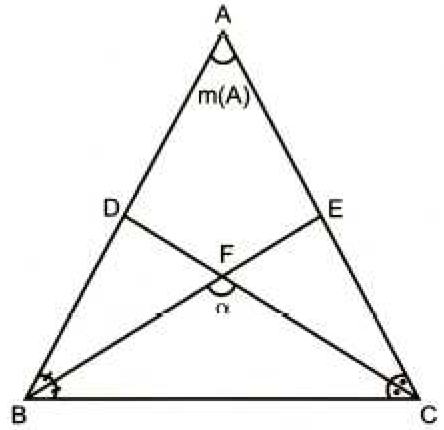
[DC] ve [CF] açıortay,

$$2x + 2y = 180$$

$\Rightarrow$ $x + y = 90$ $\Rightarrow$ $\boxed{[DC] \perp [CF]}$ elde edilir.

07

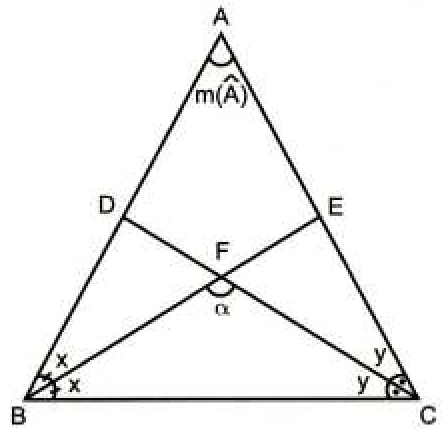
Bir üçgende iki iç açı ortay arasında kalan açı α ise



ABC bir üçgen, [DC] ve [BE] açıortay,
$m(B\hat{F}C) = \alpha$

$$\boxed{\alpha = 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2}}$$ dir.

ispat:



$$2x + 2y + m(\hat{A}) = 180$$

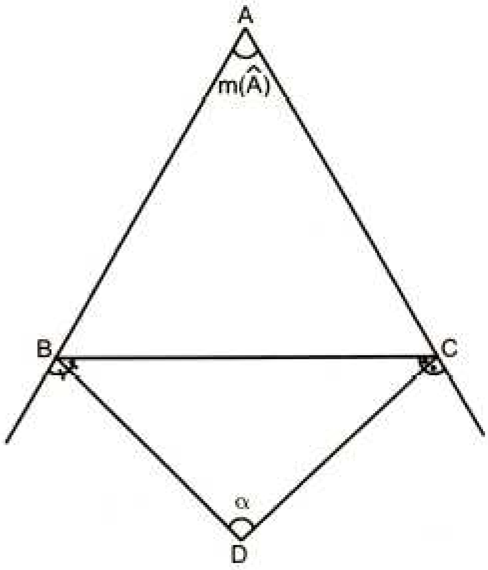
$$x + y + \frac{m(\hat{A})}{2} = 90 \quad ...(1)$$

$$x + y + \alpha = 180 \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa (2) - (1) işlemlerine sokulursa

$$\alpha - \frac{m(\hat{A})}{2} = 90 \Rightarrow \boxed{\alpha = 90^\circ + \frac{m(\hat{A})}{2}}$$ elde edilir.

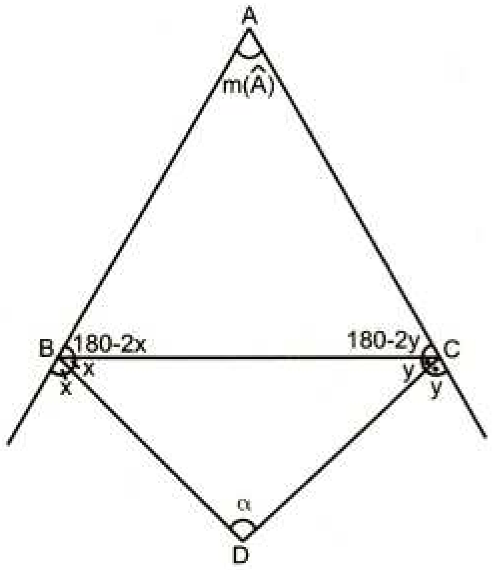
08



ABC ve BDC üçgen, [DB] ve [DC] açıortay, m(BD̂C) = α ise

$$\boxed{\alpha = 90° - \frac{m(\hat{A})}{2}}$$ dir.

ispat:



$$m(\hat{A}) + (180 - 2x) + (180 - 2y) = 180$$

$$\Rightarrow \quad m(\hat{A}) - 2x - 2y = -180$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m(\hat{A})}{2} - x - y = -90 \qquad ...(1)$$

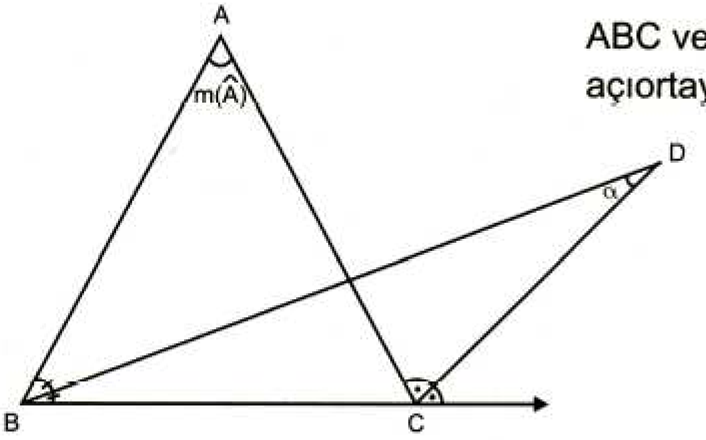
$$\text{ve} \quad x + y + \alpha = 180 \qquad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\alpha + \frac{m(\hat{A})}{2} = 90$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 90° - \frac{m(\hat{A})}{2}}$$ elde edilir.

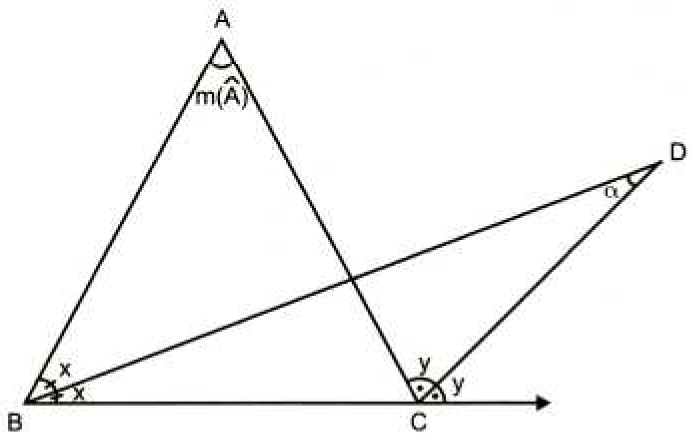
09



ABC ve DBC üçgen, [DB] ve [DC] açıortay, m(BDC) = α ise,

$$\boxed{\alpha = \frac{m(\hat{A})}{2}}$$ dir.

ispat:



$$2y = m(\hat{A}) + 2x \quad \Rightarrow \quad y = x + \frac{m(\hat{A})}{2} \quad ...(1)$$ (bkz 05)

$$\text{ve} \quad y = x + \alpha \quad ...(2)$$

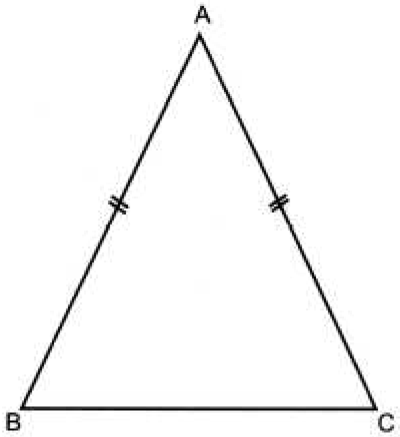
(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa (1) - (2) işlemine sokulursa

$$0 = \frac{m(\hat{A})}{2} - \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{m(\hat{A})}{2}}$$ elde edilir.

10

Bir ikizkenar üçgenin taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

ispat:



ABC bir ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC|$ olsun.
Üçgende (kenar,kenar,kenar) benzerliğinden hareketle

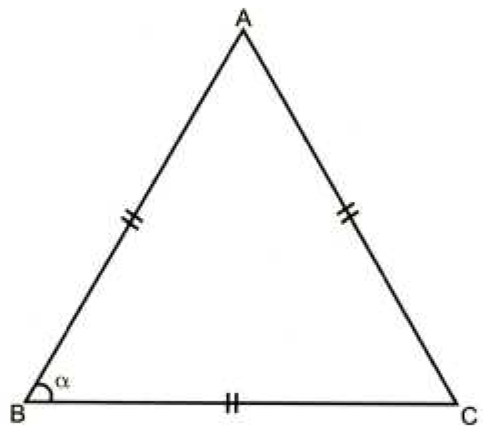
$ABC \sim ACB$ dir.

$\Rightarrow \boxed{m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})}$ elde edilir.

11

Bir eşkenar üçgenin tüm iç açıları birbirine eşit ve $60°$ dir.

ispat:



ABC bir eşkenar üçgen ve
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olsun.

Üçgende (kenar,kenar,kenar) benzerliğinden hareketle

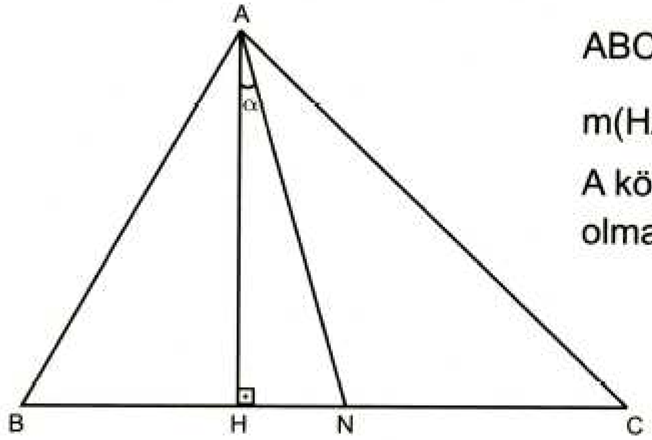
$ABC \sim BCA \sim CAB$ dir.

$\Rightarrow \boxed{\alpha = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{CAB})}$

$3\alpha = 180$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 60°}$ elde edilir.

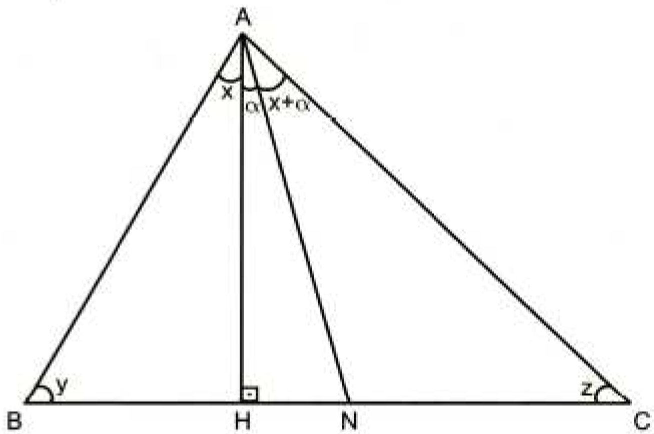
12



ABC bir üçgen, [AH] ⊥ [BC], m(HÂN) = α, [AN] ABC üçgeninin A köşesine ait açının açıortayı olmak üzere

$$\boxed{\alpha = \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{C})|}{2}}$$ dir.

ispat:



$2\alpha + x + z = 90 \qquad ...(1)$

$x + y = 90 \qquad ...(2)$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa (1) - (2) işlemine sokulursa

$2\alpha + z - y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = y - z \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{y - z}{2}$

Şeklimize göre yükseklik açıortayın solunda kalmaktadır.

Bu durumda $2\alpha + z - y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + z = y$ denkleminden $y > z$ olduğu anlaşılıyor.

Eğer yükseklik açıortayın sağ tarafında olsaydı $z > y$ olacaktı ve

$\alpha = \dfrac{z - y}{2}$ olacaktı.

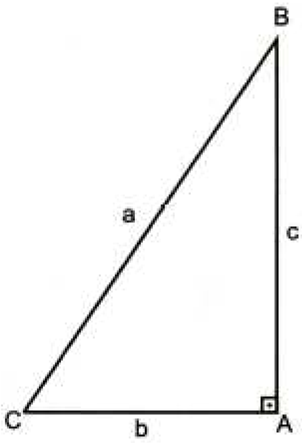
İki durumu da tek denklemde toparlamak istersek

$\alpha = \dfrac{|y - z|}{2}$ yazılabilir. $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \dfrac{|m(\hat{B}) - m(\hat{C})|}{2}}$ elde edilir.

13

PİSAGOR BAĞINTISI

Bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.

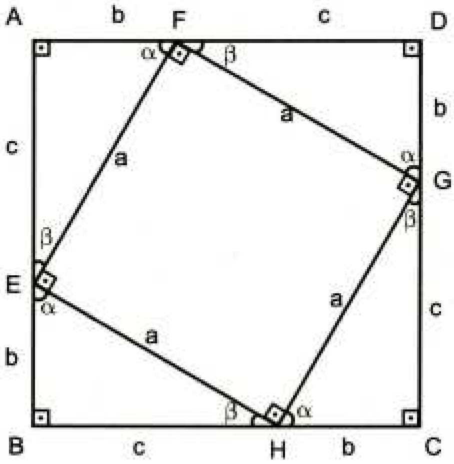


ABC bir üçgen, $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = c$

$|AC| = b$, $|BC| = a$ ise

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ dir.

ispat:



ABCD bir kare,
EAF, FDG, GCH, HBE üçgenleri benzer üçgenler ve benzerlik oranları 1 olduğundan eş üçgenlerdir. Dolayısıyla EFGH bir kenarı a birim olan bir karedir.

ABCD karesinin alanını hesaplamak istersek

$A(ABCD) = (b + c)^2$ ...(1) dir.

Aynı zamanda $A(ABCD) = 4 \cdot \frac{1}{2}.c.b + a^2$ ...(2) dir.

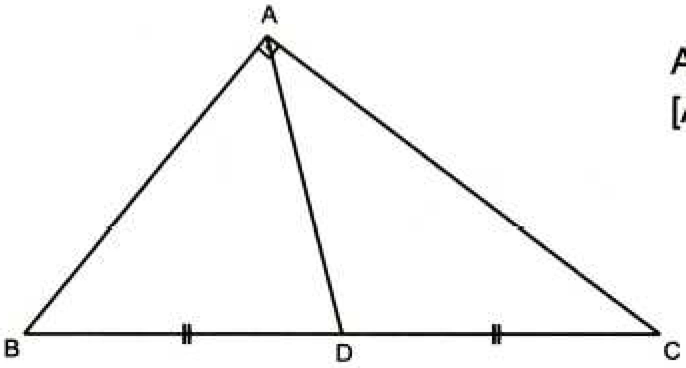
(1) ve (2) denkelemlerinden

$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}.c.b + a^2 \Rightarrow b^2 + 2cb + c^2 = 2cb + a^2$

$\Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2}$ elde edilir.

14

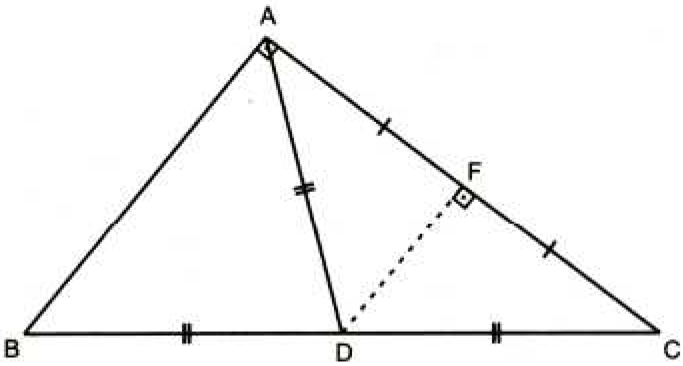
Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğu, hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun iki katıdır.



ABC bir dik üçgen,
[AD] kenarortay olmak üzere

$\boxed{2.|AD| = |BC|}$ dir.

ispat:



[AB] dik kenarına paralel bir [DF] doğru parçası çizelim.

Bu durumda benzerlikten ACB ~ FCD dir. $\Rightarrow$ |CF| = |FA| olur

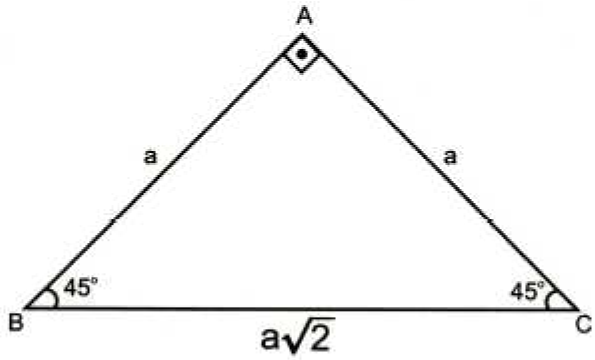
ve paralellikten $m(D\hat{F}C) = 90^\circ$ olur.

Bu durumda ADF ve CDF özdeş üçgenler olup |AD| = |DC| bulunur.

$\Rightarrow$ $\boxed{2.|AD| = |BC|}$ elde edilir.

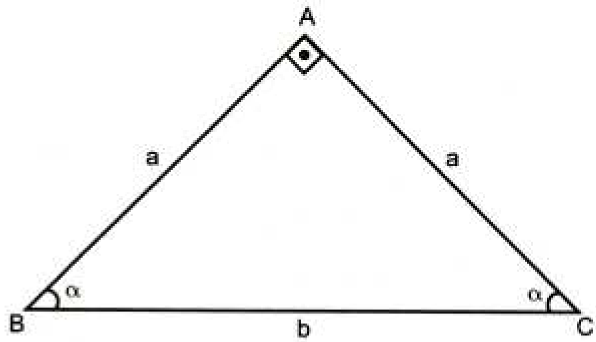
15

Bir ikizkenar dik üçkende dar açıların ölçülerinin her biri 45° dir.
Dik kenarlar a birim ise hipotenüs $a\sqrt{2}$ birimdir.



şeklindedir.

ispat:



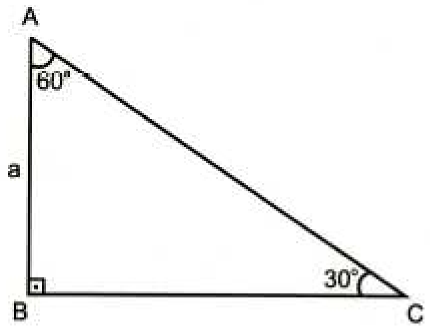
$2\alpha + 90 = 180 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45°}$

Pisagor bağıntısı gereğince (bkz **13**)

$b^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = \pm a\sqrt{2}$

b uzunluk olduğundan $\boxed{b = a\sqrt{2}}$ elde edilir.

16

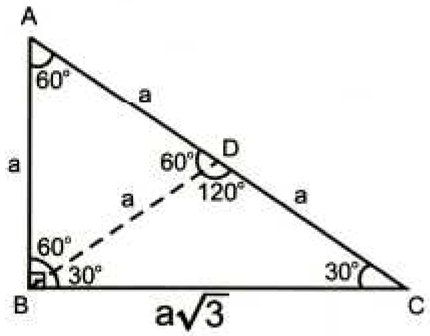


ABC bir üçgen, $[AB] \perp [BC]$,

$|AB| = a$, $m(B\hat{C}A) = 30°$ birim ise

$\boxed{|AC| = 2a}$ ve $\boxed{|BC| = a\sqrt{3}}$ birimdir.

ispat:



[AB] kenarının uzunluğu a birim olsun ve B köşesinden hipotenüse [BC] kenarıyla 30° açı yapacak şekilde bir [BD] doğru parçası çizelim.

BDA eşkenar üçgen ve BDC ikiz kenar üçgenleri elde edilir.

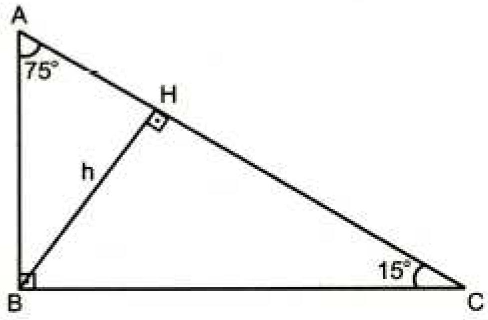
Bu durumda $\boxed{|AC| = 2a}$ elde edilir.

Pisagor bağıntısı gereğince (bkz 13)

$(2a)^2 = a^2 + |BC|^2 \Rightarrow 4a^2 = a^2 + |BC|^2$

$\Rightarrow |BC|^2 = 3a^2 \Rightarrow \boxed{|BC| = a\sqrt{3}}$ elde edilir.

17



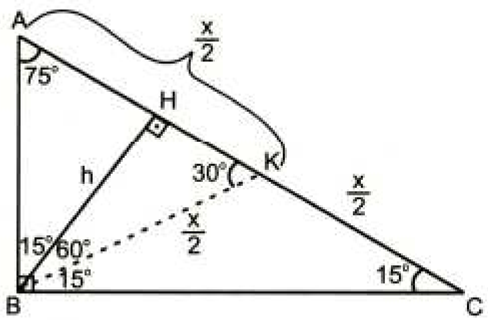
ABC bir dik üçgen, [AB] $\perp$ [BC],

[BH] $\perp$ [AC], |BH| = h,

m($A\hat{C}B$) = 15° ise

$\boxed{|BH| = h = \frac{|AC|}{4}}$ dir.

ispat:



B köşesinden hipotenüse, [BC] dik kenarı ile 15° açı yapacak şekilde [BK] doğru parçası çizilirse, ABK ve BCK ikizkenar üçgenleri elde edilir.

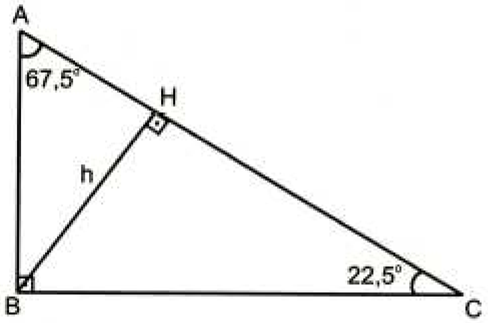
$|BK| = \frac{x}{2}$ alınırsa

$|AK| = |CK| = |BK| = \frac{x}{2}$ ve $|AC| = x$ olur. (bkz 14)

BKH dik üçgeni dikkate alınırsa $h = \frac{x}{4}$ bulunur. (bkz 16)

$\Rightarrow$ $\boxed{|BH| = h = \frac{x}{4} = \frac{|AC|}{4}}$ elde edilir.

18



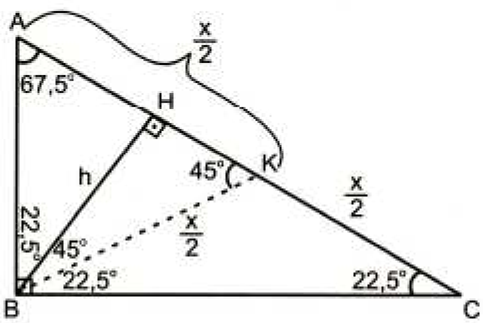
ABC bir dik üçgen, [AB] ⊥ [BC],

[BH] ⊥ [AC], |BH| = h,

m(AĈB) = 22,5° ise

$\boxed{|BH| = h = \dfrac{|AC|}{2\sqrt{2}}}$ dir.

ispat:



B köşesinden hipotenüse, [BC] dik kenarı ile 22,5° açı yapacak şekilde [BK] doğru parçası çizilirse, ABK ve BCK ikizkenar üçgenleri elde edilir.

$|BK| = \dfrac{x}{2}$ alınırsa

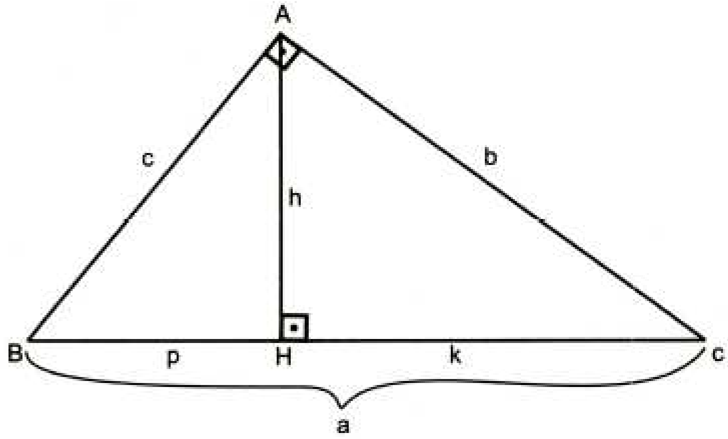
$|AK| = |CK| = |BK| = \dfrac{x}{2}$ ve $|AC| = x$ olur. (bkz 14)

BKH dik üçgeni dikkate alınırsa $h = \dfrac{x}{2\sqrt{2}}$ bulunur. (bkz 15)

$\Rightarrow \boxed{|BH| = h = \dfrac{x}{2\sqrt{2}} = \dfrac{|AC|}{2\sqrt{2}}}$ elde edilir.

19

ÖKLİD BAĞINTILARI



ABC dik bir üçgen, $[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$,

ve a,b,c,h,p,k sırasıyla bulundukları kenarların uzunluklarını göstermek üzere

a) $\boxed{a.h = c.b}$

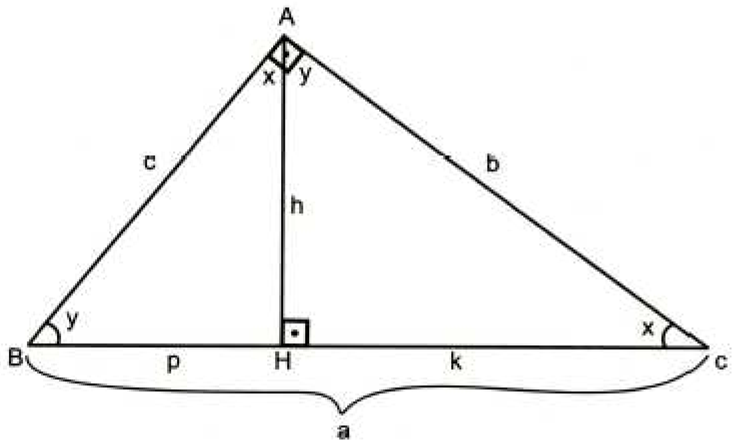
b) $\boxed{c^2 = p.a}$

$\boxed{b^2 = k.a}$

c) $\boxed{h^2 = p.k}$

d) $\boxed{\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$ dir.

ispat:



a) ABC üçgeninin alanını hesaplamak istersek

$A(ABC) = \frac{1}{2}.c.b$ aynı zamanda $A(ABC) = \frac{1}{2}.h.a$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.c.b = \frac{1}{2}.h.a \quad \Rightarrow \boxed{a.h = c.b}$

b) $ABH \sim CBA$ dir

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BH|}{|AB|} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{p}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = p.a}$$

$ACH \sim BCA$ dir

$$\Rightarrow \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CH|}{|CA|} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{k}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = k.a}$$

c) $ABH \sim CAH$ dir. $\Rightarrow \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{|AH|}{|CH|} \Rightarrow \frac{p}{h} = \frac{h}{k} \Rightarrow \boxed{h^2 = p.k}$

d) Pisagor bağıntısından $a^2 = b^2 + c^2$ ...(1) (bkz 13)

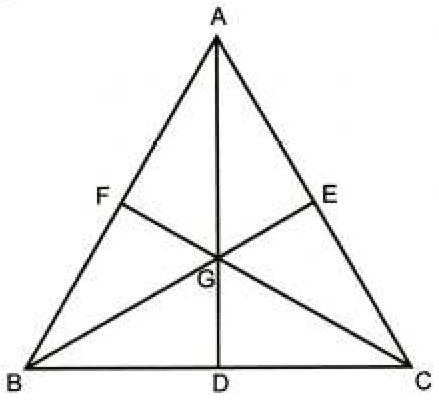
ve a) özelliğinden $a.h = bc$ dir $\Rightarrow a^2.h^2 = b^2.c^2$ ...(2) dir.

(2) denkleminde a^2 ifadesi yerine $b^2 + c^2$ yazılırsa

$$(b^2 + c^2).h^2 = b^2.c^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2.c^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2}{b^2.c^2} + \frac{c^2}{b^2.c^2}$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ elde edilir.

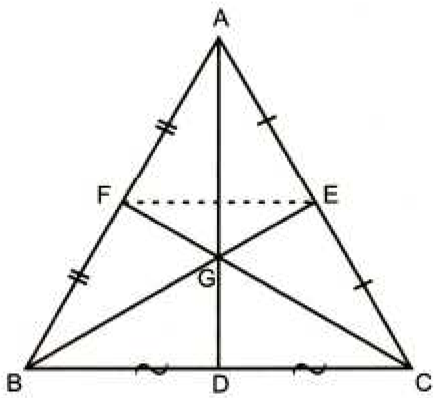
20



ABC bir üçgen,
[AD], [BE], [CF] kenarortay,
G, kenarortayların kesim noktası
olmak üzere

$$\boxed{\frac{|GD|}{|AG|} = \frac{|GE|}{|BG|} = \frac{|GF|}{|CG|} = \frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

ispat:



F ve E noktalarını birleştiren bir [FE] doğru parçası çizelim.

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \quad \text{olduğundan}$$

[FE] // [BC] dir. (THALES)

ve AFE $\sim$ ABC dir $\Rightarrow \boxed{\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2}}$ dir.

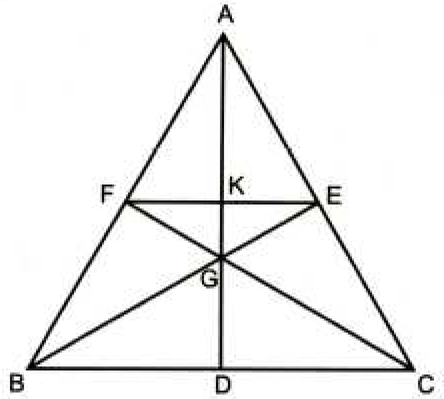
ve FGE $\sim$ CGB dir $\Rightarrow \frac{|FE|}{|BC|} = \frac{|GE|}{|GB|}$ dir.

$\frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ bulmuştuk $\Rightarrow \frac{|FE|}{|BC|} = \frac{|GE|}{|GB|} = \frac{1}{2}$ dir.

Aynı yöntemle hareket edilerek

$$\boxed{\frac{|GD|}{|AG|} = \frac{|GE|}{|BG|} = \frac{|GF|}{|CG|} = \frac{1}{2}} \quad \text{elde edilir.}$$

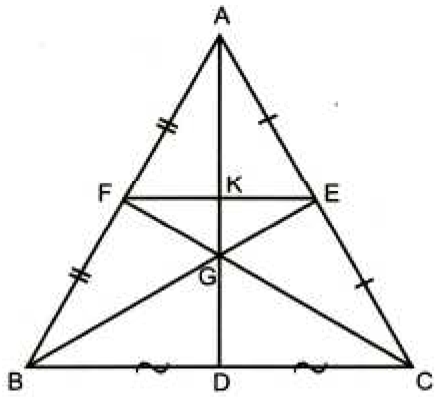
21



ABC bir üçgen,
[AD], [BE], [CF] kenarortay,
G, kenarortayların kesim noktası
olmak üzere

$\boxed{|KG| = \frac{|AD|}{6}}$ dir.

ispat:



$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olduğundan

[FE] // [BC] (THALES)

$\Rightarrow \frac{|FE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{|GD|}{|AG|} = \frac{|GE|}{|BG|} = \frac{|GF|}{|CG|} = \frac{1}{2}$ dir. (bkz 20)

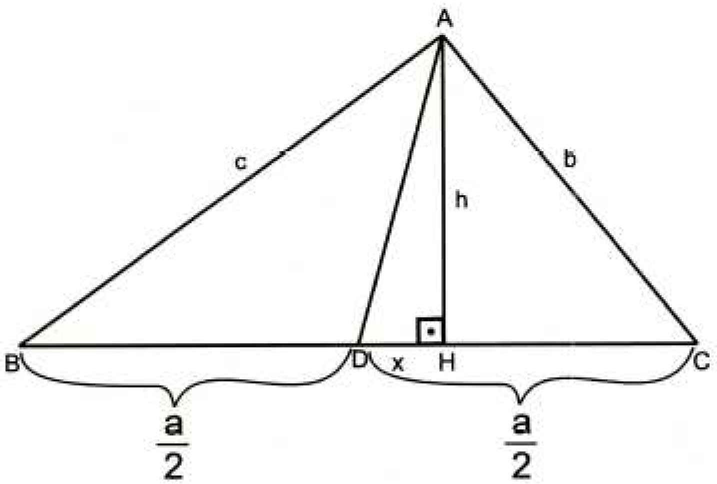
GBD $\sim$ GEK olduğundan $\frac{|GE|}{|BG|} = \frac{|KG|}{|GD|}$ dir. $\Rightarrow$ $\frac{|KG|}{|GD|} = \frac{1}{2}$ dir. ...(1)

$\frac{|GD|}{|AG|} = \frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{|GD|}{|AD|} = \frac{1}{3}$ dir. ...(2)

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$\frac{|KG|}{|AD|} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ $\boxed{|KG| = \frac{|AD|}{6}}$ elde edilir.

22



ABC bir üçgen, $m(A\hat{C}B) > m(A\hat{B}C)$, [AD] kenarortay, $|BC| = a$ birim, $|DH| = x$ birim olsun. Bu durumda

$\boxed{c^2 - b^2 = 2.a.x}$ dir.

ispat:

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısından (bkz 13)

$c^2 = h^2 + (\frac{a}{2} + x)^2$ ...(1)

ACH dik üçgeninde pisagor bağıntısından

$b^2 = h^2 + (\frac{a}{2} - x)^2$ ...(2)

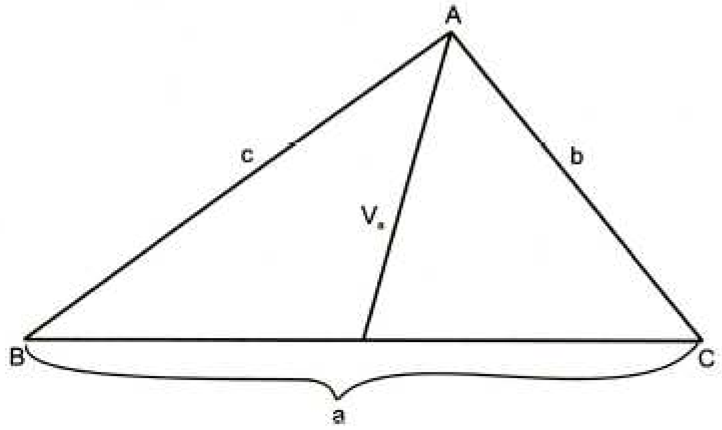
(1) denkleminden (2) denklemi, taraf tarafa çıkartılırsa

$$c^2 - b^2 = (\frac{a}{2} + x)^2 - (\frac{a}{2} - x)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - b^2 = (\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x).(\frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} + x) = 2.a.x$$

$\Rightarrow \boxed{c^2 - b^2 = 2.a.x}$ elde edilir.

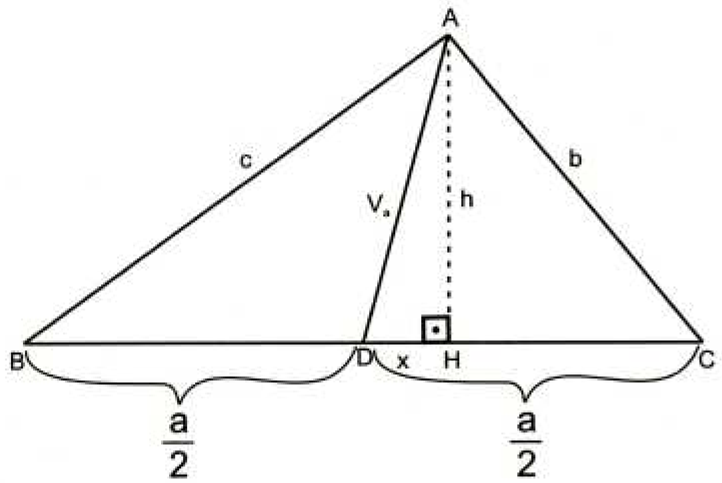
23



ABC bir üçgen, Va ABC üçgeninin [BC] kenarına ait kenarortayı olmak üzere

$\boxed{b^2 + c^2 = 2V_a^2 + \frac{a^2}{2}}$ dir.

ispat:



ABC üçgenin [BC] kenarına ait yüksekliği olan [AH] doğru parçasını çizelim. |AH| = h, |DH| = x olsun.

ABH dik üçgeninde pisagor bağıntısından (bkz 13)

$c^2 = h^2 + (\frac{a}{2} + x)^2$ ...(1)

ACH dik üçgeninde pisagor bağıntısından

$b^2 = h^2 + (\frac{a}{2} - x)^2$ ...(2)

(1) denklemiyle (2) denklemi, taraf tarafa toplanırsa

$$b^2 + c^2 = 2h^2 + \frac{a^2}{4} + ax + x^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2h^2 + 2x^2 + \frac{2a^2}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2(h^2 + x^2) + \frac{a^2}{2} \quad ...(3)$$

ADH dik üçgeninde $V_a^2 = h^2 + x^2$ dir. $h^2 + x^2$ değeri (3) denkleminde yerine yazılırsa

$\boxed{b^2 + c^2 = 2V_a^2 + \frac{a^2}{2}}$ ...(4) elde edilir.

Benzer şekilde

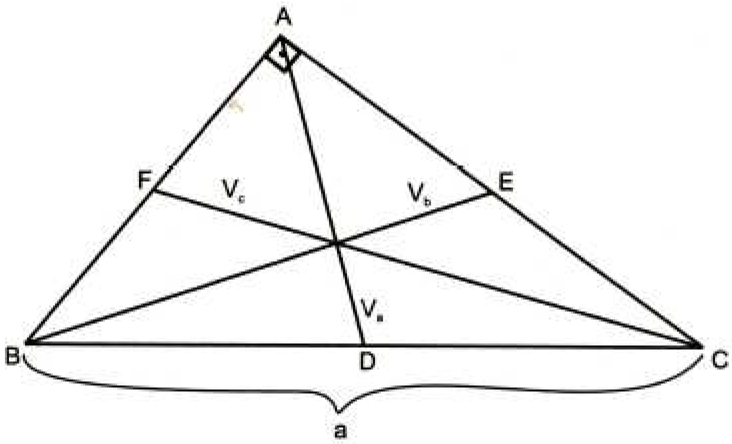
$a^2 + b^2 = 2V_c^2 + \frac{c^2}{2}$ ...(5) ve $a^2 + c^2 = 2V_b^2 + \frac{b^2}{2}$ ...(6)

eşitliklerinin varlığı da gösterilebilir.

Ayrıca (4),(5),(6) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$\boxed{3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)}$ elde edilir.

24



ABC bir dik üçgen $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$,
V_a, V_b, V_c kenarortay olmak üzere

$\boxed{5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2}$ dir.

ispat:

Kenarları a,b,c ve kenarortayları V_a, V_b, V_c olan bir üçgende

$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)$ ...(1) dir. (bkz 23)

Diğer yandan $2V_a = |BC| = a$ ...(2) dir. (bkz 14)

ve Pisagor bağıntısından $c^2 + b^2 = a^2$ ...(3) dir. (bkz 13)

(3) denklemindeki $c^2 + b^2$ değeri (1) denkleminde yerine yazılırsa

$3(a^2 + a^2) = 4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)$

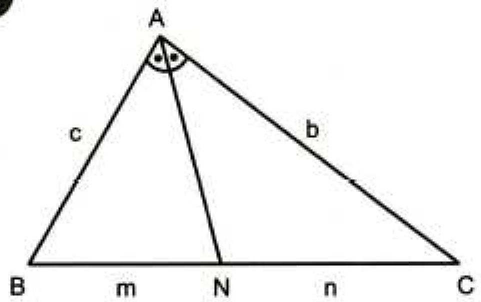
$\Rightarrow$ $6a^2 = 4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)$ $\Rightarrow$ $3a^2 = 2(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)$ ...(4)

(2) denklemindeki a değeri (4) denkleminde yerine yazılırsa

$3(2V_a)^2 = 2(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2)$ $\Rightarrow$ $6V_a^2 = V_a^2 + V_b^2 + V_c^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2}$ elde edilir.

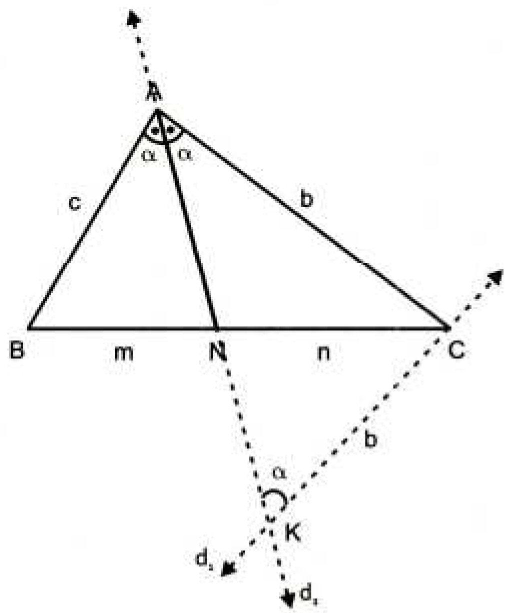
25



ABC bir üçgen, $|BN| = m$, $|NC| = n$, [AN] iç açıortay olmak üzere

$\boxed{\dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{n}}$ dir.

ispat:



[AB] kenarına paralel ve C noktasından geçen bir d_1 doğrusu çizelim ve [AN] nin üzerinden geçen bir d_2 doğrusu çizelim ve d_1 ile d_2 nin kesiştikleri noktaya da K noktası diyelim.

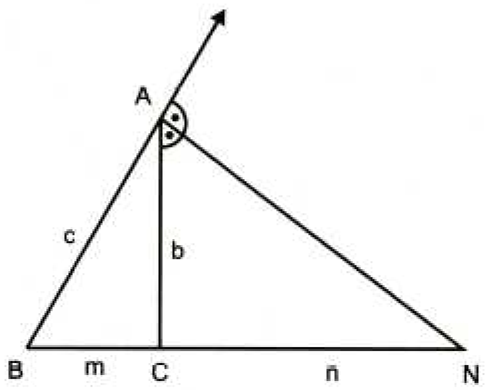
$m(B\hat{A}N) = m(C\hat{A}N) = \alpha$ diyelim. Bu durumda iç ters açı özelliğinden

$m(A\hat{K}C) = \alpha$ olur. AKC üçgeni ikizkenar üçgen olur,

$\Rightarrow$ $|CA| = |CK| = b$ dir ve $ABN \sim KCN$ olur,

$\Rightarrow \dfrac{|AB|}{|CK|} = \dfrac{|BN|}{|CN|} \Rightarrow \boxed{\dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{n}}$ elde edilir.

26

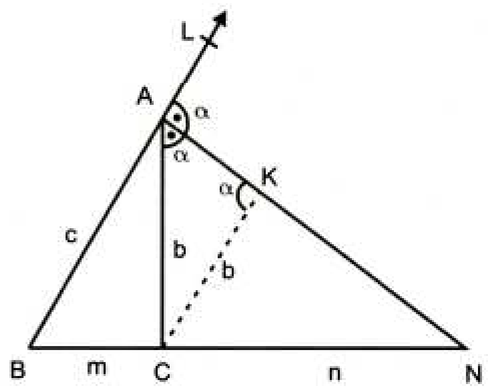


ABC bir üçgen, [AN] dış açıortay

$|BC| = m$ ve $|CN| = n$ ise

$$\boxed{\frac{b}{c} = \frac{n}{m+n}}$$ dir.

ispat:



$m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{LAN}) = \alpha$ olsun.

[AB] ye paralel bir [KC] ($K \in [AN]$) çizilirse içters açı özelliğinden

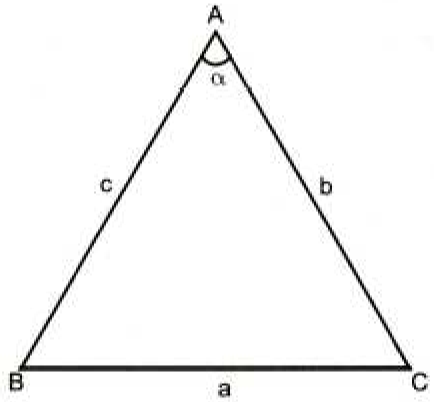
$m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{AKC}) = \alpha$ olur ve ACK ikizkenar üçgen olur ve

$|KC| = b$ olur ve $NKC \sim NAB$ dir.

$$NKC \sim NAB \Rightarrow \frac{|KC|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|NB|} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{c} = \frac{n}{m+n}}$$ elde edilir.

27

COSİNÜS TEOREMİ

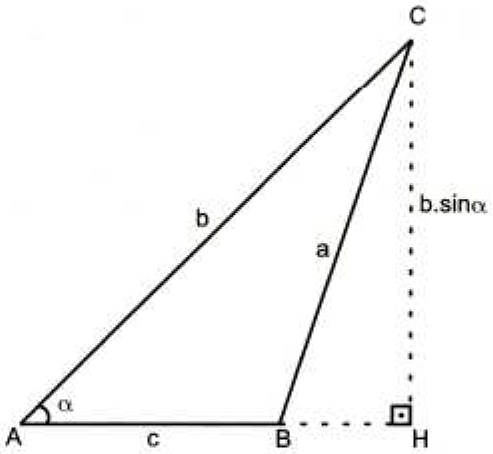


ABC bir üçgen, $m(\widehat{BAC}) = \alpha$,

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ ise

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}$ dir.

ispat:



ABC bir üçgen, $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olsun.

1) $\alpha < 90^\circ$ olsun.

Birbirlerine dik olacak şekilde, [BH] ve [CH] doğru parçalarını çizelim (A,B,H noktaları doğrusal).

AHC dik üçgeninde $\sin\alpha = \dfrac{|CH|}{b} \Rightarrow |CH| = b.\sin\alpha$

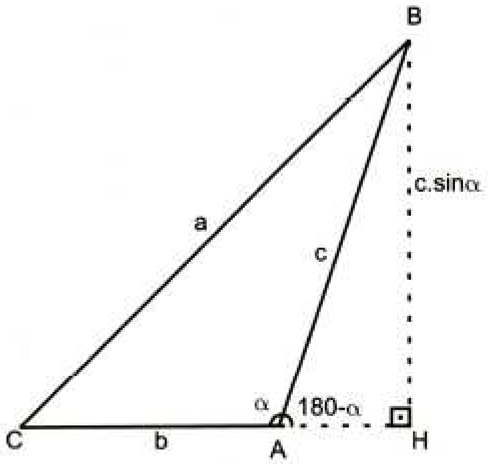
ve $\cos\alpha = \dfrac{|AH|}{b} \Rightarrow |AH| = b.\cos\alpha$

$\Rightarrow$ $|BH| = |AH| - |AB| = b.\cos\alpha - c$ dir.

CBH dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa (bkz ⓭)

$$a^2 = (b.\sin\alpha)^2 + (b.\cos\alpha - c)^2$$
$$= b^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - 2bc.\cos\alpha + c^2$$
$$= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}$ elde edilir.



2)

ABC bir üçgen, $m(B\hat{A}C) = \alpha$ olsun.

$\alpha > 90°$ olsun.

Birbirlerine dik olacak şekilde, [AH] ve [BH] doğru parçalarını çizelim (C,A,H noktaları doğrusal).

AHB dik üçgeninde $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha = \dfrac{|BH|}{c} \Rightarrow |BH| = c.\sin\alpha$

ve $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{|AH|}{c} \Rightarrow |AH| = -c.\cos\alpha$

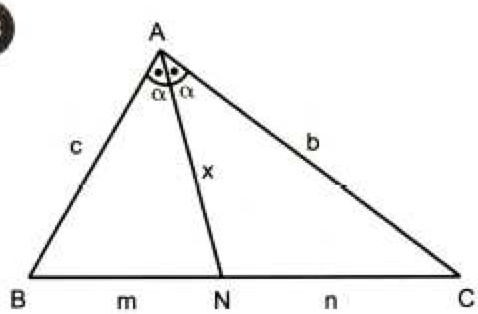
$\Rightarrow$ $|CH| = |CA| + |AH| = b + (-c.\cos\alpha) = b - c.\cos\alpha$ dir.

CBH dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa (bkz ⓭)

$$a^2 = (c.\sin\alpha)^2 + (b - c.\cos\alpha)^2$$
$$= c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc.\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha$$
$$= c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}$ elde edilir.

28



ABC bir üçgen, [AN] iç açıortay, $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BN| = m$, $|NC| = n$, $|AN| = x$ ise

$\boxed{x^2 = b.c - m.n}$ dir.

ispat:

$m(B\hat{A}N) = m(C\hat{A}N) = \alpha$ olsun.

ABN üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa (bkz 27)

$$m^2 = c^2 + x^2 - 2.c.x.\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{m^2 - c^2 - x^2}{-2.c.x} \qquad ...(1)$$

ANC üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

$$n^2 = b^2 + x^2 - 2.b.x.\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{n^2 - b^2 - x^2}{-2.b.x} \qquad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin eşitliğinden

$$\frac{m^2 - c^2 - x^2}{-2.c.x} = \frac{n^2 - b^2 - x^2}{-2.b.x} \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2 - c^2 - x^2}{c} = \frac{n^2 - b^2 - x^2}{b}$$

$$\Rightarrow \quad bm^2 - bc^2 - bx^2 = cn^2 - cb^2 - cx^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2(b - c) = b.c(b - c) - (n^2c - m^2b)$$

$$\Rightarrow \quad x^2(b - c) = b.c(b - c) - n.m(nc/m - mb/n) \quad ...(3)$$

İç açıortay teoremi gereğince (bkz 25)

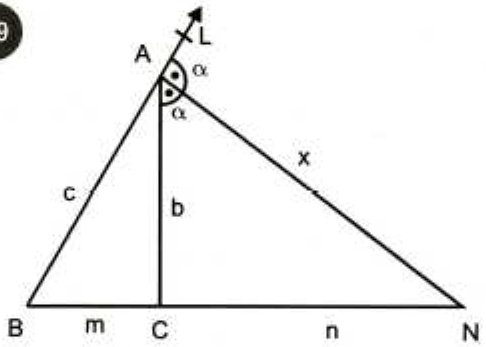
$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{m.b}{n} = c \quad \text{ve} \quad \frac{n.c}{m} = b \quad \text{dir.}$$

Bu değerler (3) denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2(b - c) = b.c(b - c) - n.m(b-c)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x^2 = b.c - n.m}$ elde edilir.

29



ABC bir üçgen, [AN] dış açıortay, $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = m$, $|CN| = n$, $|AN| = x$ ise

$\boxed{x^2 = n(m + n) - b.c}$ dir.

ispat:

$m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{LAN}) = \alpha$ olsun.

ACN üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa (bkz **27**)

$$n^2 = b^2 + x^2 - 2.b.x.\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{n^2 - b^2 - x^2}{-2.b.x} \quad ...(1)$$

ABN üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

$$(m + n)^2 = c^2 + x^2 - 2.c.x.\cos(180-\alpha) \quad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(m + n)^2 - c^2 - x^2}{2.c.x} ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin eşitliğinden

$$\frac{n^2 - b^2 - x^2}{-2.b.x} = \frac{(m + n)^2 - c^2 - x^2}{2.c.x} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2 - b^2 - x^2}{-b} = \frac{(m + n)^2 - c^2 - x^2}{c}$$

$$\Rightarrow \quad cn^2 - cb^2 - cx^2 = -b(m + n)^2 + bc^2 + bx^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2(b + c) = [b(m + n)^2 + cn^2] - bc(b + c)$$

$$\Rightarrow \quad x^2(b + c) = n(m + n)[cn/(m+n) + b(m+n)/n] - bc(b + c) \quad ...(3)$$

Dış açıortay teoremi gereğince (bkz **26**)

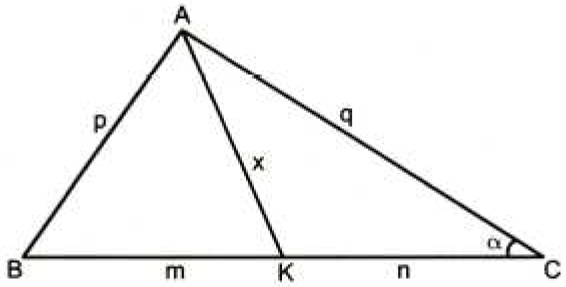
$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m+n} \quad \Rightarrow \quad \frac{c.n}{m+n} = b \quad \text{ve} \quad \frac{b(m+n)}{n} = c \quad \text{dir.}$$

Bu değerler (3) denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2(b + c) = n(m + n)(b + c) - bc(b + c)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2 = n(m + n) - bc} \quad \text{elde edilir.}$$

30 STEWART BAĞINTISI



ABC bir üçgen, $|AB| = p$, $|AC| = q$, $|AK| = x$, $|BK| = m$, $|KC| = n$ ise

$$\boxed{x^2 = \frac{q^2m + p^2n}{m+n} - m.n}$$ dir.

ispat:

$m(A\hat{C}K) = \alpha$ diyelim.

ACK üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa (bkz 27)

$$x^2 = q^2 + n^2 - 2q.n.\cos\alpha \quad ...(1)$$

ACB üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

$$p^2 = q^2 + (m+n)^2 - 2q(m+n).\cos\alpha \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinden $\cos\alpha$ değerleri çekilip birbirine eşitlenirse

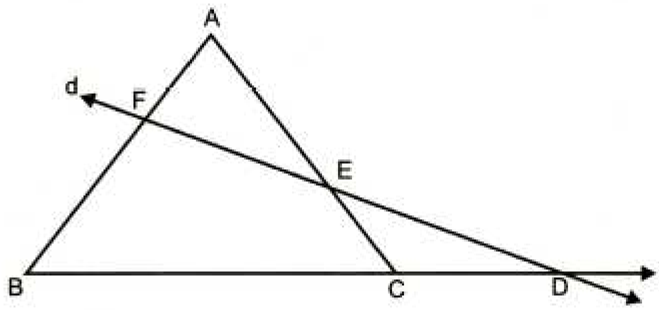
$$\frac{x^2 - q^2 - n^2}{n} = \frac{p^2 - q^2 - (m+n)^2}{m+n} \Rightarrow \frac{x^2 - q^2}{n} - n = \frac{p^2 - q^2}{m+n} - (m+n)$$

$$\Rightarrow x^2 = q^2 + \frac{n(p^2 - q^2)}{m+n} - m.n \Rightarrow x^2 = \frac{q^2m + q^2n + p^2n - q^2n}{m+n} - m.n$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{q^2m + p^2n}{m+n} - m.n}$$ elde edilir.

31

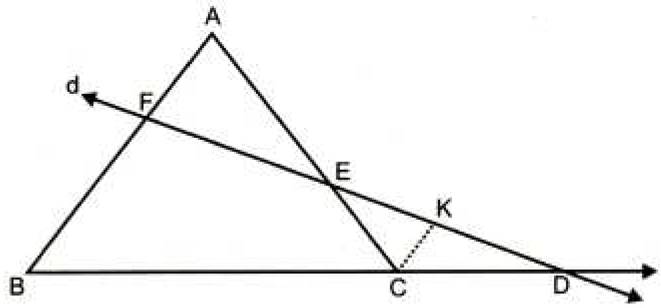
MENALAUS TEOREMİ



ABC bir üçgen, B,C,D noktaları doğrusal, d doğrusu [AB],[AC] ve [BD] doğru parçalarını sırasıyla F,E ve D noktalarında kesiyor ise

$$\boxed{\frac{|DC|}{|DB|}\cdot\frac{|BF|}{|FA|}\cdot\frac{|AE|}{|EC|}=1} \quad \text{dir.}$$

ispat:



K noktası d doğrusu üzerinde olmak üzere [AB] ye paralel olacak şekilde bir [CK] doğru parçası çizelim. Bu durumda (Açı,Açı,Açı) benzerliğinden DKC $\sim$ DFB ve AFE $\sim$ CKE dir.

$$DKC \sim DFB \quad \Rightarrow \frac{|KC|}{|BF|}=\frac{|DC|}{|DB|} \quad \Rightarrow \frac{|DC|}{|DB|}\cdot\frac{|BF|}{|KC|}=1 \quad ...(1)$$

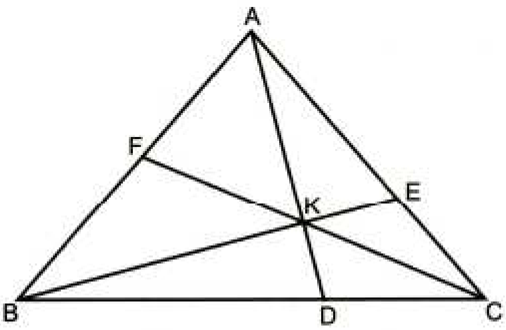
$$AFE \sim CKE \quad \Rightarrow \frac{|AF|}{|CK|} = \frac{|AE|}{|CE|} \quad \Rightarrow \frac{|CK|}{|AF|} \cdot \frac{|AE|}{|CE|} = 1 \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{|DC|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|KC|} \cdot \frac{|CK|}{|AF|} \cdot \frac{|AE|}{|CE|} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{|DC|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} = 1}$$ elde edilir.

32

SEVA TEOREMİ



[AD],[BE] ve [CF] doğru parçaları ABC üçgeninin bir iç bölgesindeki bir K noktasında kesişiyor ise

$$\boxed{\frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} = 1}$$ dir.

ispat:

Menalaus teoremi gereğince (bkz **31**)

$$\frac{|CD|}{|CB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} \cdot \frac{|AK|}{|KD|} = 1 \quad ...(1)$$

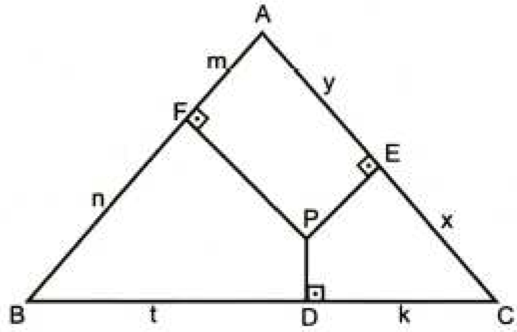
Yine Menalaus teoremi gereğince

$$\frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AK|}{|KD|} = 1 \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa oranlanırsa

$$\boxed{\frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} = 1}$$ elde edilir.

33 CARNOT TEOREMİ



ABC üçgeninin bir iç noktası P olsun.

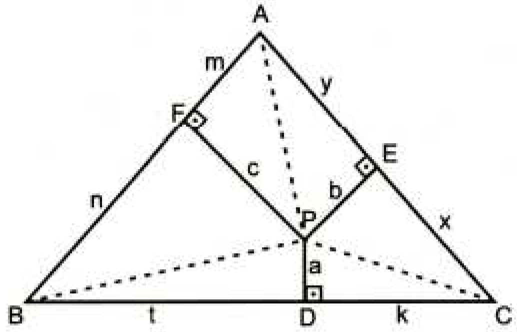
$[PF] \perp [AB]$, $[PE] \perp [AC]$, $[PD] \perp [BC]$,

$|AF| = m$, $|BF| = n$, $|BD| = t$, $|DC| = k$,

$|CE| = x$, $|EA| = y$ ise

$\boxed{m^2 + t^2 + x^2 = n^2 + k^2 + y^2}$ dir.

ispat:



$|PD| = a$, $|PE| = b$, $|PF| = c$ olsun ve P noktası ile üçgenin köşelerini birleştiren doğru parçalarını çizelim.

Pisagor bağıntısından (bkz 13)

$$a^2 + k^2 = b^2 + x^2 \quad ...(1)$$

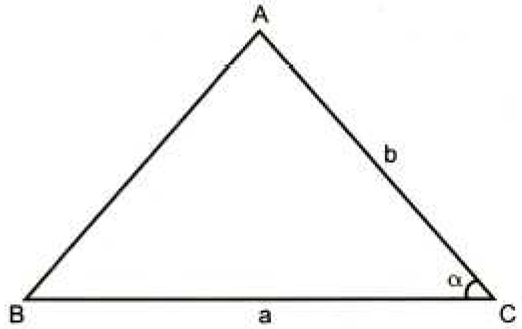
$$a^2 + t^2 = n^2 + c^2 \quad ...(2)$$

$$c^2 + m^2 = b^2 + y^2 \quad ...(3)$$

(2) ve (3) denklemleri taraf tarafa toplanıp (1) denklemi çıkartılırsa

$\boxed{m^2 + t^2 + x^2 = n^2 + k^2 + y^2}$ elde edilir.

34



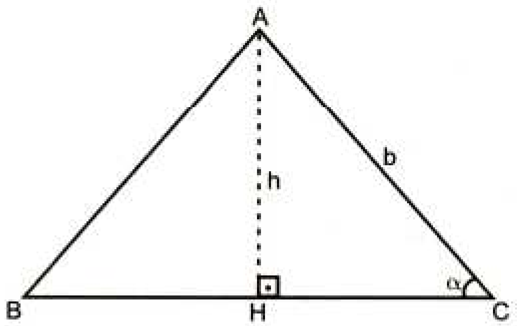
ABC bir üçgen,

$|AC| = b$, $|BC| = a$, $m(B\hat{C}A) = \alpha$

ise

$\boxed{A(ABC) = \frac{1}{2} a.b.\sin\alpha}$ dir.

ispat:



ABC üçgeninin A köşesinden [BC] kenarına bir dikme indirelim. Bu dikmenin uzunluğu h birim olsun.

AHC dik üçgeni dikkate alındığında

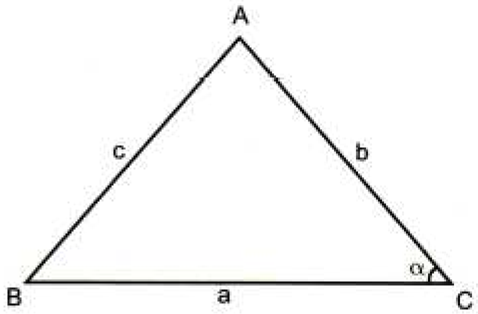
$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b.\sin\alpha \quad ...(1)$$

diğer taraftan $\quad A(ABC) = \frac{1}{2} h.a \quad ...(2)$

(1) denklemindeki h değeri (2) denkleminde yerine yazılırsa

$\boxed{A(ABC) = \frac{1}{2} a.b.\sin\alpha}$ elde edilir.

35



Kenar uzunlukları sırasıyla a, b, c olan bir ABC üçgeni için,

$$\frac{a+b+c}{2} = u \quad \text{olmak üzere}$$

$$\boxed{A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}} \quad \text{dir.}$$

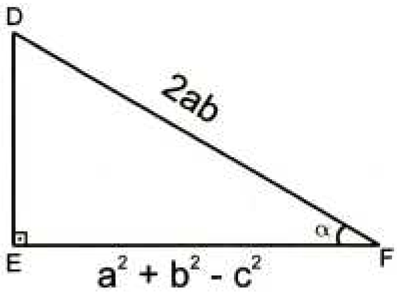
ispat:

$m(A\hat{C}B) = \alpha$ olsun.

sinüs alan formülünden (bkz 34) $A(ABC) = \frac{1}{2}a.b.\sin\alpha$ ...(1)

cosinüs teoremi gereğince (bkz 27) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{komşu dik kenar} \\ \longrightarrow \text{hipotenüs} \end{array}$$



pisagor teoremi gereğince (bkz 13)

$$|DE|^2 + (a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab)^2$$

$$\Rightarrow |DE| = \sqrt{(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}$$

Bu durumda

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab} \quad \text{...(2) dir.}$$

(2) denklemindeki sinα değeri (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$A(ABC) = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4}$$

$$[A(ABC)]^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}$$

$$= \frac{a^2(b+c)^2 - a^4 - (b+c)^2(b-c)^2 + a^2(b-c)^2}{16}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2].[a^2 - (b-c)^2]}{16}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}$$

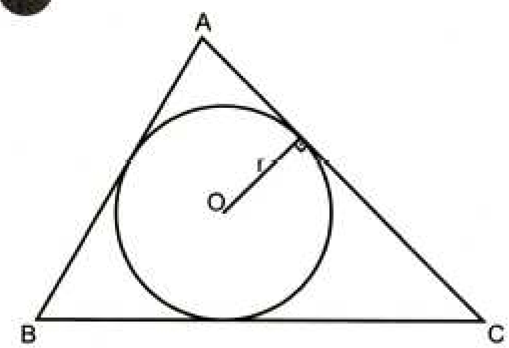
$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)$$

$$= u(u-a)(u-b)(u-c)$$

$\boxed{A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}}$ elde edilir.

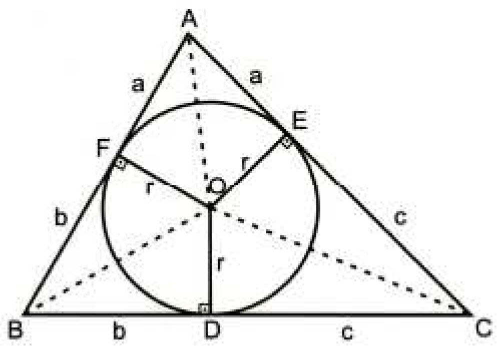
36



ABC bir üçgen,
üçgenin içteğet çemberinin yarıçap uzunluğu r ve merkezi O noktası olsun. $\dfrac{Ç(ABC)}{2} = u$ ise

$\boxed{A(ABC) = u.r}$ dir.

ispat:



İçteğet çemberin merkezinden ABC üçgeninin kenarları olan, teğetlerin değme noktalarına indirdiğimiz doğru parçaları teğetlere diktir (bkz 79) ve boyları yarıçap uzunluğu kadardır.

O noktasını üçgenin köşelerine birleştiren doğru parçalarını çizelim.

$|AF| = a$, $|BF| = b$, $|CD| = c$ dersek;
bir çembere bir dış noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan
$|AF| = |AE| = a$, $|BF| = |BD| = b$, $|DC| = |CE| = c$ olur.

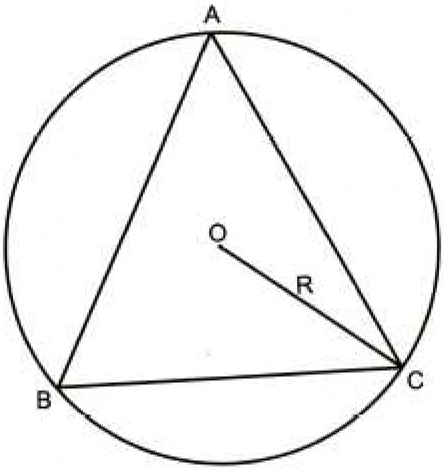
$A(ABC) = A(AOB) + A(AOC) + A(BOC)$ yazılabilir.

$$= \frac{1}{2}(a+b).r + \frac{1}{2}(a+c).r + \frac{1}{2}(b+c).r = (a+b+c).r$$

$Ç(ABC) = 2(a+b+c)$ ve $\dfrac{Ç(ABC)}{2} = u \Rightarrow (a+b+c) = u$

$\Rightarrow \boxed{A(ABC) = u.r}$ elde edilir.

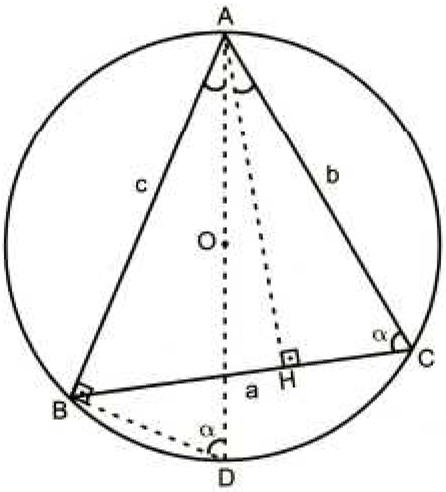
37



ABC bir üçgen. O merkezli çember, ABC üçgeninin çevrel çemberidir, Çevrel çemperin yarıçap uzunluğu R, |AB| = c, |AC| = b, |BC| = a ise

$\boxed{A(ABC) = \dfrac{a.b.c}{4R}}$ dir.

ispat:



D çember üzerinde bir nokta olmak üzere, O merkezli çevrel çemberin merkezinden geçen bir [AD] doğru parçası çizelim. Bu durumda [AD] çap olur. $\Rightarrow$ |AD| = 2R olur.

[BD] doğru parçasını da çizelim ve ABC üçgeninin [BC] kenarına ait olan yüksekliğini yani [AH] doğru parçasını çizelim. ABD üçgeni dikkate alınırsa, çapı gören çevrel açı dik olduğundan $m(A\hat{B}D) = 90^\circ$ dir. (bkz 75)

Aynı yayı gören çevre açılar da birbirine eşit olduğundan

DBA $\sim$ CHA (Açı,Açı,Açı)

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|AH|} = \frac{|AD|}{|AC|} \qquad \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{2R}{b} \qquad \Rightarrow h = \frac{c.b}{2R}$$

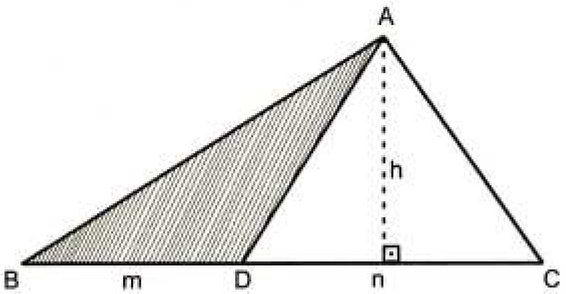
$$A(ABC) = \frac{1}{2}|BC|.h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a.b.c}{2R}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(ABC) = \frac{a.b.c}{4R}}$$ elde edilir.

38

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanlarının oranına eşittir.

ispat:

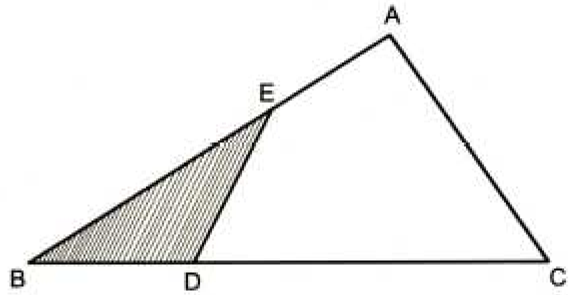


$|BD| = m$ ve $|DC| = n$ olsun.

$$A(DBA) = \frac{1}{2}m.h \qquad \text{ve} \qquad A(DCA) = \frac{1}{2}n.h$$

$$\Rightarrow \frac{A(DBA)}{A(DCA)} = \frac{\frac{1}{2}m.h}{\frac{1}{2}n.h} \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{A(DBA)}{A(DCA)} = \frac{m}{n}}$$ elde edilir.

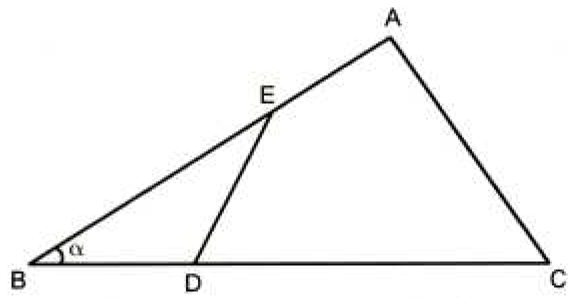
39



A(ABC) = S olsun. $\frac{|EB|}{|AB|} = \frac{1}{k}$, $\frac{|DB|}{|CB|} = \frac{1}{p}$ (k,p ≠ 0)

ise $\boxed{A(EBD) = \frac{S}{k.p}}$ dir.

ispat:



m($A\hat{B}C$) = α diyelim.

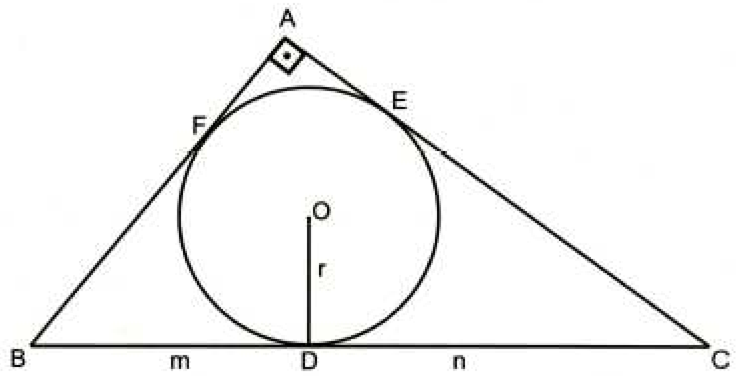
$A(EBD) = \frac{1}{2}|EB|.|BD|.\sin\alpha$ ...(1) (bkz **34**)

$A(ABC) = \frac{1}{2}|AB|.|CB|.\sin\alpha$ ...(2)

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa oranlanırsa

$\frac{A(EBD)}{S} = \frac{|EB|}{|AB|} \cdot \frac{|BD|}{|CB|}$ ⇒ $\boxed{A(EBD) = \frac{S}{k.p}}$ elde edilir.

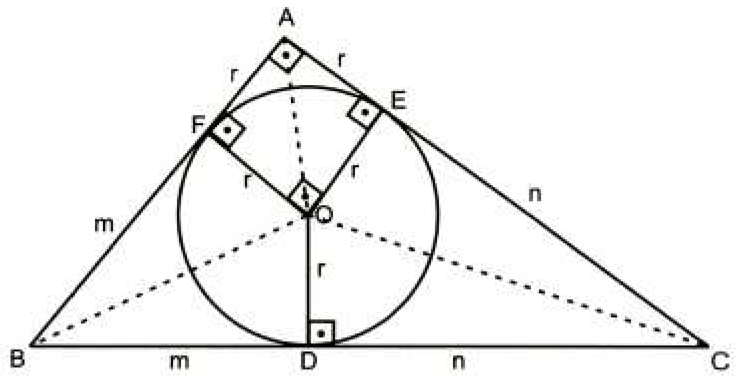
40



ABC bir dik üçgen. O merkezli ve r yarıçaplı çember, ABC üçgeninin içteğet çemberi olsun. |BD| = m, |DC| = n olsun.
Bu durumda;

$\boxed{A(ABC) = m.n}$ dir.

ispat:



Çemberin merkezi olan O noktasından, çemberin teğetleri olan D,E,F noktalarına doğru parçaları indirelim.
Bir çemberin merkezinden, teğetin değme noktasına indirilen doğru, teğeti dik kestiğinden (bkz 79)

[OD] $\perp$ [BC], [OE] $\perp$ [AC], [OF] $\perp$ [AB] olur.

Öte taraftan, çemberin bir dış noktasından çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan;

$|BF| = |BD| = m$, $|DC| = |CE| = n$ dir.

AFDE dörtgeni ele alındığında tüm köşeleri dik açı ve iki ardışık kenar uzunlukları eşit olduğundan AFDE bir karedir. Bu durumda;

$|AF| = |AE| = r$ dir.

O noktasını üçgenin köşelerine birleştiren doğru parçaları çizelim. Bu durumda ;

$A(ABC) = A(BOC) + A(BOA) + A(COA)$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \quad A(ABC) = \frac{1}{2}(m+n).r + \frac{1}{2}(m+r).r + \frac{1}{2}(n+r).r$$

$$= \frac{1}{2}(2m+2n+2r).r = r(m+n+r) \qquad ...(1)$$

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa (bkz 13)

$$(m + r)^2 + (n + r)^2 = (m + n)^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + r^2 + 2mr + n^2 + r^2 + 2nr = m^2 + n^2 + 2mn$$

$$\Rightarrow \quad r(m+n+r) = m.n \qquad ...(2)$$

O halde (1) ve (2) denklemlerinden hareketle

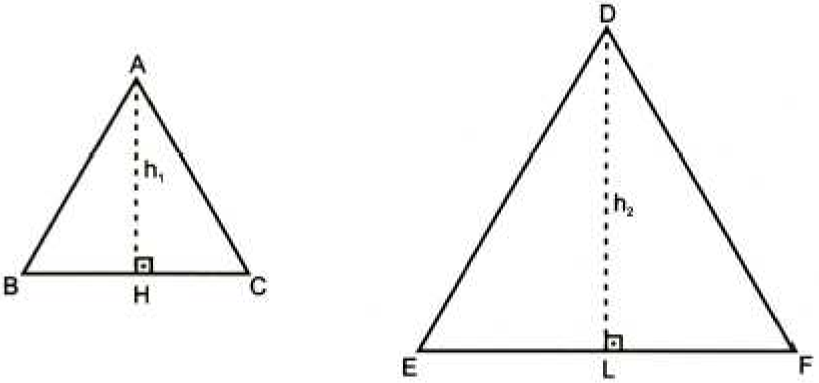
$$A(ABC) = r(m+n+r) = m.n$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A(ABC) = m.n}$ elde edilir.

41

Benzer iki üçgenin alanlarının oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

ispat:



$ABC \sim DEF$, $\dfrac{|BC|}{|EF|} = k$, $|AH| = h_1$ ve $|DL| = h_2$ olsun.

Benzer üçgenlerin karşılıklı yüksekliklerinin uzunluklarının oranı, benzerlik oranına eşit olduğundan

$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{h_1}{h_2} = k \quad \text{olur.}$$

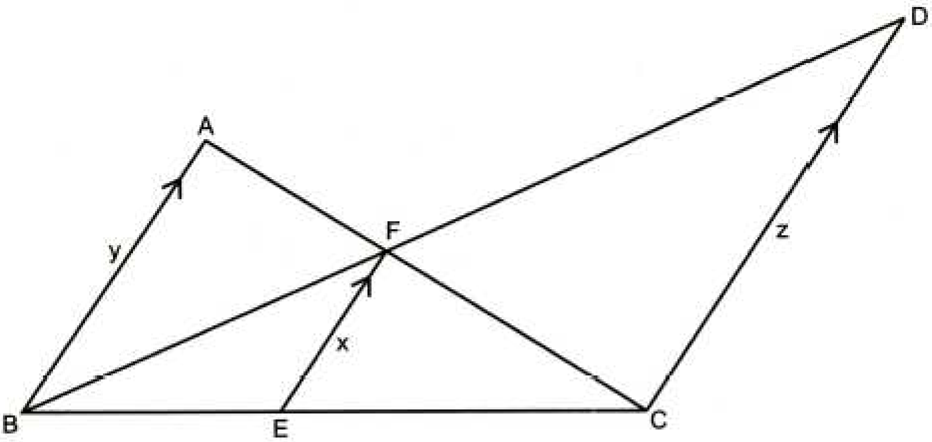
$$A(ABC) = \frac{1}{2}h_1.|BC| \qquad ...(1)$$

$$A(DEF) = \frac{1}{2}h_2.|EF| \qquad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{|BC|}{|EF|} = k.k = k^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = k^2} \quad \text{elde edilir.}$$

42



$|FE| = x$, $|AB| = y$, $|DC| = z$, olsun. $[AB] \parallel [CD] \parallel [FE]$ ise

x,y,z uzunlukları arasında $\boxed{\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ bağıntısı vardır.

ispat:

$|BF| = m$ ve $|FD| = n$ olsun. Verilen paralelliklerden

$CDF \sim ABF$ dir. $\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{z}{y}$ ...(1)

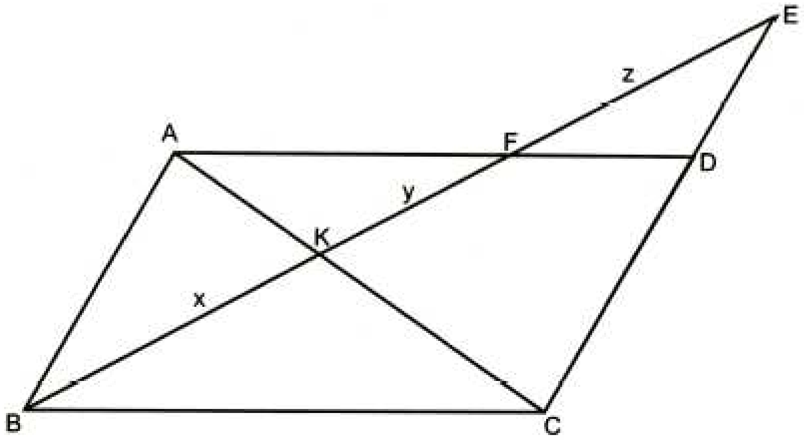
$BDC \sim BFE$ dir. $\Rightarrow \frac{m+n}{m} = \frac{z}{x} \Rightarrow 1 + \frac{n}{m} = \frac{z}{x}$ ...(2)

(1) denklemindeki n/m değeri (2) denkleminde yerine yazılırsa

$$1 + \frac{z}{y} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{z}{y.z} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ elde edilir.

43



ABCD bir paralelkenar, $|BK| = x$, $|KF| = y$, $|FE| = z$, olsun.

Bu durumda x,y,z uzunlukları arasında

$\boxed{x^2 = y.(y + z)}$ bağıntısı vardır.

ispat:

$|AK| = m$ ve $|KC| = n$ olsun.

paralellikten ters ve içters açılar yazılırsa

$ABK \sim CEK$ ve $AFK \sim CBK$ dir.

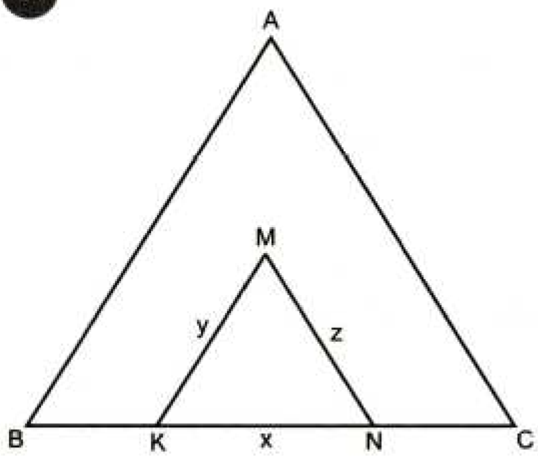
$ABK \sim CEK \Rightarrow \frac{x}{y+z} = \frac{m}{n}$ ...(1)

$AFK \sim CBK \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{m}{n}$ ...(2)

(1) ve (2) denklemlerinden

$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{x^2 = y.(y + z)}$ elde edilir.

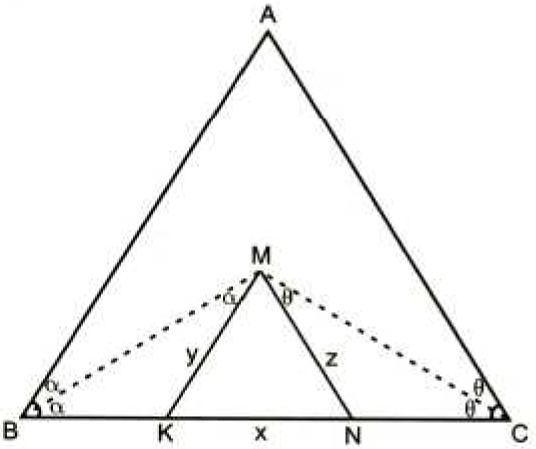
44



ABC üçgeninde M noktası, üçgenin iç açıortaylarının kesim noktası, [AB] // [MK], [AC] // [MN], |MK| = y, |MN| = z, |KN| = x, ise

$$\boxed{Ç(ABC) = \frac{(x+y+z)^2}{x}}$$ dir.

ispat:



M noktası ABC üçgeninin iç açıortay larının kesim noktası olduğundan [BM] ve [CM] açıortaydır.

içters açıdan;

$m(A\hat{B}M) = m(B\hat{M}K)$ ve

$m(A\hat{C}M) = m(C\hat{M}N)$ dir.

Dolayısıyla BMK ve CMN üçgenleri ikizkenar üçgenlerdir.

$\Rightarrow$ |MK| = |BK| = y ve |MN| = |CN| = z dir.

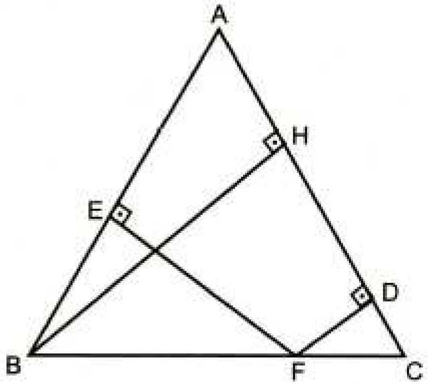
(Açı,Açı, Açı) dan ABC $\sim$ MKN dir.

$$\Rightarrow \frac{Ç(ABC)}{Ç(MKN)} = \frac{|BC|}{|KN|} = \frac{(x+y+z)}{x} \qquad ...(1)$$

Ç(MKN) = (x + y + z) değeri (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\boxed{Ç(ABC) = \frac{(x+y+z)^2}{x}}$$ elde edilir.

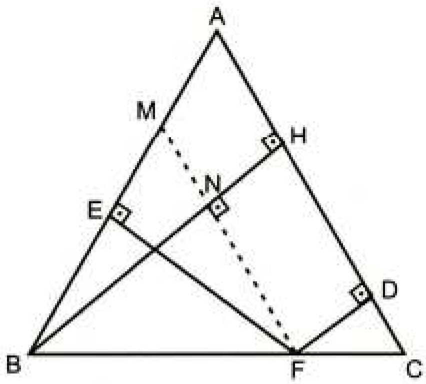
45



ABC bir ikizkenar üçgen.
$|AB| = |AC|$,
$[BH] \perp [AC]$, $[FD] \perp [AC]$, $[EF] \perp [AB]$,

ise $\boxed{|EF| + |FD| = |BH|}$ dir.

ispat 1:

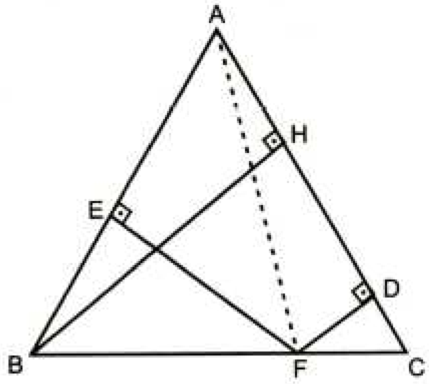


[AC] ye paralel bir [MF] doğru parçası çizelim. Bu durumda $[MF] \perp [BH]$ olur. Ayrıca MBF ikizkenar üçgen olur. ($|BM| = |MF|$) ve HNFD bir dikdörtgen olur. $|HN| = |DF|$ dir. Bir ikizkenar üçgende eşit tabanların yükseklikleri de eşit olduğundan $|EF| = |BN|$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} |BN| = |EF| \\ |HN| = |DF| \end{array}\right\} \quad |BN| + |HN| = |EF| + |FD|$$

$\Rightarrow$ $\boxed{|EF| + |FD| = |BH|}$ elde edilir.

ispat 2:



A noktasını F noktasına birleştiren bir doğru parçası çizelim.

$A(ABC) = A(ABF) + A(ACF)$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \quad A(ABC) = \frac{1}{2}|AB|.|EF| + \frac{1}{2}|AC|.|FD| \qquad ...(1)$$

diğer yandan

$$A(ABC) = \frac{1}{2}|AC|.|BH| \qquad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin eşitliğinden;

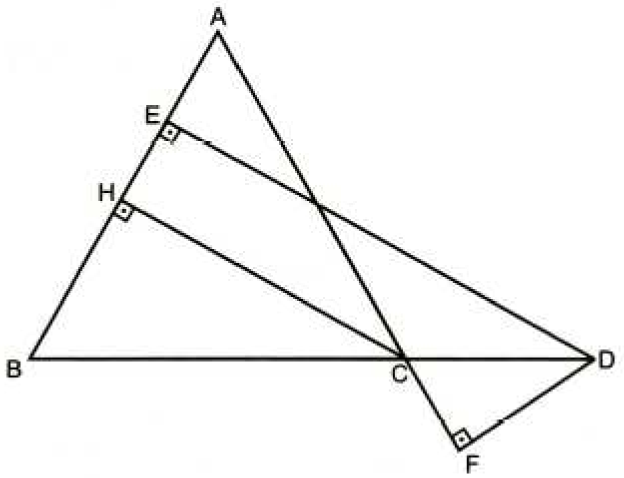
$$\frac{1}{2}|AC|.|BH| = \frac{1}{2}|AB|.|EF| + \frac{1}{2}|AC|.|FD| \qquad \text{dir.}$$

$|AB| = |AC|$ olduğundan

$$\frac{1}{2}|AC|.|BH| = \frac{1}{2}|AC|.(|EF| + |FD|)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|EF| + |FD| = |BH|} \quad \text{elde edilir.}$$

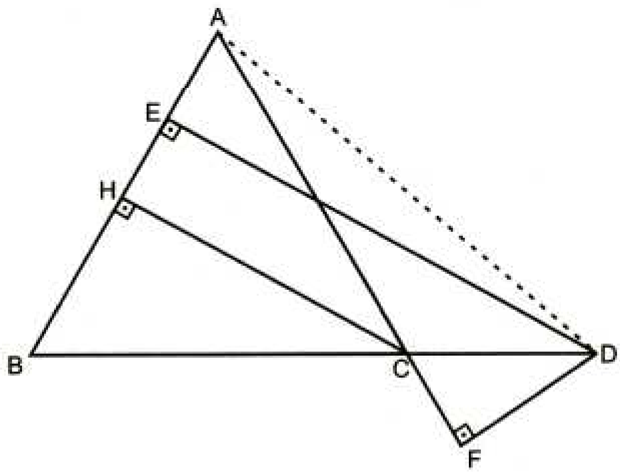
46



ABC bir ikizkenar üçgen,
$|AB| = |AC|$, B,C,D ve A,C,F noktaları doğrusal olsun.
Bu durumda;

$\boxed{|ED| - |DF| = |HC|}$ dir.

ispat:



A noktasını D noktasına birleştiren bir doğru parçası çizelim.

$A(BDA) = A(ABC) + A(ACD)$ yazılabilir.

$$A(BDA) = \frac{1}{2}|AB|.|HC| + \frac{1}{2}|AC|.|DF|$$

$|AB| = |AC|$ olduğundan

$$A(BDA) = \frac{1}{2}|AB|.(|HC| + |DF|) \qquad ...(1)$$

diğer yandan

$A(BDA) = \frac{1}{2}|AB|.|ED|$ ...(2)

(1) ve (2) denklemlerinin eşitliğinden;

$\frac{1}{2}|AB|.|ED| = \frac{1}{2}|AB|.(|HC| + |DF|)$ dir.

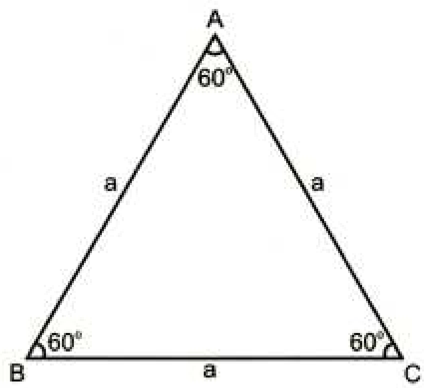
$\Rightarrow$ $\boxed{|ED| - |DF| = |HC|}$ elde edilir.

47

Bir kenar uzunluğu a birim olan bir eşkenar üçgenin alanı

$\boxed{\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}}$ birim karedir.

ispat:



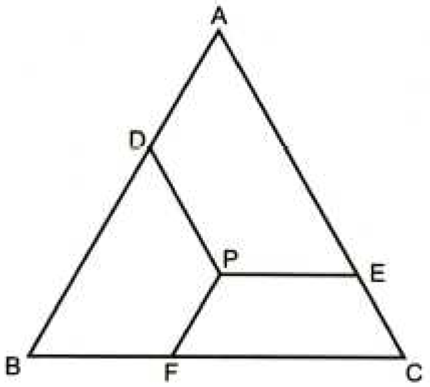
ABC eşkenar üçgen olduğundan
$|AB| = |BC| = |AC| = a$ ve
$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60°$ dir.

$A(ABC) = \frac{1}{2}|AB|.|AC|.\sin 60$ (bkz 34)

$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{A(ABC) = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}}$ elde edilir.

48



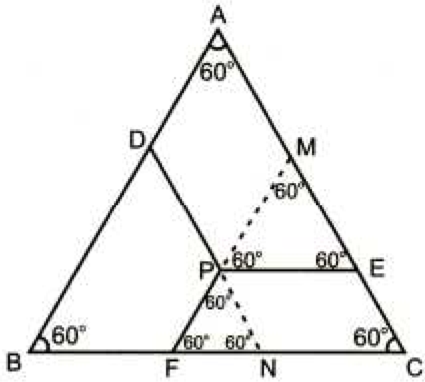
Bir eşkenar üçgenin bir iç noktasından üçgenin kenarlarına çizilen paralellerin uzunlukları toplamı, üçgenin bir kenarının uzunluğuna eşittir.

ABC bir eşkenar üçgen,

[DP] // [AC], [EP] // [BC], [FP] // [AB]

ise $\boxed{|DP| + |EP| + |FP| = |AB|}$ dir.

ispat:



M noktası [AC] üzerinde olmak üzere, [FP] doğrultusunda [PM] doğru parçasını çizelim.

Bu durumda ADPM bir paralelkenar olur ve |PD| = |MA| ...(1) dir.

Öte yandan MPE bir eşkenar üçgen olur ve |PE| = |ME| ...(2) dir.

[DP] doğrultusunda bir [PN] doğru parçası çizersek FPN bir eşkenar üçgen olur ve |PF| = |PN| ...(3) dir.

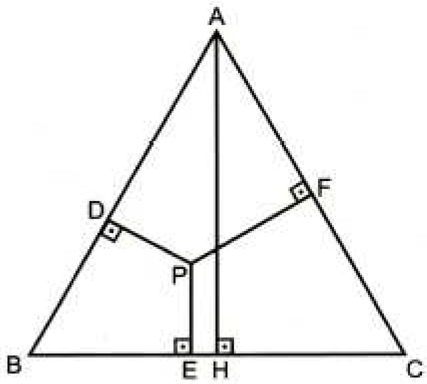
EPNC bir paralelkenar olduğundan |PN| = |EC| ...(4) dir.

(1),(2),(3),(4) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$|PD| + |PE| + |PF| = |MA| + |ME| + |EC|$$

$\Rightarrow$ $\boxed{|DP| + |EP| + |FP| = |AB|}$ elde edilir.

49

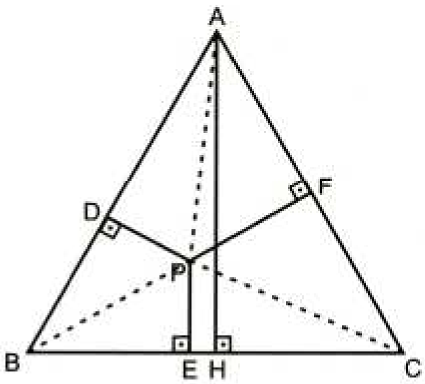


Bir eşkenar üçgenin bir iç noktasından üçgenin kenarlarına indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı, üçgenin yükekliğinin uzunluğuna eşittir.

ABC bir eşkenar üçgen olmak üzere;

$\boxed{|PD| + |PE| + |PF| = |AH|}$ dir.

ispat:



P noktasını ABC eşkenar üçgeninin köşelerine birleştiren doğru parçalarını çizersek;

A(ABC) = A(ABP) + A(BCP) + A(CAP) yazılabilir.

$$\Rightarrow \quad A(ABC) = \frac{1}{2}|PD|.|AB| + \frac{1}{2}|PE|.|BC| + \frac{1}{2}|PF|.|AC|$$

$|AB| = |BC| = |AC|$ olduğundan

$$A(ABC) = \frac{1}{2}|BC|.(|PD| + |PE| + |PF|) \qquad ...(1)$$

öte yandan

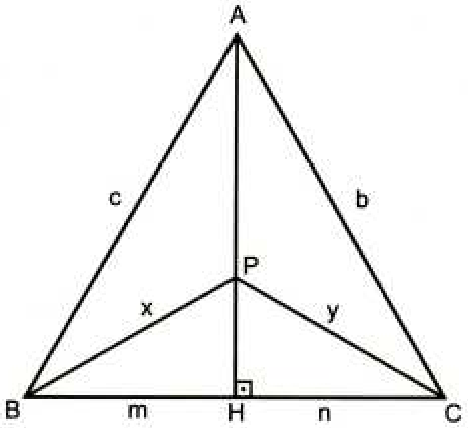
$$A(ABC) = \frac{1}{2}|AH|.|BC| \qquad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinden

$$\frac{1}{2}|AH|.|BC| = \frac{1}{2}|BC|.(|PD| + |PE| + |PF|)$$

$\Rightarrow \quad \boxed{|PD| + |PE| + |PF| = |AH|}$ elde edilir.

50



ABC bir üçgen, $[AH] \perp [BC]$,

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BP| = x$, $|PC| = y$,

ise $\boxed{c^2 + y^2 = b^2 + x^2}$ dir.

ispat:

$|BH| = m$ ve $|HC| = n$ olsun.

PBH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa (bkz **13**)

$x^2 = m^2 + |PH|^2$ ...(1)

PCH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$y^2 = n^2 + |PH|^2$ ...(2)

ABH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$c^2 = m^2 + |AH|^2$ ...(3)

ACH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

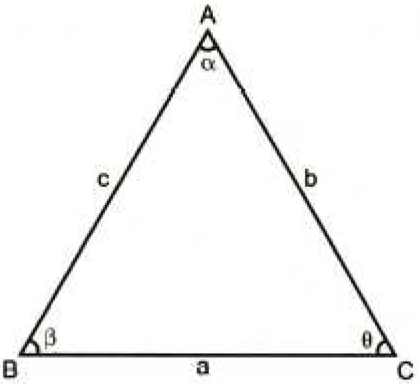
$b^2 = n^2 + |AH|^2$ ...(4)

(1),(2),(3),(4) denklemleri taraf tarafa (1)+(4)-(2)-(3) işlemlerine girerse

$x^2 + b^2 - y^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \boxed{c^2 + y^2 = b^2 + x^2}$ elde edilir.

51

SİNÜS TEOREMİ



ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu R,
$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$,
$m(\hat{A}) = \alpha$, $m(\hat{B}) = \beta$, $m(\hat{C}) = \theta$, ise

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} = 2R} \text{ dir.}$$

ispat:

$$A(ABC) = \frac{1}{2}b.c.\sin\alpha \quad ...(1) \quad (\text{bkz } 34)$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}a.c.\sin\beta \quad ...(2)$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}a.b.\sin\theta \quad ...(3)$$

$$A(ABC) = \frac{a.b.c}{4R} \quad ...(4) \quad (\text{bkz } 37)$$

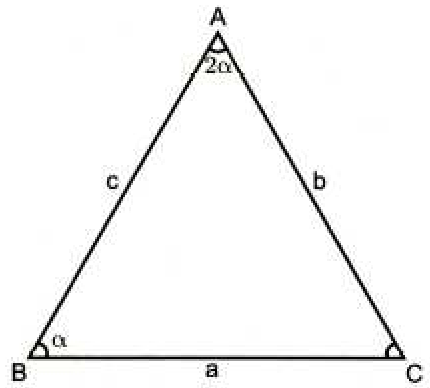
(1) ve (2) den $\quad \frac{1}{2}b.c.\sin\alpha = \frac{1}{2}a.c.\sin\beta \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad ...(i)$

(2) ve (3) den $\quad \frac{1}{2}a.c.\sin\beta = \frac{1}{2}a.b.\sin\theta \Rightarrow \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} \quad ...(ii)$

(3) ve (4) den $\quad \frac{1}{2}a.b.\sin\theta = \frac{a.b.c}{4R} \Rightarrow \frac{c}{\sin\theta} = 2R \quad ...(iii)$

(i), (ii), (iii) den $\quad \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} = 2R}$ elde edilir.

52



ABC bir üçgen,
$|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$,
$m(\hat{A}) = 2\alpha$, $m(\hat{B}) = \alpha$, ise

$\boxed{a^2 = b^2 + bc}$ dir.

ispat:

Sinüs teoremi gereğince; (bkz 51)

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin2\alpha} \text{ dir.} \qquad \sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha \text{ olduğundan}$$

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{a}{2b} \qquad ...(1)$$

Cosinüs teoremi gereğince; (bkz 27)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\alpha \text{ dir.} \qquad ...(2)$$

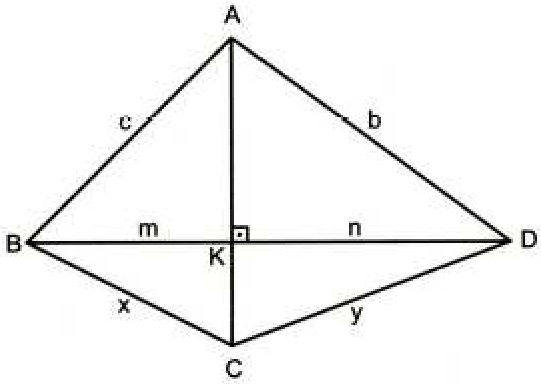
(1) denklemindeki $\cos\alpha$ değeri, (2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c\left(\frac{a}{2b}\right) = a^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b}$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = a^2\left(1 - \frac{c}{b}\right) \qquad \Rightarrow \quad (b - c)(b + c) = a^2\left(\frac{b-c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2 = b^2 + bc} \quad \text{elde edilir.}$$

53



ABCD bir dörtgen, $[AC] \perp [BD]$,

$[AC]$, $[BD]$ köşegen,

$|AB| = c$, $|AD| = b$, $|BC| = x$, $|CD| = y$

ise $\boxed{c^2 + y^2 = b^2 + x^2}$ dir.

ispat:

$|BK| = m$ ve $|DK| = n$ olsun.

BKC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa (bkz 13)

$x^2 = m^2 + |CK|^2$ ...(1)

DKC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$y^2 = n^2 + |CK|^2$ ...(2)

ABK dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$c^2 = m^2 + |AK|^2$ ...(3)

ADK dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

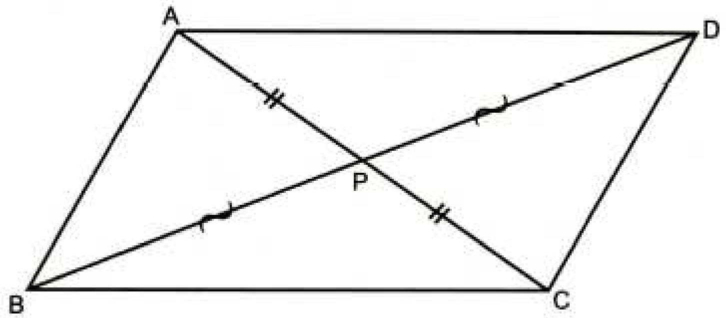
$b^2 = n^2 + |AK|^2$ ...(4)

(1),(2),(3),(4) denklemleri taraf tarafa (1)+(4)-(2)-(3) işlemlerine girerse

$x^2 + b^2 - y^2 - c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^2 + y^2 = b^2 + x^2}$ elde edilir.

54

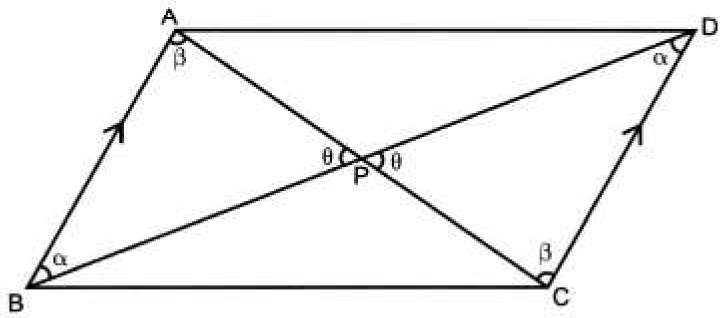
Bir paralel kenarın köşegenleri birbirini ortalar.



ABCD bir paralelkenar, [AC], [BD] köşegen olmak üzere

$\boxed{|AP| = |PC|,\ \ |BP| = |PD|}$ dir.

ispat:



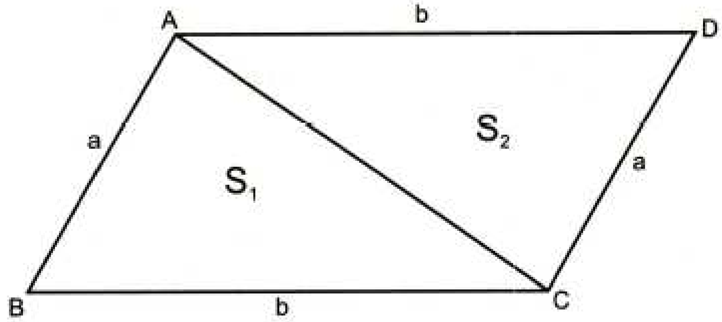
$m(A\hat{B}P) = \alpha$, $m(B\hat{A}P) = \beta$, $m(A\hat{P}B) = \theta$ diyelim. [AB] // [CD] olduğundan içters açılardan $m(C\hat{D}P) = \alpha$ ve $m(D\hat{C}P) = \beta$ olur, ters açıdan da $m(D\hat{P}C) = \theta$ olur. Bu durumda $ABP \sim CDP$ dir.

$$ABP \sim CDP \quad \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BP|}{|PD|} = \frac{|AP|}{|PC|} \quad \text{dir.}$$

$$|AB| = |CD| \text{ olduğundan } \frac{|AB|}{|CD|} = 1 \quad \Rightarrow \frac{|BP|}{|PD|} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{|AP|}{|PC|} = 1$$

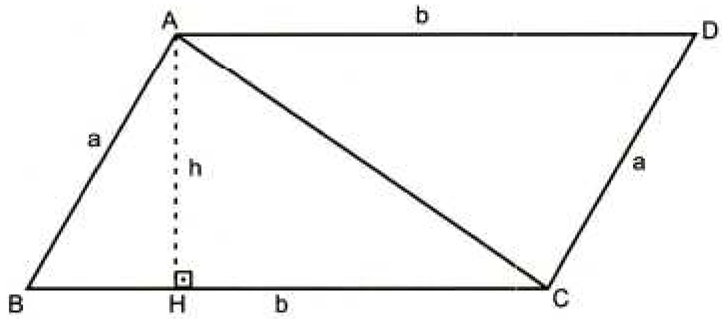
$\Rightarrow$ $\boxed{|AP| = |PC|,\ \ |BP| = |PD|}$ elde edilir.

55



ABCD bir paralelkenar, $|AB| = |DC| = a$, $|AD| = |BC| = b$,
$A(ABC) = S_1$, $A(ADC) = S_2$ ise $\boxed{S_1 = S_2}$ dir.

ispat:



ABCD paralelkenarının A köşesinden [BC] kenarına bir [AH] dikmesi indirelim ve [AH] = h olsun.

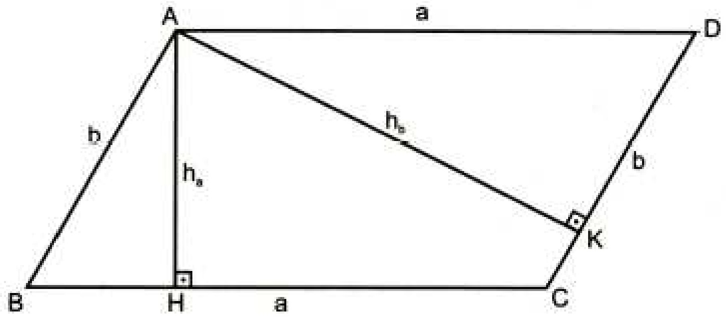
$$A(ABC) = \frac{1}{2}h.|BC| = \frac{1}{2}h.b = S_1 \quad ...(1)$$

$$A(ADC) = \frac{1}{2}h.|AD| = \frac{1}{2}h.b = S_2 \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa oranlanırsa;

$$\frac{S_1}{S_2} = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{S_1 = S_2}$$ elde edilir.

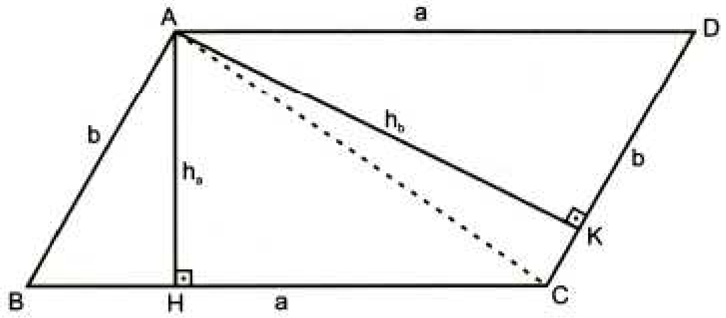
56



ABCD bir paralelkenar, $|AH| = h_a$, $|AK| = h_b$, $|DC| = b$, $|BC| = a$,

ise $\boxed{A(ABCD) = a.h_a = b.h_b}$ dir.

ispat:



[AC] köşegenini çizersek;

A(ABC) = A(ADC) olduğundan (bkz 55)

$\frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}h_b.b \Rightarrow h_a.a = h_b.b$

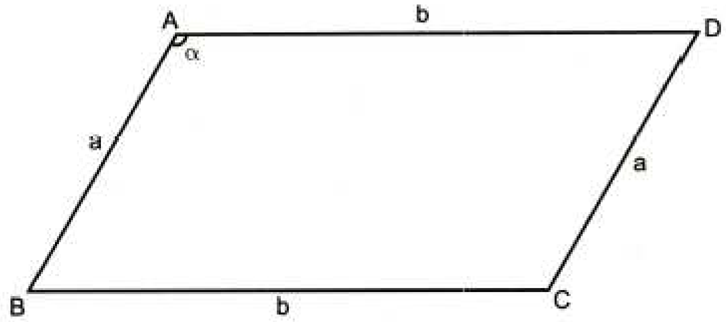
A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC) dir.

$\Rightarrow A(ABCD) = \frac{1}{2}h_a.a + \frac{1}{2}h_b.b$ dir. $h_a.a = h_b.b$ olduğundan

$A(ABCD) = \frac{1}{2}h_a.a + \frac{1}{2}h_a.b = h_a.a = h_b.b$

$\Rightarrow$ $\boxed{A(ABCD) = a.h_a = b.h_b}$ elde edilir.

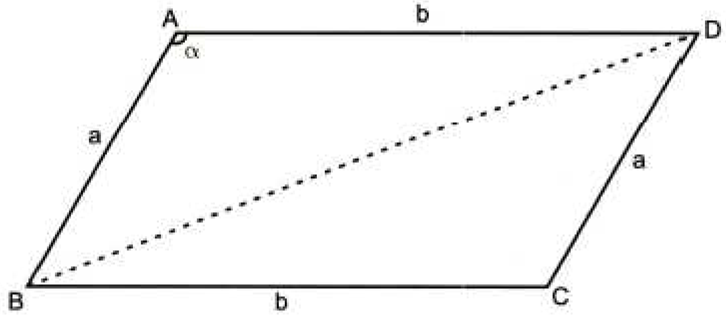
57



ABCD bir paralelkenar, |AB| = |DC| = a, |AD| = b, |BC| = b,

m(BÂD) = α ise $\boxed{A(ABCD) = a.b.\sin\alpha}$ dir.

ispat:



[BD] köşegenini çizersek;

A(ABCD) = A(ABD) + A(BCD) yazılabilir.

A(ABD) = A(BCD) olduğundan (bkz 55)

A(ABCD) = 2.A(ABD) ...(1)

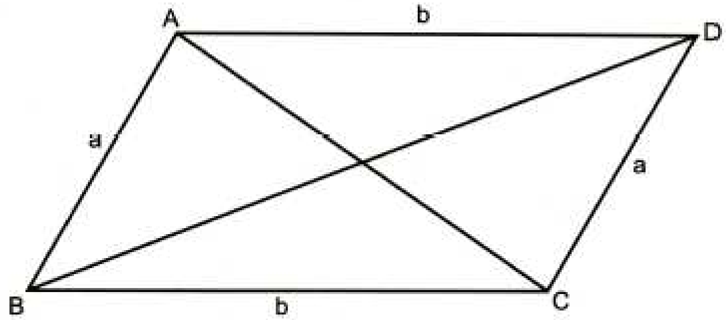
A(ABD) = $\frac{1}{2}$a.b.sinα ...(2) (bkz 34)

(1) ve (2) denklemlerinden;

A(ABCD) = 2 $\frac{1}{2}$a.b.sinα

$\Rightarrow$ $\boxed{A(ABCD) = a.b.\sin\alpha}$ elde edilir.

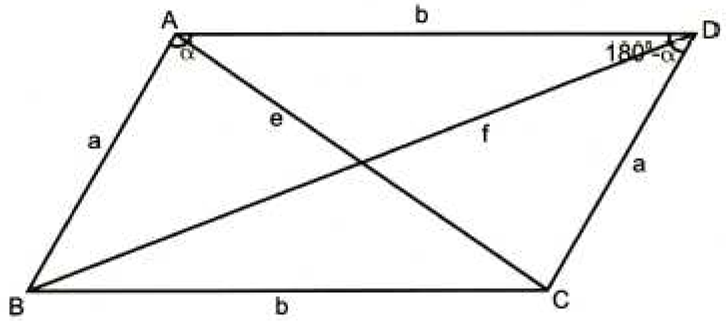
58



ABCD bir paralelkenar, $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AC| = f$, $|BD| = e$ ise

$\boxed{e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)}$ dir.

ispat:



$m(B\hat{A}D) = \alpha$ denirse $m(A\hat{D}C) = 180^\circ - \alpha$ olur.

BAD üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa (bkz 27)

$e^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\alpha$ ...(1)

ADC üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

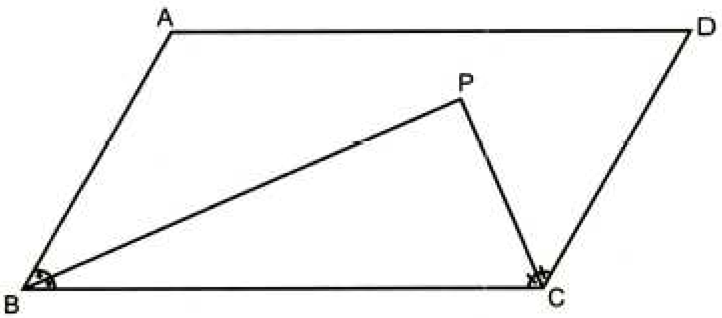
$f^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(180-\alpha)$, $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ olduğundan

$f^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$ ...(2)

(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

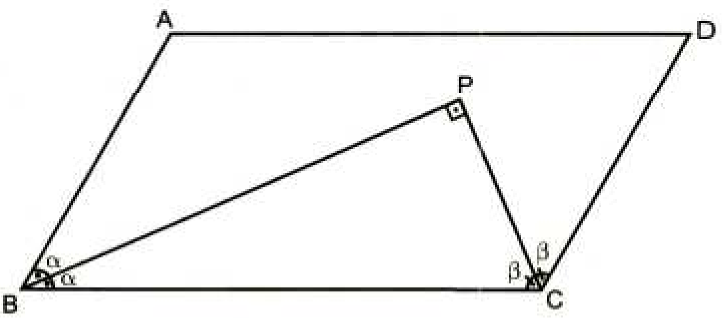
$\boxed{e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)}$ elde edilir.

59



ABCD bir paralelkenar, [BP], [CP] açıortay ise $\boxed{m(B\hat{P}C) = 90^\circ}$ dir.

ispat:



$m(A\hat{B}P) = m(C\hat{B}P) = \alpha$, ve $m(D\hat{C}P) = m(B\hat{C}P) = \beta$,

[AB] // [DC] olduğundan

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ dir.

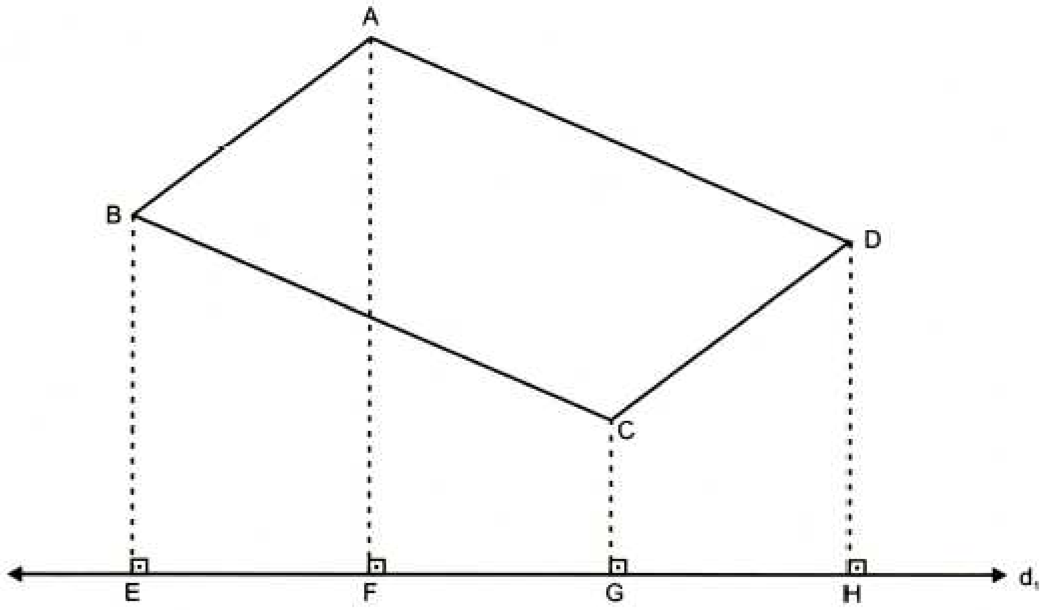
$\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 90^\circ$ dir.

BCP üçgeni dikkate alındığında

$m(B\hat{P}C) + \alpha + \beta = 180^\circ$ dir

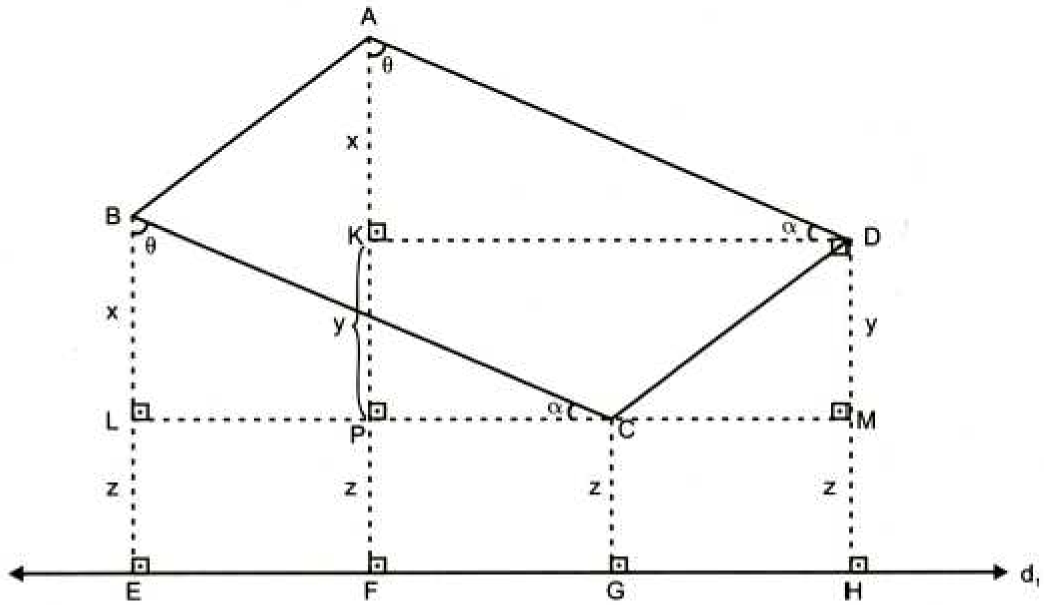
$\Rightarrow$ $\boxed{m(B\hat{P}C) = 90^\circ}$ elde edilir.

60



ABCD bir paralelkenar, [BE], [AF], [CG], [DH] doğru parçaları B,A,C,D köşelerinden d_1 doğrusuna indirilen dikmeler ise $\boxed{|BE| + |DH| = |AF| + |CG|}$ dir.

ispat:



d_1 doğrusuna paralel olacak şekilde [KD] ve [LM] doğru parçaları çizelim. (K noktası [AB] üzerinde, L noktası [BE] üzerinde, C noktası [LM] üzerinde ve M noktası [DH] üzerinde)

Bu durumda $AKD \sim BLC$ dir.

$$AKD \sim BLC \quad \Rightarrow \quad \frac{|AK|}{|BL|} = \frac{|AD|}{|BC|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|AK|}{|BL|} = \frac{b}{b} = 1$$

$\Rightarrow \quad |AK| = |BL|$ dir. $\quad |AK| = |BL| = x$ diyelim.

Dikkat edilirse KPMD bir dikdörtgendir ve $|KP| = |DM|$ dir.

$|KP| = |DM| = y$ diyelim.

Yine dikkat edilirse $|LE| = |PF| = |CG| = |MH|$ dir.

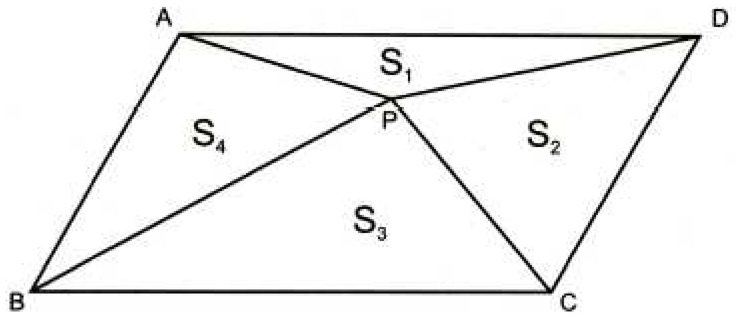
$|LE| = |PF| = |CG| = |MH| = z$ diyelim.

$|BE| + |DH|$ toplamına bakılacak olursa

$|BE| + |DH| = (x + z) + (y + z) = (x + y + z) + z = |AF| + |CG|$

$\Rightarrow \boxed{|BE| + |DH| = |AF| + |CG|}$ elde edilir.

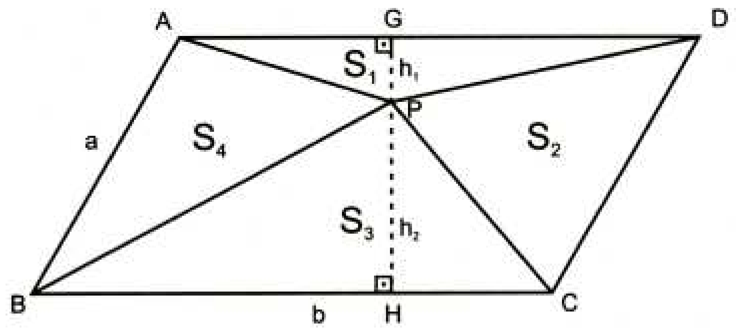
61



ABCD bir paralelkenar, P noktası paralelkenar içinde herhangi bir nokta olmak üzere S_1, S_2, S_3, S_4 bulundukları üçgenlerin alanlarını göstersin. Bu durumda;

$\boxed{S_1 + S_3 = S_2 + S_4}$ dir.

ispat:



P noktasından geçecek şekilde [AD] doğru parçasından [BC] doğru parçasına bir [GH] dik doğru parçası çizelim. |AB| = a, |BC| = b, diyelim.

$A(ABCD) = (h_1 + h_2).b \qquad ...(1)$

Aynı zamanda;

$A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \qquad ...(2)$

Öte yandan;

$$S_1 = \frac{h_1.b}{2} \quad \text{ve} \quad S_3 = \frac{h_2.b}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{(h_1 + h_2)b}{2} = S_1 + S_3 \quad ...(3)$$

(3) denklemindeki $(S_1 + S_3)$ toplamı (2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$A(ABCD) = \frac{(h_1 + h_2)b}{2} + S_2 + S_4 \quad ...(4)$$

(1) ve (4) denklemlerinin eşitliğinden

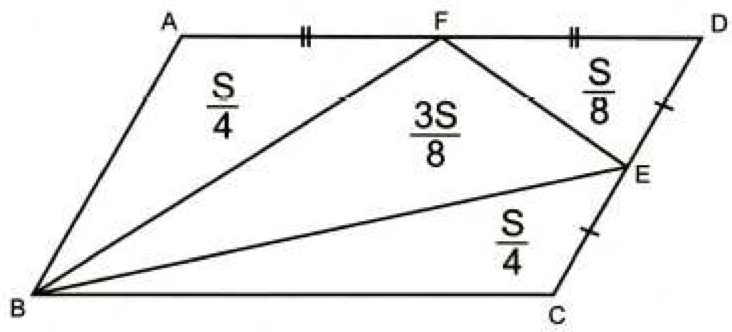
$$(h_1 + h_2).b = \frac{(h_1 + h_2)b}{2} + S_2 + S_4$$

$$\Rightarrow \quad S_2 + S_4 = \frac{(h_1 + h_2)b}{2} \quad ...(5)$$

(3) ve (5) denklemlerinin eşitliğinden

$\boxed{S_1 + S_3 = S_2 + S_4}$ elde edilir.

62

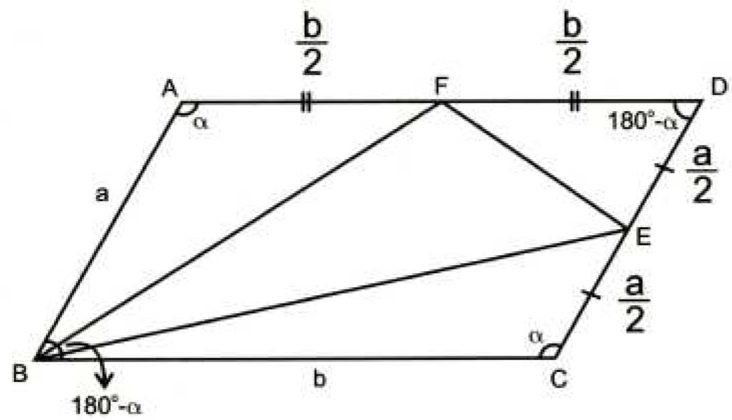


ABCD bir paralelkenar, E ile F noktaları sırasıyla [DC] ve [AD] doğru parçalarının orta noktaları olmak üzere

A(ABCD) = S ise

$\boxed{A(ABF) = \frac{S}{4}}$, $\boxed{A(BCE) = \frac{S}{4}}$, $\boxed{A(EDF) = \frac{S}{8}}$, $\boxed{A(BEF) = \frac{3S}{8}}$ dir.

ispat:



$|AB| = |DC| = a$, $|AD| = |BC| = b$, $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ olsun.

Sinüs alan formülünden hareketle (bkz 57)

$$A(ABCD) = a.b.\sin\alpha = S \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{S}{a.b} \quad ...(1)$$

$$A(ABF) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{a.b}{4} \cdot \sin\alpha \qquad ...(2)$$

(1) denklemindeki $\sin\alpha$ değeri (2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$A(ABF) = \frac{a.b}{4} \cdot \frac{S}{a.b} = \frac{S}{4} \qquad \Rightarrow \boxed{A(ABF) = \frac{S}{4}}$$ elde edilir.

$$A(BCE) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha \qquad ...(3)$$

(1) denklemindeki $\sin\alpha$ değeri (3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$A(BCE) = \frac{a.b}{4} \cdot \frac{S}{a.b} = \frac{S}{4} \qquad \Rightarrow \boxed{A(BCE) = \frac{S}{4}}$$ elde edilir.

$$A(EDF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin(180-\alpha)$$ $\{ \sin(180-\alpha) = \sin\alpha$ olduğundan $\}$

$$A(EDF) = \frac{a.b}{8} \cdot \sin\alpha \qquad ...(4)$$

(1) denklemindeki $\sin\alpha$ değeri (4) denkleminde yerine yazılırsa;

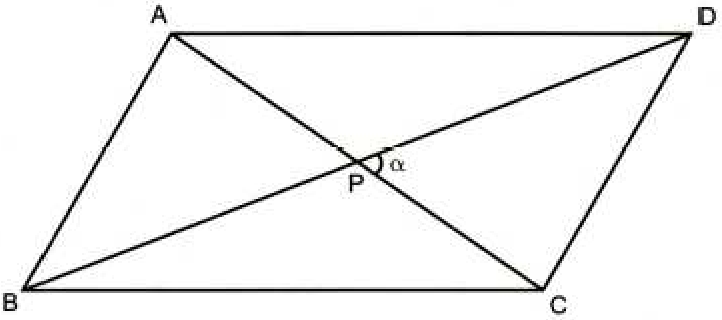
$$A(EDF) = \frac{a.b}{8} \cdot \frac{S}{a.b} = \frac{S}{8} \qquad \Rightarrow \boxed{A(EDF) = \frac{S}{8}}$$ elde edilir.

Şimdi alanlarını bulduğumuz bu üç üçgenin alanları toplamını, paralelkenarın alanından çıkartırsak BEF üçgeninin alanını elde etmiş oluruz. O halde

$$A(BEF) = S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4} - \frac{S}{8} = \frac{3S}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(BEF) = \frac{3S}{8}}$$ elde edilir.

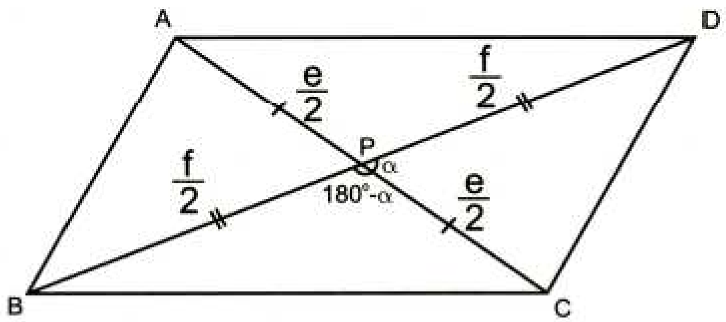
63



ABCD bir paralelkenar, [AC] ve [BD] köşegen, $m(D\hat{P}C) = \alpha$,

$|AC| = e$ ve $|BD| = f$ ise $\boxed{A(ABCD) = \frac{e.f}{2}\sin\alpha}$ dir.

ispat:



ABCD bir paralelkenar olduğundan $|AP| = |PC| = e/2$ ve
$|DP| = |PB| = f/2$ dir. (bkz 54)

$A(ABCD) = 2.A(ABC)$ (bkz 55) $\Rightarrow A(ABCD) = 2[A(ABP) + A(BPC)]$

Sinüs alan formülünden hareketle (bkz 34)
APB ve BPC üçgenlerinin alanları yazılırsa

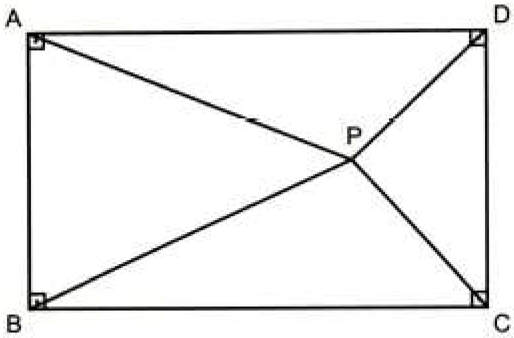
$$A(ABCD) = 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\frac{e}{2}\sin(180-\alpha)\right]$$

$\sin\alpha = \sin(180-\alpha)$ olduğundan

$$A(ABCD) = 2\left(\frac{e.f}{8}\sin\alpha + \frac{e.f}{8}\sin\alpha\right) = \frac{e.f}{2}\sin\alpha$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A(ABCD) = \frac{e.f}{2}\sin\alpha}$ elde edilir.

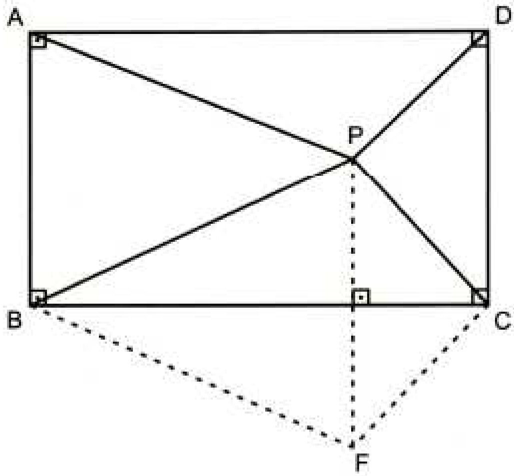
64



ABCD bir dikdörtgen, P noktası dikdörtgenin bir iç noktası olmak üzere;

$\boxed{|AP|^2 + |PC|^2 = |DP|^2 + |PB|^2}$ dir.

ispat:



[DP] ye paralel ve [DP] nin boyu kadar bir [FC] doğru parçası çizelim. P ve B noktalarını F noktasına birleştiren doğru parçalarını çizelim.

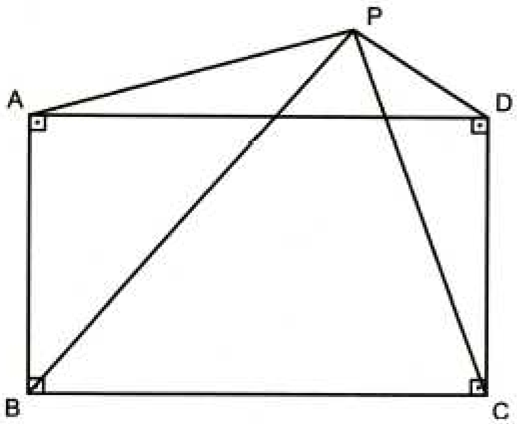
Bu durumda ABFP ve DPFC birer paralelkenar olur ve $[PF] \perp [BC]$ dir. Yani $|AB| = |PF| = |DC|$, $[AB] // [PF] // [DC]$, $|AP| = |BF|$, $|PD| = |FC|$ olur. BFCP dikkate alındığında köşegenleri dik kesişen bir dörtgendir.

Dolayısıyla $|BP|^2 + |FC|^2 = |BF|^2 + |PC|^2$ ...(1) (bkz 53)

$|FC|$ ve $|BF|$ nin eşitleri (1) denkleminde yerine yazılırsa;

$\boxed{|AP|^2 + |PC|^2 = |DP|^2 + |PB|^2}$ elde edilir.

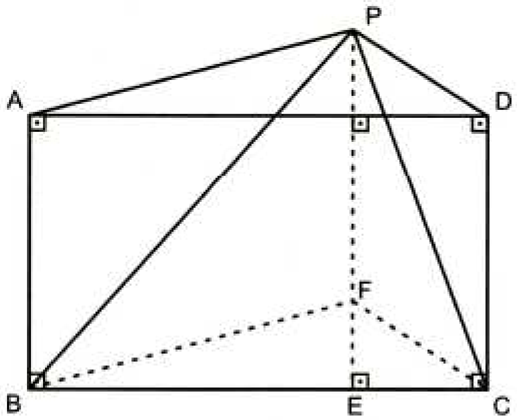
65



ABCD bir dikdörtgen, P noktası dikdörtgenin bir dış noktası olmak üzere;

$\boxed{|AP|^2 + |PC|^2 = |DP|^2 + |PB|^2}$ dir.

ispat:



[DP] ye paralel ve [DP] nin boyu kadar bir [FC] doğru parçası çizelim. P ve B noktalarını F noktasına birleştiren doğru parçalarını çizelim.

Bu durumda ABFP ve DPFC birer paralelkenar olur ve $[PF] \perp [AD]$ dir. Yani $|AB| = |PF| = |DC|$, $[AB] \,//\, [PF] \,//\, [DC]$, $|AP| = |BF|$, $|PD| = |FC|$ olur. Ayrıca [PF] doğrultusunda F noktasını [BC] ye birleştiren bir [FE] doğru parçası çizilirse $[FE] \perp [BC]$ olur.

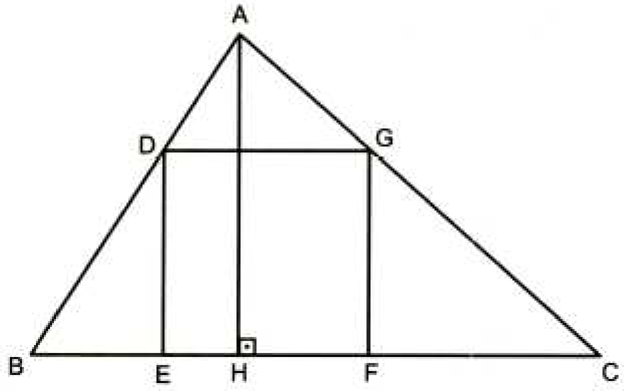
PBC üçgeni dikkate alındığında;

$|BP|^2 + |FC|^2 = |BF|^2 + |PC|^2$ ...(1) (bkz 50)

|FC| ve |BF| nin eşitleri (1) denkleminde yerine yazılırsa;

$\boxed{|AP|^2 + |PC|^2 = |DP|^2 + |PB|^2}$ elde edilir.

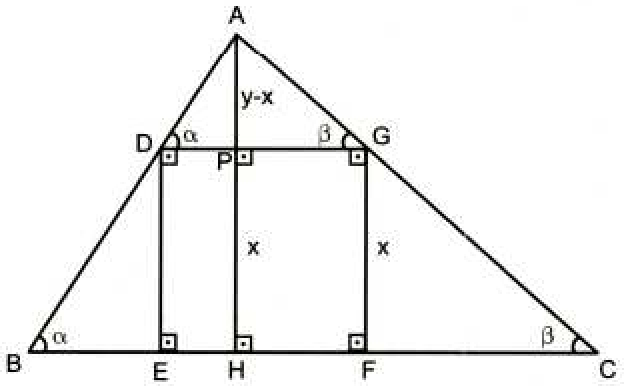
66



ABC bir üçgen, DEFG dörtgeni bir kenarı x olan bir kare,

$[AH] \perp [BC]$ ve $|AH| = y$ ise $\boxed{|BC| = \dfrac{y.x}{y-x}}$ dir.

ispat:

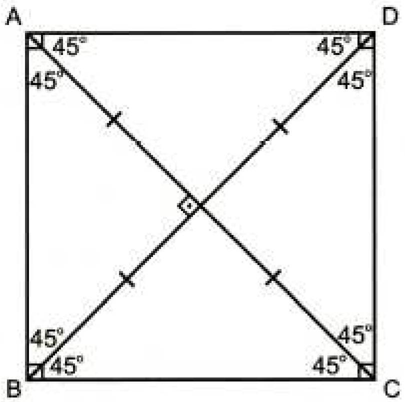


DEFG bir kare olduğundan $[DG] \parallel [BC]$ ve $[FG] \parallel [AH]$ dir.
Bu durumda $[AP] \perp [DG]$, $|DG| = |DE| = |EF| = |FG| = |PH| = x$,
$|AP| = y - x$ dir ve $ADG \sim ABC$ olur.

$$ADG \sim ABC \quad \Rightarrow \quad \frac{|AP|}{|AH|} = \frac{|DG|}{|BC|} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-x}{y} = \frac{x}{|BC|}$$

$\Rightarrow \boxed{|BC| = \dfrac{y.x}{y-x}}$ elde edilir.

67



ABCD bir kenarı a birim olan bir kare olsun. Bu durumda

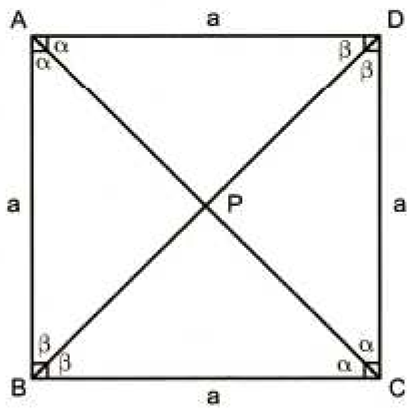
a) Köşegenler açıların açıortayıdır.

b) Köşegenler birbirini dik keser.

c) |AP| = |BP| = |CP| = |DP| dir.

d) A(ABCD) = a^2 dir

ispat:



a) m(BÂC) = α diyelim. ABC ikizkenar üçgen olduğundan (bkz 08)

m(BĈA) = α dir. [AD] // [BC] olduğundan m(DÂC) = α dir.

(içters açı) ADC ikizkenar üçgen olduğundan m(DĈA) = α dir.

m(BÂD) = 90° olduğundan

$2\alpha = 90° \Rightarrow \boxed{\alpha = 45°}$ elde edilir.

$m(D\hat{B}A) = \beta$ diyelim. BAD ikizkenar üçgen olduğundan (bkz 08)

$m(B\hat{D}A) = \beta$ dir. [AB] // [DC] olduğundan $m(C\hat{D}B) = \beta$ dir.

(içters açı) BDC ikizkenar üçgen olduğundan $m(C\hat{B}D) = \beta$ dir.

$m(A\hat{B}C) = 90°$ olduğundan

$2\beta = 90° \Rightarrow \boxed{\beta = 45°}$ elde edilir.

b) ABP üçgenini ele alırsak $\alpha + \beta + m(A\hat{P}B) = 180°$

$\Rightarrow \quad 45 + 45 + m(A\hat{P}B) = 180°$

$\Rightarrow \quad \boxed{m(A\hat{P}B) = 90°}$ elde edilir.

c) APB, APD, CBP, CDP üçgenleri ikizkenar üçgen olduklarından

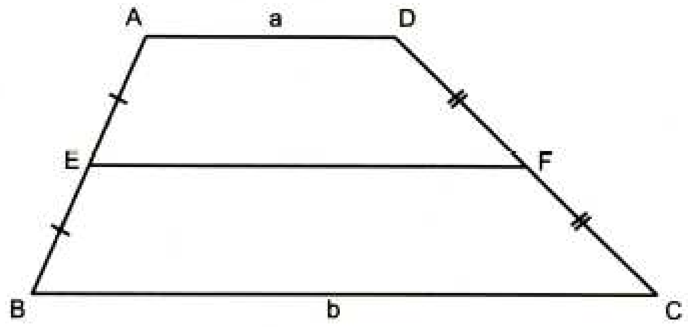
$\Rightarrow \quad \boxed{|AP| = |BP| = |CP| = |DP|}$ elde edilir.

d) $A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC)$

$$= \frac{1}{2}a.a + \frac{1}{2}a.a = a^2$$

$\Rightarrow \boxed{A(ABCD) = a^2}$ elde edilir.

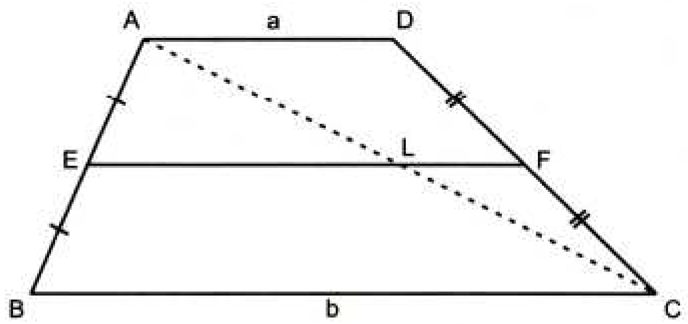
68



ABCD bir yamuk, [EF] orta taban, $|AD| = a$, $|BC| = b$, ise

$\boxed{|EF| = \frac{a+b}{2}}$ dir.

ispat:



ABCD yamuğunun [AC] köşegeni çizilirse, $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|DF|}{|FC|}$ olduğundan

$[AD] \mathbin{/\mkern-6mu/} [EF] \mathbin{/\mkern-6mu/} [BC]$ dir. (Thales) $\Rightarrow AEL \sim ABC$ ve $CFL \sim CDA$ dir.

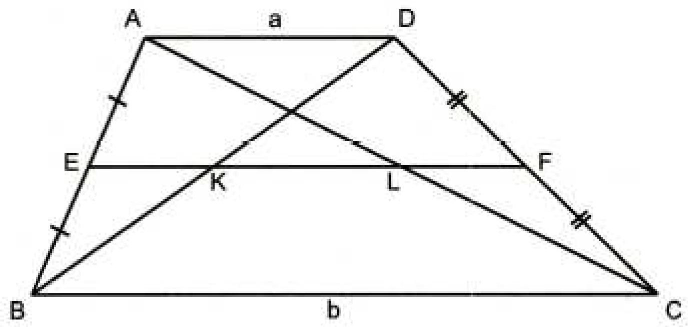
$$AEL \sim ABC \quad \Rightarrow \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EL|}{|BC|} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EL|}{b} \quad \Rightarrow |EL| = \frac{b}{2}$$

$$CFL \sim CDA \quad \Rightarrow \frac{|CF|}{|CD|} = \frac{|FL|}{|DA|} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|FL|}{a} \quad \Rightarrow |FL| = \frac{a}{2}$$

$$|EF| = |EL| + |FL| = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{|EF| = \frac{a+b}{2}}$ elde edilir.

69



ABCD bir yamuk, [EF] orta taban, $|AD| = a$, $|BC| = b$, ise

$\boxed{|KL| = \dfrac{b-a}{2}}$ dir.

ispat:

ABCD yamuğunında, $\dfrac{|AE|}{|EB|} = \dfrac{|DF|}{|FC|}$ olduğundan

$[AD] \parallel [EF] \parallel [BC]$ dir. (Thales) $\Rightarrow AEL \sim ABC$ ve $BEK \sim BAD$ dir.

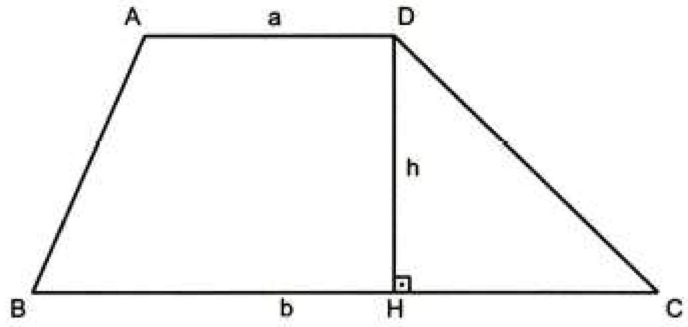
$$AEL \sim ABC \quad \Rightarrow \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EL|}{|BC|} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EL|}{b} \quad \Rightarrow |EL| = \frac{b}{2}$$

$$BEK \sim BAD \quad \Rightarrow \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{|EK|}{|AD|} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|EK|}{a} \quad \Rightarrow |EK| = \frac{a}{2}$$

$$|KL| = |EL| - |EK| = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{|KL| = \dfrac{b-a}{2}}$ elde edilir.

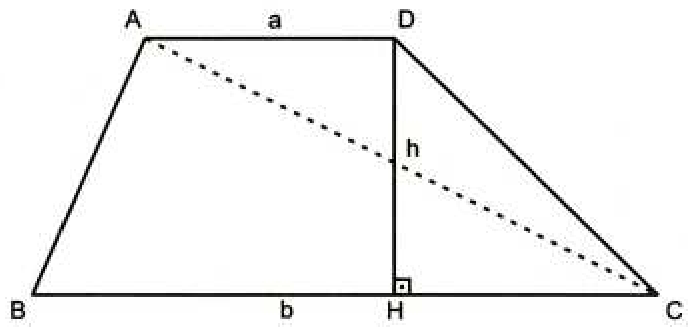
70



ABCD bir yamuk, $[HD] \perp [BC]$, $|HD| = h$, $|AD| = a$, $|BC| = b$, ise

$\boxed{A(ABCD) = \frac{(a + b).h}{2}}$ dir.

ispat:



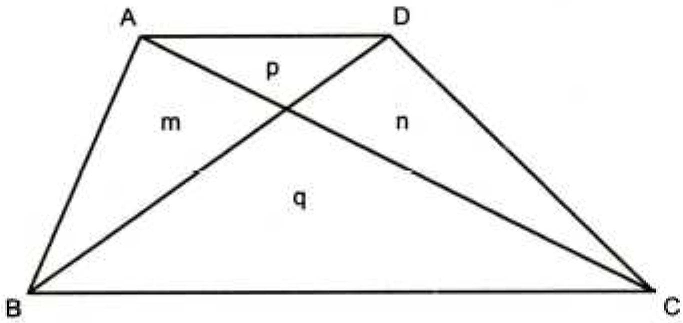
ABCD yamuğunun [AC] köşegenini çizelim.

$A(ABCD) = A(ABC) + A(CDA)$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \quad A(ABCD) = \frac{b.h}{2} + \frac{a.h}{2} = \frac{(a + b).h}{2}$$

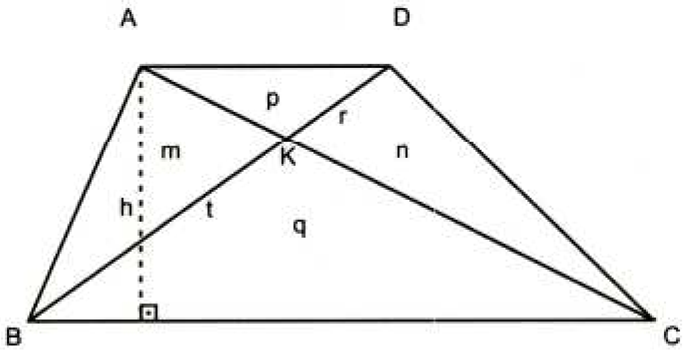
$\Rightarrow \quad \boxed{A(ABCD) = \frac{(a + b).h}{2}}$ elde edilir.

71



ABCD bir yamuk, m,n,p,q bulundukları üçgenlerin alanlarını temsil etsin. Bu durumda; $\boxed{m = n}$ ve $\boxed{m^2 = p.q}$ dir.

ispat:



ABC ve DBC üçgenlerinin [BC] kenarına ait yüksekliğine h dersek;

$$A(ABC) = \frac{h.|BC|}{2} \quad \text{ve} \quad A(DBC) = \frac{h.|BC|}{2}$$

$\Rightarrow$ A(ABC) = A(DBC) dir. $\Rightarrow$ $m + q = n + q$ $\Rightarrow$ $\boxed{m = n}$ elde edilir.

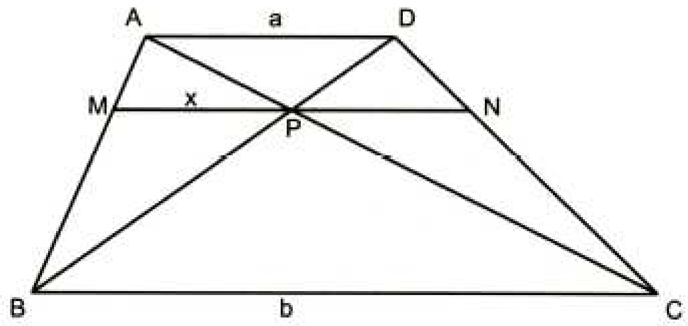
K köşegenlerin kesim noktası olmak üzere $|BK| = t$ ve $|DK| = r$ diyelim. Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanlarının oranına eşit olduğundan (bkz 38)

$$\frac{m}{p} = \frac{t}{r} \quad ...(1) \qquad \text{ve} \qquad \frac{q}{n} = \frac{t}{r} \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin eşitliğinden;

$$\frac{m}{p} = \frac{q}{n} \quad \Rightarrow m.n = p.q \quad \Rightarrow \boxed{m^2 = p.q}$$ elde edilir.

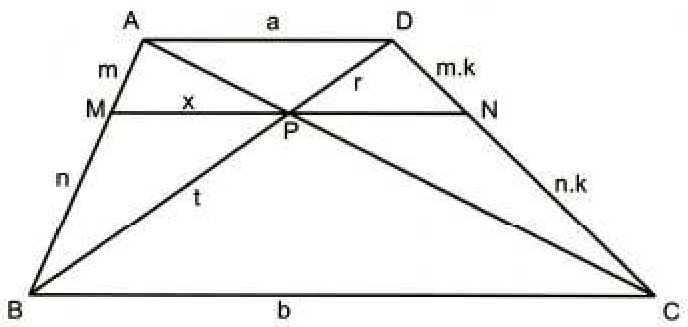
72



ABCD bir yamuk, köşegenlerin kesim noktası P, [AD] // [MN] // [BC], P∈[MN], |AD| = a, |BC| = b, |MP| = x, ise

$\boxed{|MP| = |PN| = x}$ ve $\boxed{x = \dfrac{a.b}{a+b}}$ dir.

ispat:



|MA| = m, |MB| = n dersek, [AD] // [MN] // [BC] olduğundan

$\dfrac{|MA|}{|MB|} = \dfrac{|DN|}{|NC|}$ dir. (Thales) $\Rightarrow$ |DN| = m.k ve |NC| = n.k yazılabilir.

BPM ~ BDA ve CPN ~ CAD dir.

$$BPM \sim BDA \quad \Rightarrow \frac{|BM|}{|BA|} = \frac{|MP|}{|AD|} \quad \Rightarrow \frac{n}{m+n} = \frac{x}{a} \quad ...(1)$$

$$CPN \sim CAD \quad \Rightarrow \frac{|CN|}{|CD|} = \frac{|PN|}{|AD|} \quad \Rightarrow \frac{n.k}{(m+n).k} = \frac{|PN|}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{m+n} = \frac{|PN|}{a} \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin eşitliğinden;

$|PN| = x$ dir. $\Rightarrow$ $\boxed{|MP| = |PN| = x}$ elde edilir.

$|BP| = t$ ve $|PD| = r$ diyelim.

$ADP \sim CBP$ olduğundan

$$\frac{|DP|}{|BP|} = \frac{|AD|}{|CB|} \quad \Rightarrow \frac{r}{t} = \frac{a}{b} \quad ...(3)$$

öte yandan $BPM \sim BDA$ dir.

$$\Rightarrow \frac{|BP|}{|BD|} = \frac{|MP|}{|AD|} \quad \Rightarrow \frac{t}{t+r} = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \frac{t+r}{t} = \frac{a}{x}$$

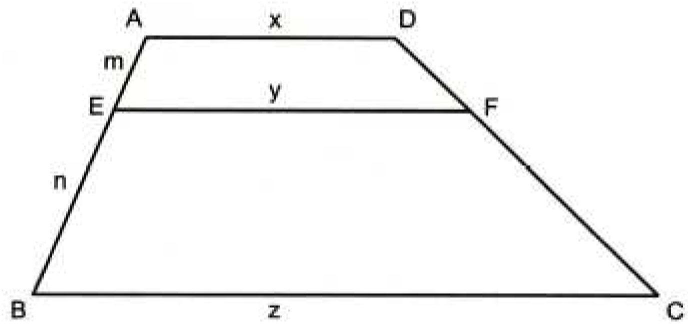
$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{r}{t} = \frac{a}{x} \quad ...(4)$$

(3) denklemindeki r/t değeri (4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$1 + \frac{a}{b} = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \frac{b+a}{b} = \frac{a}{x}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{a.b}{a+b}}$ elde dilir.

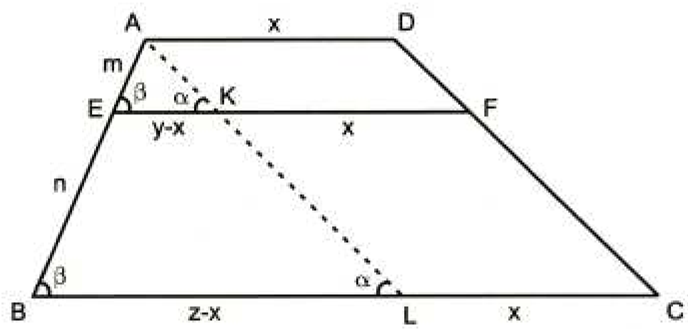
73



ABCD bir yamuk, [AD] // [EF] // [BC], |AD| = x, |EF| = y, |BC| = z

|AE| = m, |EB| = n ise $\boxed{\dfrac{m}{m+n} = \dfrac{y-x}{z-x}}$ dir.

ispat:



[DC] ye paralel bir [AL] çizelim. (L∈[BC]) Bu durumda

AKFD ve ALCD birer paralelkenar olur.

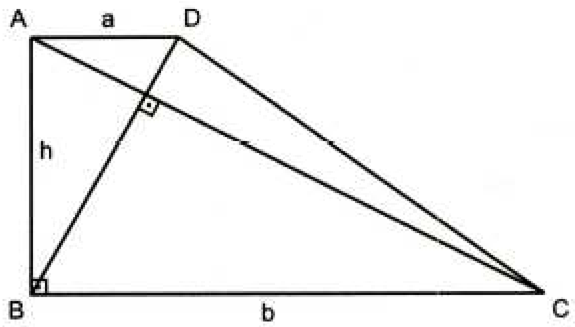
Böylece |AD| = |KF| = |LC| = x dir.

$\Rightarrow$ |EK| = y - x ve |BL| = z - x olur.

öte taraftan AEK ~ ABL dir. Benzerlik bağıntısı yazılırsa;

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EK|}{|BL|} \Rightarrow \boxed{\frac{m}{m+n} = \frac{y-x}{z-x}}$$ elde edilir.

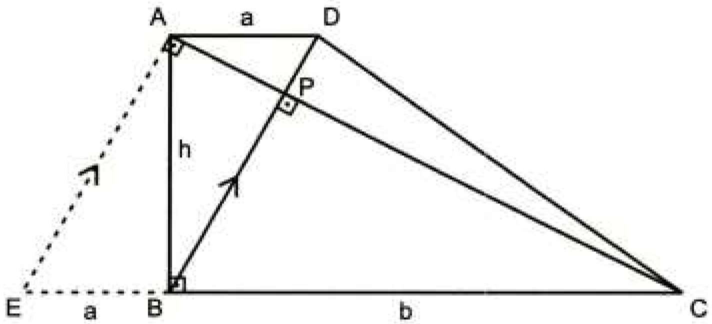
74



ABCD bir dik yamuk, [AC] ve [BD] köşegen, [AC] ⊥ [BD],

|AB| = h, |AD| = a, |BC| = b ise $\boxed{h^2 = a.b}$ dir.

ispat:



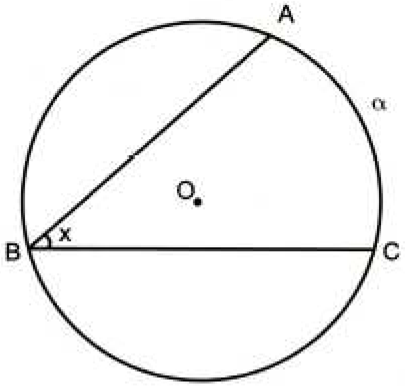
[BC] doğrultusunda a uzunluğunda bir [EB] çizelim.
Sonra da A noktasını E noktasına birleştirelim. Bu durumda AEBD bir paralelkenar olur. [AE] // [BD] dir.

$m(C\hat{P}B) = m(C\hat{A}E) = 90^\circ$ dir.

AEC üçgeni dikkate alınırsa, öklid bağıntısından (bkz 19)

$\boxed{h^2 = a.b}$ elde edilir.

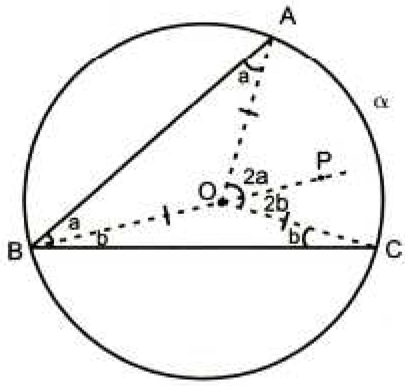
75



A,B,C noktaları O merkezli çember üzerinde olmak üzere,

$m(A\hat{B}C) = x$, $m(AC) = \alpha$ ise $\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$ dir.

ispat:



[OA], [OB],[OC] yarıçaplarını çizelim. $m(A\hat{B}O) = a$ ve $m(C\hat{B}O) = b$ diyelim. AOB ve COB üçgenleri ikizkenar üçgen olduğundan $m(B\hat{A}O) = a$ ve $m(B\hat{C}O) = b$ olur. $\Rightarrow$ $x = a + b$ dir.

Bir üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan (bkz 05)

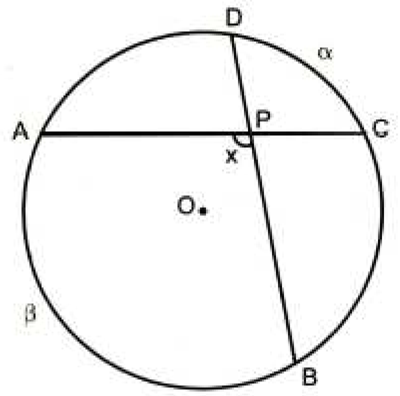
$m(A\hat{O}P) = 2a$ ve $m(C\hat{O}P) = 2b$ olur.

merkez açının ölçüsü gördüğü yayın uzunluğuna eşit olduğundan

$m(A\hat{O}C) = m(AC)$ $\Rightarrow$ $2a + 2b = \alpha$ $\Rightarrow$ $a + b = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$ elde edilir.

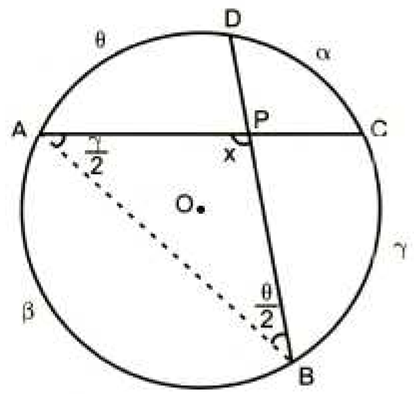
76



A,B,C,D noktaları O merkezli çember üzerinde olmak üzere,
m(A$\hat{P}$B) = x, m(DC) = α, m(AB) = β,

ise $\boxed{x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$ dir.

ispat:



A noktasını B noktasına birleştiren [AB] doğru parçasını çizelim.

m(AD) = θ ve m(BC) = γ diyelim.

Bu durumda m(D$\hat{B}$A) = θ/2 ve m(C$\hat{A}$B) = γ/2 olur. (bkz 75)

ABP üçgeni dikkate alındığında $\dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\theta}{2} + x = 180^\circ$ ...(1)

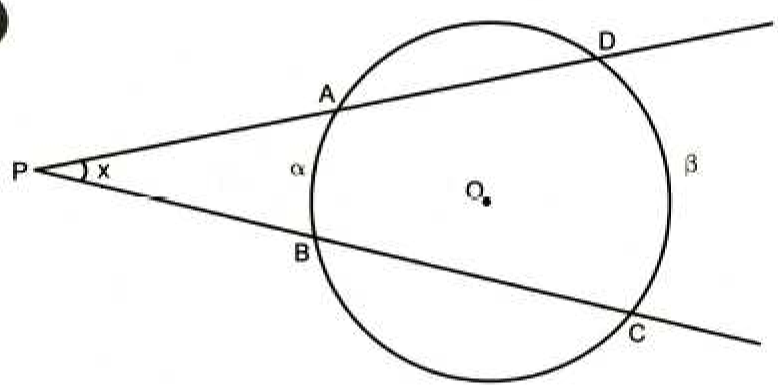
O merkezli çember dikkate alındığında

$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360^\circ \Rightarrow \dfrac{\alpha + \beta}{2} + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 180^\circ$ ...(2)

(1) ve (2) denklemlerinden;

$\dfrac{\gamma + \theta}{2} + x = \dfrac{\gamma + \theta}{2} + \dfrac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$ elde edilir.

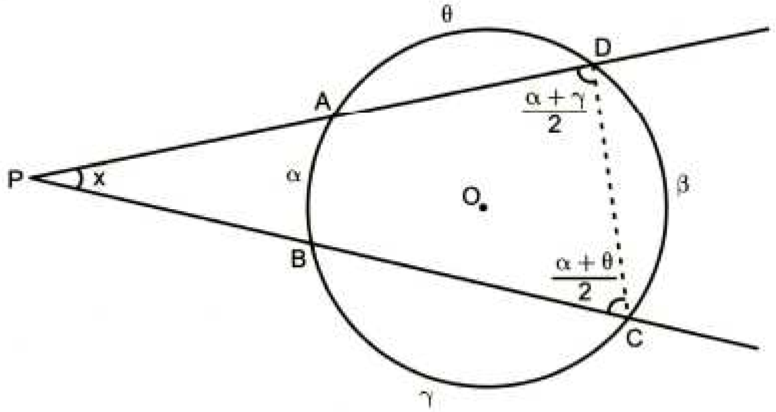
77



A,B,C,D noktaları O merkezli çember üzerinde olmak üzere,

m(D$\hat{P}$C) = x, m(AB) = α, m(DC) = β, ise $\boxed{x = \frac{\beta - \alpha}{2}}$ dir.

ispat:



D noktasını C noktasına birleştiren [DC] doğru parçasını çizelim.

m(AD) = θ, m(BC) = γ diyelim. Bu durumda;

m(P$\hat{C}$D) = $(\alpha+\theta)/2$ ve m(P$\hat{D}$C) = $(\alpha+\gamma)/2$ olur. (bkz 75)

DPC üçgeni dikkate alındığında $\frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{\alpha + \theta}{2} + x = 180°$ ...(1)

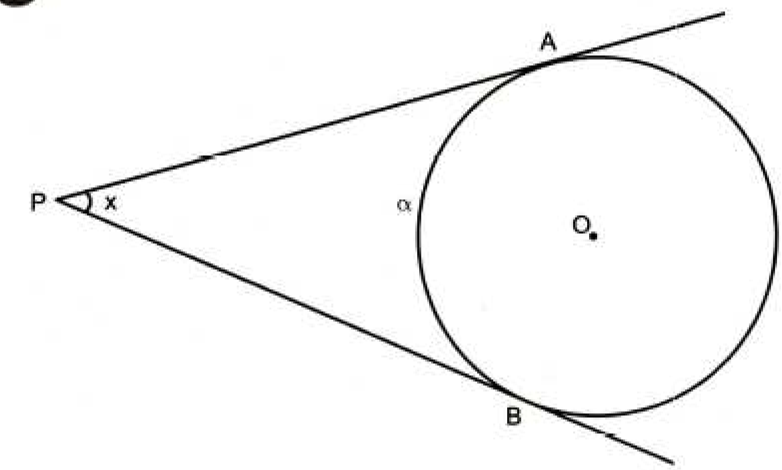
O merkezli çember dikkate alındığında

$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360° \Rightarrow \frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{\beta + \theta}{2} = 180°$ ...(2)

(1) ve (2) denklemlerinden;

$$x = \frac{\beta + \theta}{2} - \frac{\alpha + \theta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\beta - \alpha}{2}}$$ elde edilir.

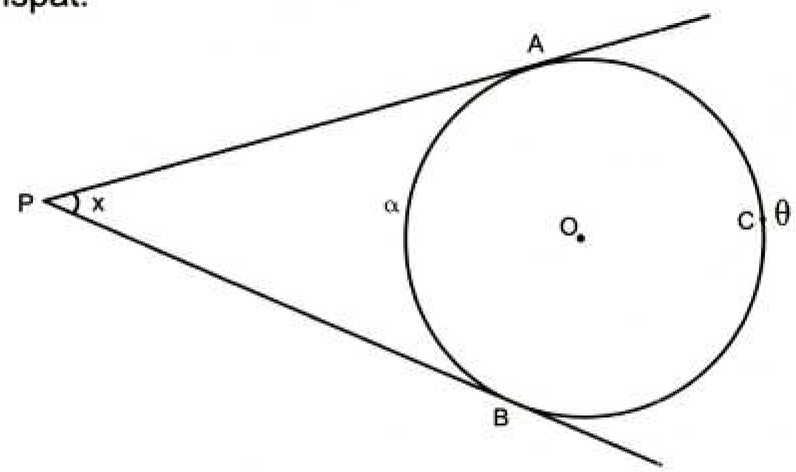
78



A,B noktaları O merkezli çemberin teğet noktaları olmak üzere,

m(A$\hat{P}$B) = x, m(AB) = α ise $\boxed{x + \alpha = 180^\circ}$ dir.

ispat:



C noktası çember üzerinde olmak üzere, m(ACB) = θ diyelim.

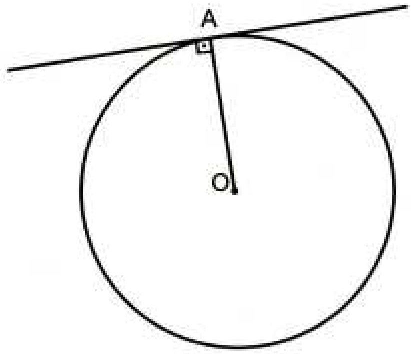
Bu durumda $x = \dfrac{\theta - \alpha}{2}$ ...(1) (bkz **77**)

öte yandan $\alpha + \theta = 360^\circ$ ...(2)

(2) denklemindeki θ değeri (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$x = \frac{360 - \alpha - \alpha}{2} = 180 - \alpha \quad \Rightarrow \boxed{x + \alpha = 180^\circ} \quad \text{elde edilir.}$$

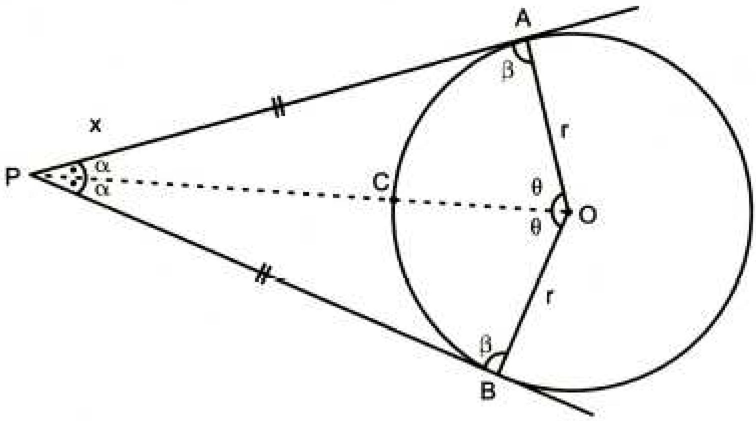
79



A noktası, teğetin O merkezli çembere değme noktası olmak üzere

Bir çemberin merkezinden, teğetin değme noktasına çizilen doğru, teğeti dik keser.

ispat:



Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan |PA| = |PB| dir.
|OA| ve |OB| yarıçap olduğundan |OA| = |OB| dir.

$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|PO|}{|PO|} = 1$ olduğundan OPA $\sim$ OPB dir.

$\Rightarrow$ $m(O\hat{P}A) = m(O\hat{P}B) = \alpha$, $m(P\hat{O}A) = m(P\hat{O}B) = \theta$,
$m(O\hat{A}P) = m(O\hat{B}P) = \beta$ yazılabilir.

$m(A\hat{O}B) = 2\theta$ merkez açı olduğundan $m(ACB) = 2\theta$ dir.

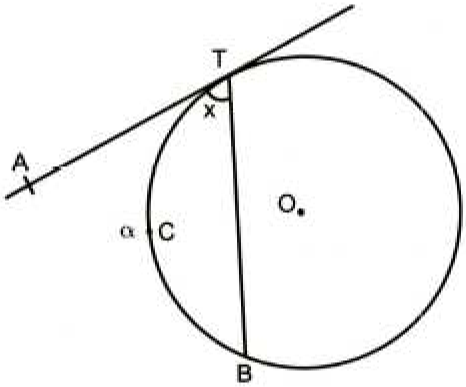
$\Rightarrow$ $2\theta + 2\alpha = 180^\circ$ (bkz 78) $\Rightarrow$ $\theta + \alpha = 90^\circ$ ...(1)

OAP üçgeni dikkate alınırsa $\theta + \alpha + \beta = 180^\circ$ ...(2)

(2) denkleminden (1) denklemi taraf tarafa çıkartılırsa;

$\boxed{\beta = 90^\circ}$ elde edilir.

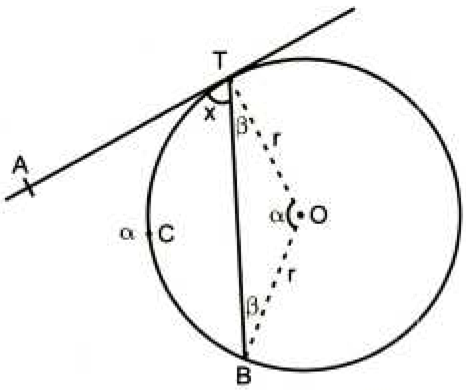
80



T noktası, teğetin O merkezli çembere değme noktası, C,B çember üzerinde birer nokta olmak üzere,

$m(\widehat{ATB}) = x$ ve $m(TCB) = \alpha$ ise $\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$ dir.

ispat:



[OT] ve [OB] yarıçapları çizilirse OTB ikizkenar üçgeni elde edilir.

$m(\widehat{OTB}) = \beta$ denirse $m(\widehat{OBT}) = \beta$ olur.

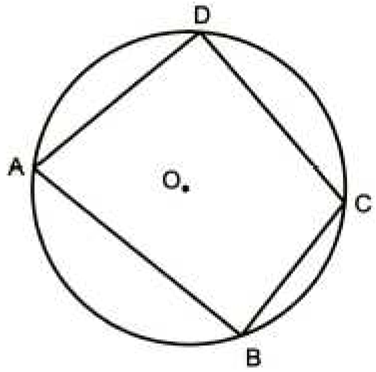
$m(TCB) = \alpha$ olduğundan $m(\widehat{TOB}) = \alpha$ olur.

öte taraftan $[OT] \perp [AT]$ dir. (bkz 79) $\Rightarrow x + \beta = 90°$ ...(1)

OTB üçgeni dikkate alınırsa $\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \beta = 90°$ ...(2)

(1) ve (2) denklemlerinden $\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$ elde edilir.

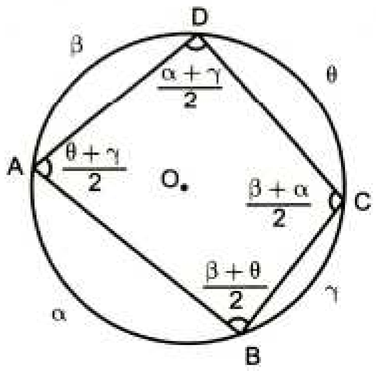
81



A,B,C,D noktaları O merkezli çember üzerinde ve ABCD bir kirişler dörtgeni olmak üzere,

$\boxed{m(A\hat{B}C) + m(A\hat{D}C) = m(D\hat{A}B) + m(D\hat{C}B) = 180^\circ}$ dir.

ispat:



$m(AB) = \alpha$, $m(BC) = \gamma$,
$m(CD) = \theta$, $m(DA) = \beta$, dersek

$m(A\hat{B}C) = \dfrac{\beta + \theta}{2}$, $m(A\hat{D}C) = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$,

$m(D\hat{A}B) = \dfrac{\theta + \gamma}{2}$, $m(D\hat{C}B) = \dfrac{\beta + \alpha}{2}$

olur. (bkz 75)

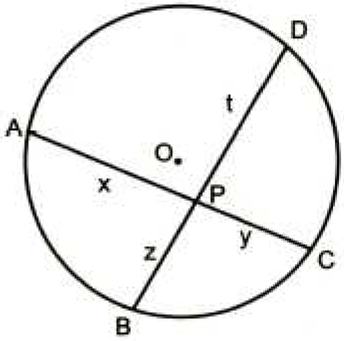
$$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha + \beta + \theta + \gamma}{2} = 180^\circ \quad ...(1)$$

$$m(A\hat{B}C) + m(A\hat{D}C) = \frac{\beta + \theta}{2} + \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta + \theta + \gamma}{2} = 180^\circ$$

$$m(D\hat{A}B) + m(D\hat{C}B) = \frac{\theta + \gamma}{2} + \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta + \theta + \gamma}{2} = 180^\circ$$

$\Rightarrow \boxed{m(A\hat{B}C) + m(A\hat{D}C) = m(D\hat{A}B) + m(D\hat{C}B) = 180^\circ}$ elde edilir.

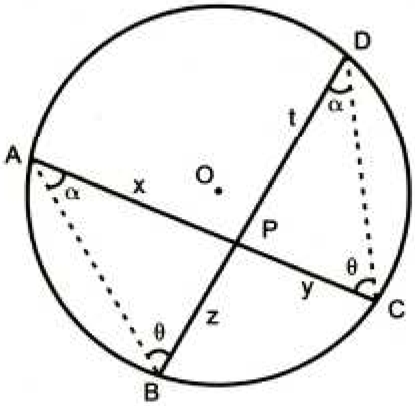
82



A,B,C,D noktaları O merkezli çember üzerinde olmak üzere,
[AC] ile [BD] doğru parçalarının kesim noktası P,
$|AP| = x$, $|PC| = y$, $|BP| = z$, $|PD| = t$, ise

$\boxed{x.y = z.t}$ dir.

ispat:



A noktasını B noktasına birleştiren [AB] doğru parçasını ve
D noktasını C noktasına birleştiren [DC] doğru parçasını çizelim.

$m(B\hat{A}C) = \alpha$ diyelim.

Bu durumda $m(BC) = 2\alpha$ olur. $\Rightarrow$ $m(B\hat{D}C) = \alpha$ olur. (bkz 75)

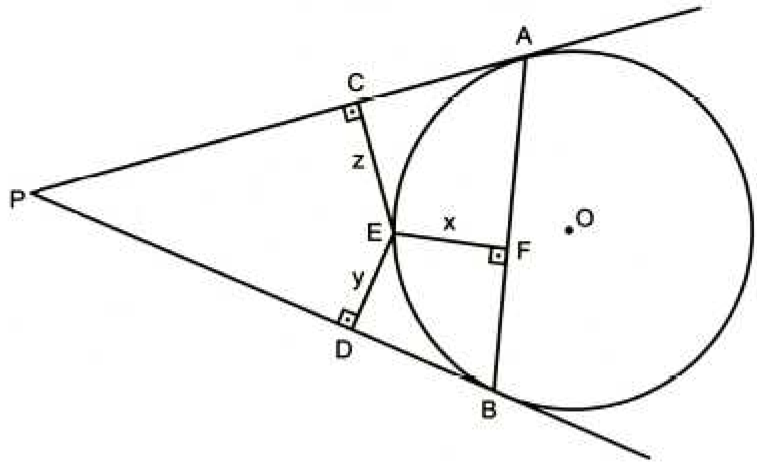
$m(D\hat{B}A) = \theta$ denirse $m(A\hat{C}D) = \theta$ olur.

$ABP \sim DCP$ (A.A.A) elde edilir.

$$ABP \sim DCP \quad \Rightarrow \quad \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AP|}{|DP|} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{y} = \frac{x}{t}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x.y = z.t}$ elde edilir.

83



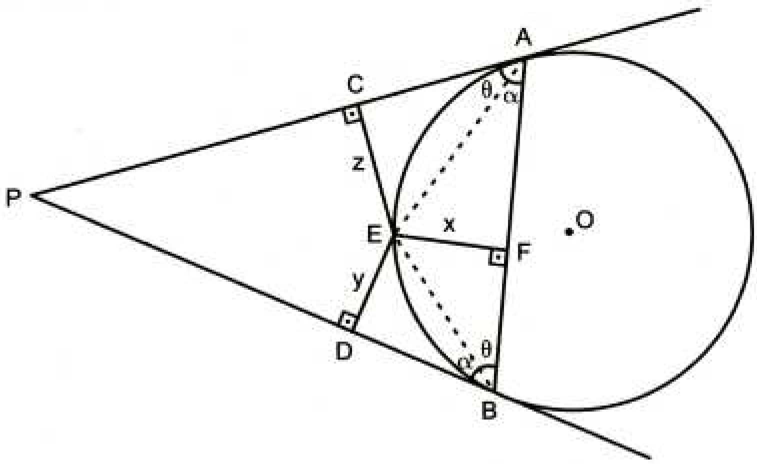
A,B noktaları teğetlerin değme noktaları, [CE] ⊥ [PA], [DE] ⊥ [PB],

[EF] ⊥ [AB], |EF| = x, |DE| = y, |CE| = z,

E noktası O merkezli çember üzerinde olmak üzere

$\boxed{x^2 = y.z}$ dir.

ispat:



E noktasını A ve B noktalarına birleştiren [AE] ve [BE] doğru parçalarını çizelim. m(EÂB) = α diyelim.

Bu durumda $m(EB) = 2\alpha$ olur. (bkz 75)

$\Rightarrow$ $m(E\hat{B}D) = \alpha$ olur. (bkz 80)

$m(E\hat{B}A) = \theta$ diyelim. Bu durumda $m(EA) = 2\theta$

$\Rightarrow$ $m(E\hat{A}C) = \theta$ olur ve böylelikle;

$AEF \sim BED$ ve $ACE \sim BFE$ (A.A.A) elde edilir.

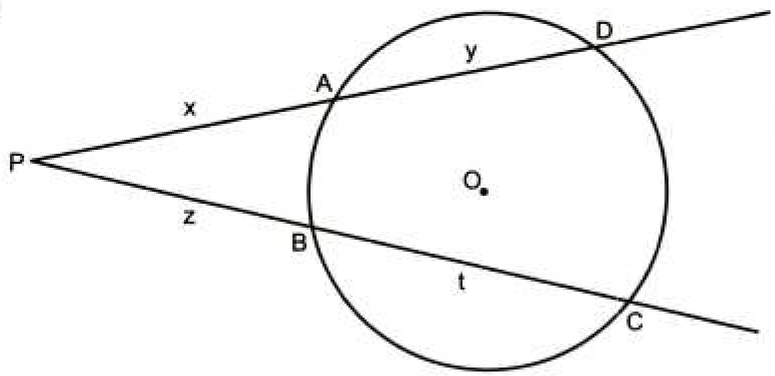
$$AEF \sim BED \quad \Rightarrow \quad \frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|EF|}{|ED|} \quad ...(1)$$

$$ACE \sim BFE \quad \Rightarrow \quad \frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|CE|}{|FE|} \quad ...(2)$$

(1) ve (2) denklemlerinden

$$\frac{|EF|}{|ED|} = \frac{|CE|}{|EF|} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 = y.z}$$ elde edilir.

84



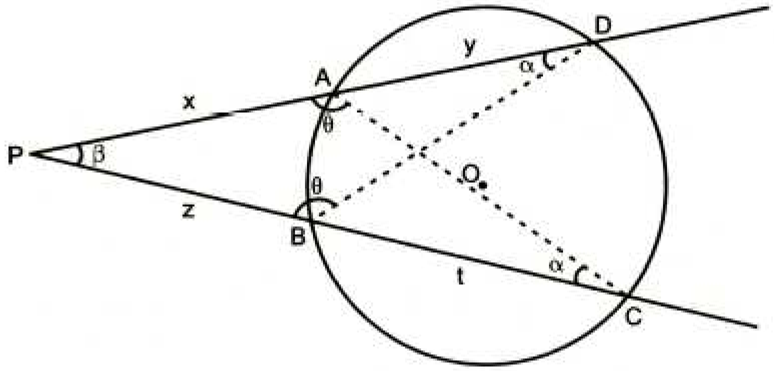
A,B,C,D noktaları O merkezli çember üzerinde olmak üzere,

[PD] ile [PC] doğru parçalarının kesim noktası P,

$|PA| = x$, $|AD| = y$, $|PB| = z$, $|BC| = t$, ise

$\boxed{x(x + y) = z(z + t)}$ dir.

ispat:



A noktasını C noktasına birleştiren [AC] doğru parçasını ve B noktasını D noktasına birleştiren [BD] doğru parçasını çizelim. $m(P\hat{D}B) = \alpha$ diyelim.

Bu durumda $m(AB) = 2\alpha$ olur. $\Rightarrow$ $m(P\hat{C}A) = \alpha$ olur. (bkz 75)

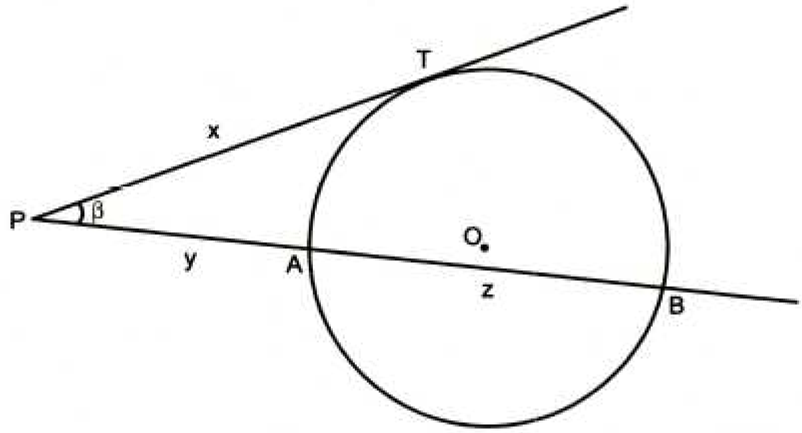
$m(D\hat{P}C) = \beta$ ve $m(P\hat{A}C) = \theta$ denirse $m(P\hat{B}D) = \theta$ olur.

PCA ~ PDB (A.A.A) elde edilir.

$$PCA \sim PDB \quad \Rightarrow \quad \frac{|PC|}{|PD|} = \frac{|PA|}{|PB|} \quad \Rightarrow \quad \frac{z+t}{x+y} = \frac{x}{z}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x(x+y) = z(z+t)}$ elde edilir.

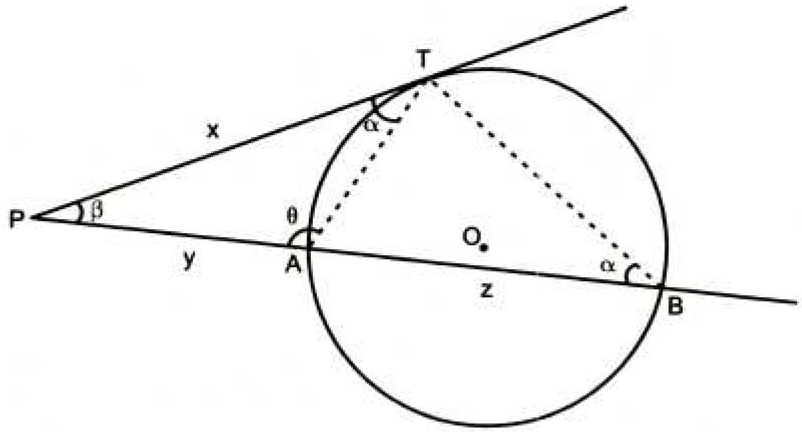
85



T noktası, O merkezli çember ile teğetin değme noktası,
P noktası [PT] ile [PB] doğru parçalarının kesim noktası,
A,B noktaları çember üzerinde, P,A,B noktaları doğrusal,

$|PT| = x$, $|PA| = y$, $|AB| = z$ ise $\boxed{x^2 = y(y + z)}$ dir.

ispat:



T noktasını A ve B noktalarına birleştiren [AT] ve [BT] doğru parçalarını çizelim. $m(P\hat{B}T) = \alpha$ diyelim.

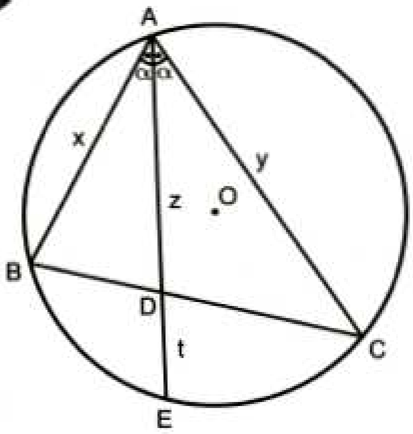
$\Rightarrow$ $m(AT) = 2\alpha$ olur. (bkz 75) $\Rightarrow$ $m(P\hat{T}A) = \alpha$ olur. (bkz 80)

Bu durumda $m(P\hat{A}T) = \theta$ denirse $m(P\hat{T}B) = \theta$ olur.

$\Rightarrow$ PTB $\sim$ PAT dir. $\Rightarrow$ $\dfrac{|PT|}{|PA|} = \dfrac{|PB|}{|PT|}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y + z}{x}$

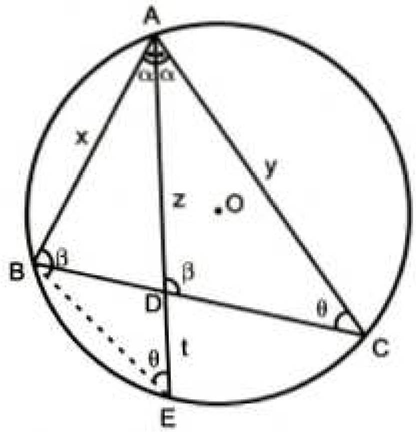
$\Rightarrow$ $\boxed{x^2 = y(y + z)}$ elde edilir.

86



ABC köşeleri O merkezli çember üzerinde olan bir üçgen. E noktası çember üzerinde.
[AE] doğru parçası m($B\hat{A}C$) açısının açıortayı.
$|AB| = x$, $|AC| = y$, $|AD| = z$, $|DE| = t$,
ise $\boxed{x.y = z(z + t)}$ dir.

ispat:



B noktasını E noktasına birleştiren bir [BE] doğru parçası çizelim.

m($A\hat{C}D$) = θ diyelim.

$\Rightarrow$ m(AB) = 2θ $\quad \Rightarrow$ m($A\hat{E}B$) = θ olur. (bkz 75)

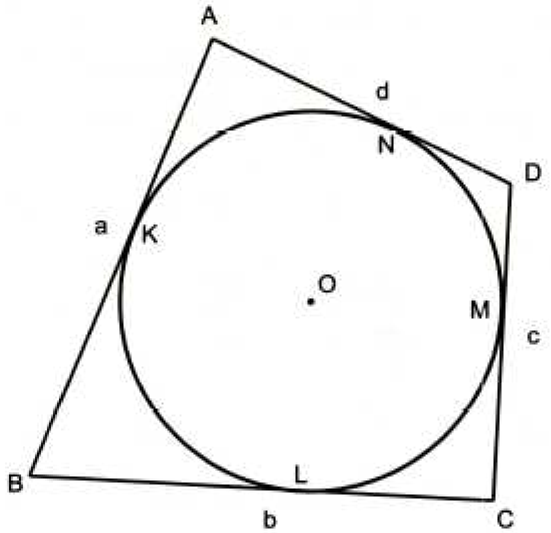
m($A\hat{D}C$) = β denirse m($A\hat{B}E$) = β olur.

Böylelikle ABE $\sim$ ADC olur.

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AC|} \qquad \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{z + t}{y}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x.y = z(z + t)}$ elde edilir.

87



ABCD bir teğetler dörtgeni. ABCD nin O merkezli çembere değme noktaları K,L,M,N noktaları.

$|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, ise $\boxed{a + c = b + d}$ dir.

ispat:

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan;

$|AK| = |AN|$ ...(1) , $|BK| = |BL|$ ...(2) , $|CM| = |CL|$ ...(3) ,

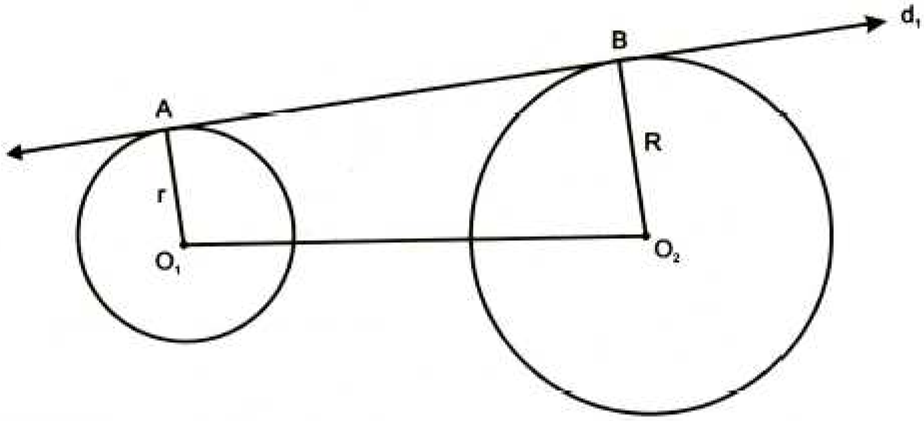
$|DM| = |DN|$ ...(4) dir.

(1),(2),(3) ve (4) denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

$$\underbrace{|AK| + |BK|}_{a} + \underbrace{|CM| + |DM|}_{c} = \underbrace{|AN| + |DN|}_{d} + \underbrace{|BL| + |CL|}_{b}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a + c = b + d}$ elde dilir.

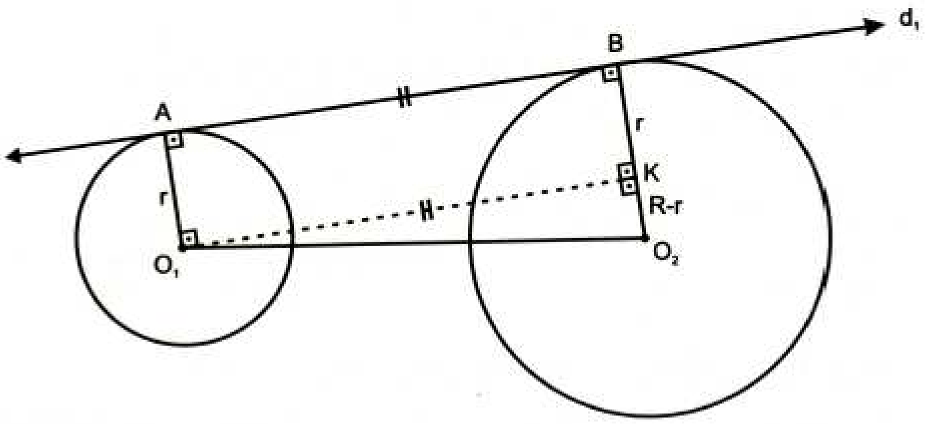
88



d_1 doğrusu O_1 merkezli çembere A noktasında ve O_2 merkezli çembere B noktasında teğettir.

$|O_1A| = r$ ve $|O_2B| = R$ ise $\boxed{|O_1O_2|^2 = |AB|^2 + |R - r|^2}$ dir.

ispat:



Bir çemberin merkezinden teğetin değme noktasına indirilen doğru parçası teğeti dik keser. (bkz 79)

Dolayısıyla $|O_1A| \perp d_1$ ve $|O_2B| \perp d_1$ dir.

[AB] ye paralel olacak şekilde bir $[O_1K]$ doğru parçası çizelim.
Burada $K \in [O_2B]$ dir.

Böylelikle O_1KBA dikdörtgeni elde edilir.

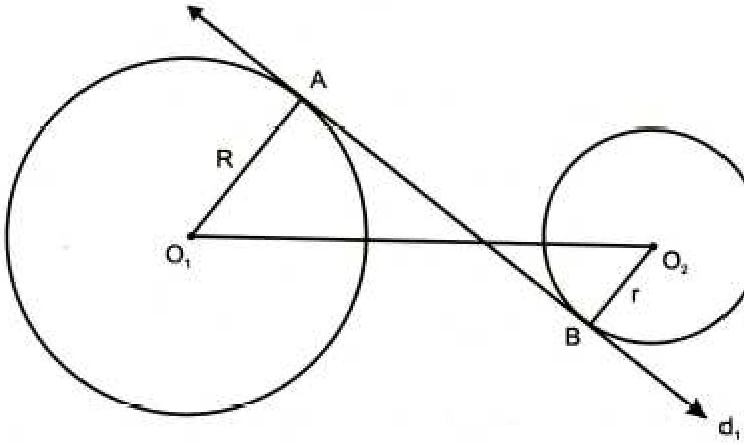
$\Rightarrow$ $|O_1A| = |KB|$ ve $|O_1K| = |AB|$ olur.

O_1O_2K dik üçgeninde pisagor teoremi uygulanırsa (bkz ⓭)

$|O_1O_2|^2 = |O_1K|^2 + |R - r|^2$ bulunur,

$\Rightarrow$ $\boxed{|O_1O_2|^2 = |AB|^2 + |R - r|^2}$ elde edilir.

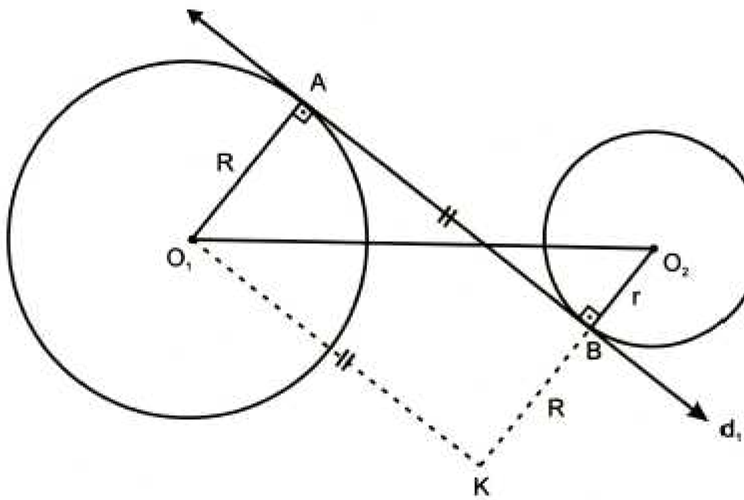
89



d_1 doğrusu O_1 merkezli çembere A noktasında ve O_2 merkezli çembere B noktasında teğettir.

$|O_1A| = R$ ve $|O_2B| = r$ ise $\boxed{|O_1O_2|^2 = |AB|^2 + |R + r|^2}$ dir.

ispat:



Bir çemberin merkezinden teğetin değme noktasına indirilen doğru parçası teğeti dik keser. (bkz 79)

Dolayısıyla $|O_1A| \perp d_1$ ve $|O_2B| \perp d_1$ dir.

[AB] ye paralel ve [AB] nin boyu kadar bir $[O_1K]$ doğru parçası çizelim ve B noktasını K noktasına birleştirelim.

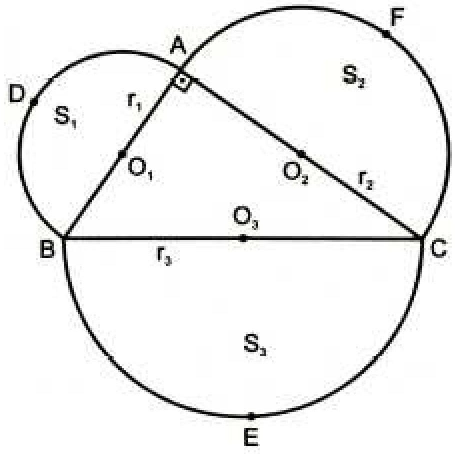
Böylelikle O_1KBA dikdörtgeni elde edilir,

$\Rightarrow$ $|O_1A| = |KB|$ ve $|O_1K| = |AB|$ olur.

O_1O_2K dik üçgeninde pisagor teoremi uygulanırsa (bkz 13)

$|O_1O_2|^2 = |O_1K|^2 + |R + r|^2$ bulunur,

$\Rightarrow$ $\boxed{|O_1O_2|^2 = |AB|^2 + |R + r|^2}$ elde edilir.



ADB, AFC, BEC sırasıyla O_1,O_2,O_3 merkezli birer yarım daire.

ABC bir dik üçgen. $|O_1A| = r_1$, $|O_2C| = r_2$, $|O_3B| = r_3$,

S1,S2,S3 bulundukları daire dilimlerinin alanlarını göstersin.

Bu durumda; $\boxed{S_1 + S_2 = S_3}$ dir.

ispat:

$|AB| = 2r_1$, $|AC| = 2r_2$, $|BC| = 2r_3$ dir.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa (bkz 13)

$$(2r_1)^2 + (2r_2)^2 = (2r_3)^2 \Rightarrow 4r_1^2 + 4r_2^2 = 4r_3^2 \Rightarrow r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$$

denklemin her iki yanı $\frac{\pi}{2}$ ile çarpılırsa;

$$\underbrace{\frac{\pi r_1^2}{2}}_{S_1} + \underbrace{\frac{\pi r_2^2}{2}}_{S_2} = \underbrace{\frac{\pi r_3^2}{2}}_{S_3} \Rightarrow \boxed{S_1 + S_2 = S_3}$$ elde edilir.