LGS MATS@Bİ MATEMATİK
ÖZET FÖY

Karadelikler Tanrı'nın 0'a böldüğü yerlerdir.

Steven Wright

Derleyen : YusufKPL

8.1.4 ASAL SAYILAR

1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1'den büyük sayılara **asal sayılar** denir.

2	3	5	7						
11	13	17	19	23	29				
31	37	41	43	47	53	59			
61	67	71	73	79	83	89	97	..	..

Yani bu sayılar kendini böldürmesini sevmiyor!!!

En küçük asal sayı 2'dir.
2'nin dışında çift asal sayı yoktur.
En küçük tek asal sayı 3'tür.
Asal olan rakamlar 2,3,5,7'dir.
Bir basamaklı en küçük asal sayı 2'dir.
Bir basamaklı en büyük asal sayı 7'dir.
İki basamaklı en küçük asal sayı 11'dir.
İki basamaklı en büyük asal sayı 97'dir.
100'den küçük 25 tane asal sayı vardır.

ASAL SAYILARLA İLGİLİ BİLİNMESİ GEREKENLER:

i. İki basamaklı bir sayının asal olup olmadığını anlamak için sayının sırasıyla 2, 3, 5 ve 7 ile tam bölünüp bölünemediğine bakılır. Eğer bölünmüyorsa sayı asaldır.

ii. 2'nin dışında çift asal sayı yoktur.Çünkü 2 dışındaki tüm çift sayılar 2'ye tam bölünür.Bu da asal sayıların sevmediği bir durumdur.

iii. Asal sayılar içerisinde , 5 sayısı dışında son basamağı 0 yada 5 olan sayı göremezsiniz.Çünkü sonu 0 yada 5 olan sayılar 5'e tam bölünebilen sayılardır. Bu da asal sayıların sevmediği bir durumdur.

Sonuç olarak bir basamaklı sayılar hariç asal sayıların son basamağı çift (0,2,4,6,8) veya (5) olamaz.

Buradan çıkan sonuç; bir basamaklı sayılar hariç asal sayıların son basamağında sadece 1,3,7,9 olabilir.

NOT:

En büyük asal sayı sorulamaz. Çünkü sonsuzda bir sayıdır.

8.1.5 ARALARINDA ASAL SAYILAR

1'den başka ortak böleni olmayan sayılara **aralarında asal sayılar** denir.

Aralarında asal sayılar:

* **4** ile **21** sayıları aralarında asaldır.

Çünkü **1** dışında ortak böleni yoktur.

* **9** ile **16** sayıları aralarında asaldır.

Çünkü **1** dışında ortak böleni yoktur.

* **5** ile **6** sayıları aralarında asaldır.

Çünkü **1** dışında ortak böleni yoktur.

1 sayısı , her sayının ortak bölenidir.

Aralarında asal olmayan sayılar:

10 ile **15** sayıları aralarında asal değildir.

Çünkü **1** dışında **5** ortak böleni de var.

4 ile **12** sayıları aralarında asal değildir.

Çünkü 1 dışında **2 , 4** ortak bölenleri var.

12 ile **28** sayıları aralarında asal değildir.

Çünkü 1 dışında **2 , 4** ortak bölenleri var.

NOT: Ortak bölen ile ortak çarpan aynı şey olduğundan karşılaştırma yaparken ortak çarpanlarına da bakılabilir.

ARALARINDA ASAL SAYILARLA İLGİLİ BİLİNMESİ GEREKEN PRATİK BİLGİLER :

i. Sayıların aralarında asal olabilmesi için asal sayı olma zorunluluğu yoktur.

8 ile **15** , **12** ile **25** sayıları asal sayı olmamalarına rağmen aralarında asaldır.Çünkü aralarında asal olabilmesi için **1** dışında ortak böleni olmaması gereklidir.

ii. Ardışık doğal sayılar aralarında asaldır.

4 ile **5** ,**11** ile **12**, **15** ile **16** sayıları aralarında asal sayılardır.

iii. 1 ile 1'den büyük doğal sayılar aralarında asaldır.

1 ile **15** , **1** ile **23** ,**1** ile **92** sayıları aralarında asaldır.

iv. 0 ile 15 sayıları aralarında asal değildir.

Çünkü 1 dışında 3,5 ve 15 ortak bölenleri de vardır.

v. Farklı iki asal sayı daima aralarında asaldır.

13 ile 17 ve 23 ile 37 aralarında asaldır.

vi. Ardışık tek doğal sayılar aralarında asal sayılardır.

11 ile 13 , 19 ile 21 aralarında asal sayıdır.

8.1.6 ÇARPAN KAVRAMI

Her doğal sayı iki sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.İki sayının çarpımı şeklinde yazılan sayılardan her birine o doğal sayının **<u>çarpanı</u>** denir.

Bir doğal sayıyı tam olarak bölen sayılara o sayının **<u>bölenleri</u>** denir.

18 sayısının çarpanlarını bulalım.	**18** sayısının bölenlerini bulalım.
18=1.18 **=2.9** **=3.6** **18** sayısının çarpanları **1,2,3,6,9** ve **18**'dir.	**18:1** **18:6** **18:2** **18:9** **18:3** **18:18** **18** sayısının pozitif bölenleri **1,2,3,6,9** ve **18**'dir.

NOT: Bir doğal sayının çarpanları o doğal sayının aynı zamanda bölenleridir.Bir sayının bölenlerini bulmak için önce çarpanlarını bulmak sizlere kolaylık sağlayacaktır.

ASAL ÇARPAN:

Bir sayının çarpanlarından asal sayı olan çarpanlarına **<u>asal çarpan</u>** denir.Diğer bir deyişle bir sayıyı kalansız olarak bölebilen asal sayılara **<u>asal çarpan</u>** denir.

Bir doğal sayının çarpanları 3 şekilde bulunabilir,

1) Bütün çarpanları bulunur.İçerisinden asal olanlar gösterilir.
2) Bölen listesi-Algoritma Yöntemi yardımıyla bulunabilir.
3) Çarpan Ağacı Yöntemi yardımıyla bulunabilir.

ÖRNEK

12 =>

a) Pozitif çarpan sayısı:

b) Pozitif çarpanlarının toplamı:

c) En büyük pozitif çarpanı:

d) En küçük pozitif çarpanı:

e) Asal çarpanları:

f) Asal olmayan çarpanları:

g) Pozitif bölenleri:

Derleyen:YUSUF KPL

8.1.7 KAT KAVRAMI

Bir doğal sayının kalansız böldüğü sayıların tümüne o sayının **katları** denir.Yani 3'e bölünen tüm sayılar 3'ün katlarıdır.

3'ün katları => 3'ün 1 katı => 3.1=3
=> 3'ün 2 katı => 3.2=6
=> 3'ün 3 katı => 3.3=9
=> 3'ün 4 katı => 3.4=12
=> 3'ün 5 katı => 3.5=15
=> 3'ün 6 katı => 3.6=18

3'ten başlayıp 3'er 3'er saydığınızda 3'ün katlarını saymış olursunuz.

4'ten başlayıp 4'er 4'er saydığınızda 4'ün katlarını saymış olursunuz.

NOT: 3'ün katları olan sayılar 3'e ,4'ün katları olan sayılar 4'e,5'in katları olan sayılar 5'e tam bölünürler.Yani bir sayının katları olan sayılar o sayıya tam bölünürler.

NOT: Bir sayının 3'e tam bölündüğünde çıkan sonuç, o sayının 3'ün kaç katı olduğunu gösterir.

Örneğin 48 sayısını 3'e böldüğümüzde çıkan sonuç 16'dır.Yani 48 sayısı 3'ün 16 katıdır.

8.1.8 EN KÜÇÜK ORTAK KAT (EKOK)

İki veya daha fazla sayma sayısının ortak katlarından en küçük olanına, bu sayıların En Küçük Ortak Katı olan **EKOK**'u denir.

Örnek:

3 ve 4'ün ortak katlarının en küçüğünü bulalım.

3	**4**	**2**
3	**2**	**2**
3	**1**	**3**
1		

Bölen kısmındaki asal sayılar birbiri ile çarpıldığında **3** ve **4**'ün En Küçük Ortak Katını (EKOK) bulunur.

Buna göre **3** ve **4**'ün **en küçük ortak katı 2.2.3** çarpımının sonucu olan **12** olarak bulunur.

3 ve **4** sayılarının en küçük ortak katı
EKOK (3,4)=12 veya **(3,4)** $_{\mathbf{EKOK}}$ **=12** şeklinde ifade edilir.

NOT: **3** ve **4** sayılarının en küçük ortak katı
EKOK (3,4)=12 veya **(3,4)** $_{\mathbf{EKOK}}$ **=12** şeklinde ifade edilir.

NOT: **EKOK** kelimesi açılımı olan **"En Küçük Ortak Kat"** 'ın baş harflerinin kısaltmasıdır. Bazı kaynaklarda **"En Küçük Ortak Kat (EKOK)"** ile aynı anlama gelen **"Ortak Katların En Küçüğü (OKEK)"** de kullanılabilmektedir.

EKOK İLE İLGİLİ BİLİNMESİ GEREKEN PRATİK BİLGİLER :

i. İki doğal sayıdan biri diğerinin tam katı ise bu iki sayının EKOK'u büyük sayıya eşittir.

* 2 ile 2'nin tam katı olan 10'un EKOK'unu bulalım.

2'nin katları => 2 ,4 ,6 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 , ...
10'un katları => 10 , 20 , 30 , ...

Görüldüğü gibi 2 ile 2'nin tam katı olan 10'un EKOK'u büyük sayı olan 10'a eşittir.

Yani EKOK(2,10)=10'dur.

ii. Aralarında asal iki sayının EKOK'u sayıların çarpımına eşittir.

* Aralarında asal olan 9 ile 16'nın EKOK'unu bölen çizgisi yöntemi ile bulalım.

Bölen kısmındaki asal sayıları çarptığımızda

9	16	2
9	8	2
9	4	2
9	2	2
9	1	3
3		3
1		

EKOK (9,16) = 2.2.2.2.3.3
EKOK (9,16) = 16.9
EKOK (9,16) = 144 bulunmuş olur.

Görüldüğü gibi aralarında asal 9 ve 16 sayılarının EKOK'unun 9 ve 16 sayılarının çarpımına eşit olduğu ortaya çıkar.

NOT:
a ve b aralarında asal iki sayı ise

EKOK (a , b)= a . b

iii. a= $x^3.y^2.z$ **ve b=** $x.y^4$ **şeklinde verilmiş a ve b sayılarının EKOK'u ortak olan çarpanlardan üssü büyük olanlar ve ortak olmayan çarpanların çarpımı olan** $x^3.y^4.z$ **'dir.**

a= $2^3.3^2.7$ **ve b=** $2.3^4.5$ şeklinde verilmiş a ve b sayılarının EKOK'unu bulurken ortak çarpan olan 2'nin büyük üslü olan 2^3 'ü ,diğer ortak çarpan olan 3'ün büyük üslü olan 3^4 'ü ve ortak çarpan olmayan 7 ve 5 sayılarını çarparız.

Yani **EKOK (** $2^3.3^2.7$, $2.3^4.5$ **)=** $2^3.3^4.5.7$ şeklinde bulunmuş olur.

8.1.8.A EKOK PROBLEMLERİ

Parçadan bütüne ulaşılmak istenen sorularda EKOK kullanılır.

1) Cevizler,fındıklar,şekerler,bilyeler ritmik olarak sayıldıktan sonra artan oluyorsa ,

2) Gemiler,arabalar,yarışçılar beraber yola çıktıktan sonra buluşma zamanları yada mola verilen aynı yerleşim yerleri ,

3) Beden eğitimi dersinde veya askeriyede tam dizilişlerin olduğunda yada diziliş sonrası artışlarda,,

4) Saatlerin,zillerin veya ışıkların bir daha ne zaman birlikte çalışacağı sorularında,

5) Küçük dikdörtgenleri birleştirerek kare oluşturma yapılıyorsa,

6) Küçük dikdörtgen prizmalardan küp oluşturulmasında,

7) Farklı aralıklarla nöbet tutan ve aynı gün nöbet tutmaya başlayan Asker, Hemşire vb. birlikte nöbet tutacağı ikinci nöbetlerinin kaçıncı güne denk geleceği sorularında,

verilen sayıların **EKOK**'u hesaplanır.

8.1.8.A EKOK KLASİK PROBLEM SORULARI :

1) Bir çiçekçi çiçekleri 5'er 5'er ve 7'şer 7'şer demet haline getirdiğinde hep 2 çiçek artmaktadır.Buna göre çiçekçinin <u>en az</u> kaç adet çiçeği vardır?

<u>Çözüm:</u>

Eğer hiç çiçek artmasaydı çiçek sayısı en az bu sayıların EKOK'u kadar olurdu.

EKOK(7,5)=7.5
=35

Her 35'in katı sayıda çiçek 5'er ve 7'şer demet haline getirilebilir.

Hep 2 çiçek arttığı için çiçek sayısı aşağıdaki gibi olabilir.

35+2 (En az)
70+2
105+2
.
.
.

Yani en az 35+2=37 çiçek 5'erli ve 7'şerli demet haline getirildiğinde 2 çiçek artar.

2) Bir sınıftaki öğrenciler 4 'erli ve 6'şarlı sıra olabilmektedir. Bu sınıftaki öğrenci sayısı 30 dan fazla olduğuna göre en az kaçtır?

<u>Çözüm:</u>

4'erli ve 6'şarlı sıra olunabiliyorsa en az EKOK kadar öğrenci vardır.

EKOK(4,6)=12

En az 12 öğrenci vardır .12'nin her katında da 4'erli ve 6'şarlı sıra olunabilir.

12.1=12
12.2=24
$\boxed{12.3=36}$
12.4=48
. .
. .
. .

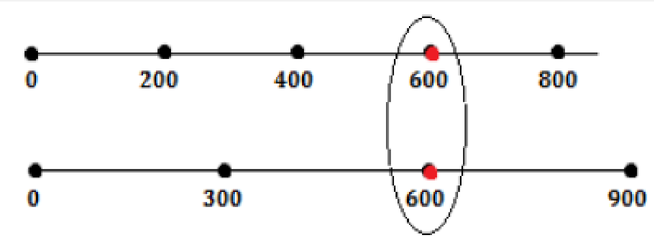
30'dan fazla en az sorulduğu için sınıfın 36 öğrencisi vardır.

3) Osmaniye'den iki farklı araçla aynı istikameti izleyerek Türkiye turuna çıkan iki arkadaştan Cengiz her 200 km'de ,Burak ise her 300 km'de akaryakıt aldıklarına göre akaryakıt aldıkları ilk ortak yerleşim yeri yolculuklarının kaçıncı kilometresindedir?

<u>Çözüm:</u>

İlk ortak akaryakıt aldıkları yerleşim yeri sorulduğu için 200 ve 300'ün EKOK'u bulunmalıdır.

EKOK(200,300)=600



Yani ilk ortak akaryakıt alınan yerleşim yeri 600. km'dir.

4) Üç çalar saat sırasıyla 10 , 15 ve 20 dakikada bir çalmaktadır.Buna göre 16.20'de aynı anda çalan ziller sonraki tekrar çalışını saat kaçta yapar?

<u>Çözüm:</u>

Üç çalar saat 10,15 ve 20 dakika da bir çaldığına göre bu üç saatin ilk ortak katı EKOK'u hesaplanmalı.

10	15	20	2
5	15	10	2
5	15	5	3
5	5	5	5
1	1	1	

EKOK(10,15,20)=2.2.3.5
=60

Yani her 60 dakika da bir birlikte çalarlar.

16.20'de birlikte çalan çalan ziller sonraki çalışını saat 17.20'de yapar.

Derleyen:YUSUF KPL

5) Bir hastanede nöbet tutan iki hemşireden Elif hemşire 9 günde bir,Hatice hemşire ise 15 günde bir nöbet tutmaktadır.Buna göre iki hemşire aynı gün nöbet tuttuktan en az kaç gün sonra birlikte tekrar nöbet tutarlar?

Çözüm:

Elif hemşirenin nöbet tutma günleri
9 , 18 , 27 , 36 , 45 , ...

Hatice hemşirenin nöbet tutma günleri
15 , 30 , 45 , ...

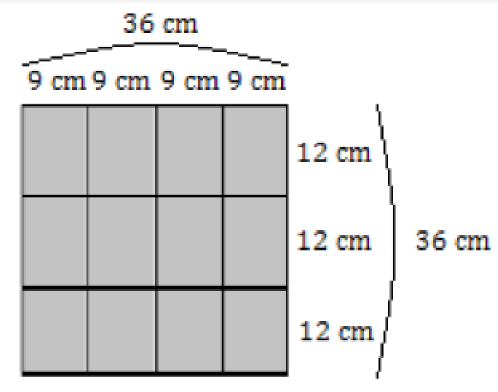
Buna göre iki hemşire en az 45 günde 1 birlikte nöbet tutarlar.

6) Boyutları 9 ve 12 cm olan fayanslardan en az kaç tanesi birleştirilerek kare oluşturulabilir?

Çözüm:

1.Yol:
Oluşturulacak karenin bir kenarının uzunluğu en az, dikdörtgen fayansın iki boyutunun EKOK'u kadar olacaktır.

EKOK(9,12)=36 (Karenin bir kenar uzunluğu)



En az 3.4=12 tane dikdörtgen fayans birleştirilerek kare oluşturulur.

2.Yol: (Karenin içindeki dikdörtgen sayısı aranır.)

$$\frac{\text{Kare Alanı}}{\text{Dikdörtgen Alanı}} = \text{Dikdörtgen Sayısı}$$

$$\frac{36.36}{9.12} = 4.3 = 12 \ \text{(Dikdörtgen fayans sayısı)}$$

7) Boyutları 2 , 3 ve 4 cm olan dikdörtgenler prizmasından en az kaç tanesi kullanılarak küp elde edilebilir?

Çözüm:

Oluşturulacak küpün bir ayrıtının uzunluğu en az, dikdörtgenler prizmasının boyutlarının EKOK'u kadar olacaktır.

EKOK(2,3,4)=12 (Küpün bir ayrıtının uzunluğu)

Küpün içerisinde kaç tane dikdörtgen prizma olduğu hesaplanır.

$$\frac{\text{Küpün Hacmi}}{\text{Dikdörtgen Prizma Hacmi}} = \text{Dik.Prizma Sayısı}$$

$$\frac{12.12.12}{2.3.4} = \text{Dik.Prizma Sayısı}$$

$$6.4.3 = \text{Dik.Prizma Sayısı}$$

$$72 = \text{Dik.Prizma Sayısı}$$

Boyutları 2,3 ve 4 olan en az 72 tane dikdörtgen prizmasından küp elde edilir.

8.1.9 EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN (EBOB)

İki veya daha fazla sayma sayısının ortak bölenlerinden en büyük olanına, bu sayıların En Büyük Ortak Böleni **EBOB**'u denir.

Örnek:

12 ve 18 'in ortak bölenlerinin en büyüğünü EBOB'unu bulalım.

$$\begin{array}{cc|l} \mathbf{12} & \mathbf{18} & \mathbf{2^*} \\ \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{3^*} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ & \mathbf{1} & \end{array}$$

Bölen kısmında işaretlediğimiz asal bölenleri çarptığımızda **12** ve **18**'in En Büyük Ortak Bölen (EBOB)'u bulunur.

Buna göre **12** ve **18**'in **En Büyük Ortak Böleni** <u>işaretlenmiş asal bölenlerin</u> çarpımının sonucu olan **2.3=6** olarak bulunur.

NOT:
12 ve **6** sayılarının En Büyük Ortak Böleni
EBOB (12,18)=6 veya **(12,18)** $_{\mathbf{EBOB}}$ **=6** şeklinde ifade edilir.

NOT:
EBOB kelimesi açılımı olan **"En Büyük Ortak Bölen"** 'in baş harflerinin kısaltmasıdır. Bazı kaynaklarda **"En Büyük Ortak Bölen (EBOB)"** ile aynı anlama gelen **"Ortak Bölenlerin En Büyüğü (OBEB)"** de kullanılabilmektedir.

NOT:
A ve B gibi iki sayının EBOB'u iki sayıyı bölebilen en büyük sayıdır.

EKOK İLE İLGİLİ BİLİNMESİ GEREKEN PRATİK BİLGİLER :

i. İki doğal sayıdan biri diğerinin tam katı ise bu iki sayının EBOB'u küçük olan sayıya eşittir.

* 4 ile 4'ün tam katı olan 12'nin EBOB'unu bulalım.

4'ün bölenleri (çarpanları) => 1 ,2 ,4
12'nin bölenleri (çarpanları) => 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12

4 ve 12'nin ortak bölenleri 1 , 2 , 4 'tür.Bunlar içerisinden en büyüğü yani ortak bölenlerin en büyüğü 4'tür.

Görüldüğü gibi 4 ile 4'ün tam katı olan 12'nin EBOB'u küçük sayı olan 4'e eşittir.

Yani EBOB(4,12)=4'tür.

ii. Aralarında asal iki sayının EBOB'u 1 sayısına eşittir.

* Aralarında asal olan 5 ile 16'nın EBOB'unu bulalım.

5'in bölenleri (çarpanları) => 1 ,5
16'nın bölenleri (çarpanları) => 1 , 2 , 4 , 8 , 16

5 ve 16'nın ortak böleni 1 'dir.Bu bölen de başka bir bölen olmadığından en büyük ortak bölen olarak kabul edilir.

EBOB(5,16)=1

Görüldüğü gibi aralarında asal tanımından da anlaşılabileceği gibi aralarında asal her sayının EBOB'u her zaman 1'e eşittir.

NOT:a ve b aralarında asal iki sayı ise EKOK (a ,b)= a.b

iii. a= $x^3.y^2.z$ **ve b=** $x.y^4$ **şeklinde verilmiş a ve b sayılarının EBOB'u ortak olan çarpanlardan üssü küçük olanların çarpımı olan** $x.y^2$ **'dir.**

a= $2^3.3^2.7$ **ve b=** $2.3^4.5$ şeklinde verilmiş a ve b sayılarının EBOB'u , birinci ortak çarpan olan 2'nin küçük üslü olanı 2 ile ,diğer ortak çarpan olan 3'ün küçük üslü olanı 3^2 'yi çarparak buluruz.

Yani **EBOB(** $2^3.3^2.7$, $2.3^4.5$ **)=** 2.3^2 şeklinde bulunmuş olur.

8.1.9.A EBOB PROBLEMLERİ

Bütünden parçaya <u>eşit olarak</u> ayrılan,bölünen, parçalanan, paylaştırılan sorularda EBOB kullanılır;

1)Bidonlarda,varillerde,şişelerde,çuvallarda , ... vb. kaplarda bulunan malzemeler, <u>daha küçük</u> başka kaplara <u>eşit miktarlarda</u> aktarılıyorsa ,

a) En az kaç kap gerekir?
b)Küçük kaplara eşit olarak en çok ne kadar doldurulabilir?

2) Bahçenin veya tarlanın etrafına <u>eşit aralıklarla</u> ağaç dikilecekse,

a)En az kaç ağaç dikilir?
b)Ağaçlar arası aralık en çok ne olabilir?

3) İnsanlardan oluşan bir grubu <u>eşit olarak</u> uçak,otobüs,araba,sınıf,oda , ... vb. yerlere yerleştirmek istediğimizde,

a)Her gruba en çok kaç kişi yerleştirilebilir?
b) En az kaç uçak,otobüs,araba,sınıf,oda , ... vb. gerekir?

4) Uzun demir çubuk,uzun tahta parçası, kumaş v.b. <u>eşit uzunlukta</u> parçalara ayrılacaksa,

a)En az kaç parçaya ayrılabilir?
b)Parça uzunluğu en çok ne olabilir?

5) Dikdörtgen şeklindeki kartondan <u>eşit</u> küçük kare kartonlar oluşturuluyorsa,

a)En az kaç adet kare oluşturulur?
b)Karelerin boyutu en fazla ne olabilir?

6)Zemine <u>eşit büyüklükte</u> kare fayans döşenecekse,

a) En az kaç fayans gerekir?
b) Fayansların büyüklüğü en çok ne olabilir?

7) Dikdörtgenler prizmasının içi <u>eşit büyüklükte</u> küplerle doldurulacaksa,

a)En az kaç küp ile doldurulabilir?
b)Küplerin boyutu en çok ne olabilir?

gibi sorularda **EBOB kullanılır**.

ANAHTAR KELİME= EŞİT
(eşit uzunlukta, eşit aralıklarla vb.)

8.1.9.A EBOB PROBLEMLERİ KLASİK SORULAR

1) İki çuvaldan birinde 20 kg pirinç ,diğerinde 28 kg bulgur vardır.Pirinç ve bulgur birbirine karıştırıl-madan hiç artmayacak ve eşit ağırlıkta olacak şekilde poşetlere doldurulacaktır. Bu iş için

a) Poşetlere <u>en çok</u> kaç kg konulabilir?
b) <u>En az</u> kaç tane poşet gerekir?

<u>Çözüm:</u>

<u>1.Yol:</u>

<u>En az</u> sayıda poşet istendiğine göre poşetlere alabileceği <u>en çok</u> pirinç ve bulgur konulmalıdır.Hiç artmaması isteniyor.O halde bir poşetin ağırlığı 20 ve 28'in içinde aranan en büyük ortak ağırlık yani en büyük ortak bölen olmalıdır.

Her poşete en çok 20 ve 28'in EBOB'u kadar yani 4 kg bulgur veya pirinç konulabilir.

20 ve 28'in içindeki 4 kg sayısı bize kaçar tane poşet gerektiğini ifade edecektir.

$$\begin{aligned}\text{Torba Sayısı} &= \frac{\text{Toplam kütle}}{\text{EBOB}}\\ &= \frac{28}{4}+\frac{20}{4}\\ &= 7+5\\ &= 12\end{aligned}$$

Toplam en az 12 poşet gerekir.

Derleyen:YUSUF KPL

2) Eni 21 m boyu 30 m olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin etrafına eşit aralıklarla kazıklar dikilecektir.Buna göre

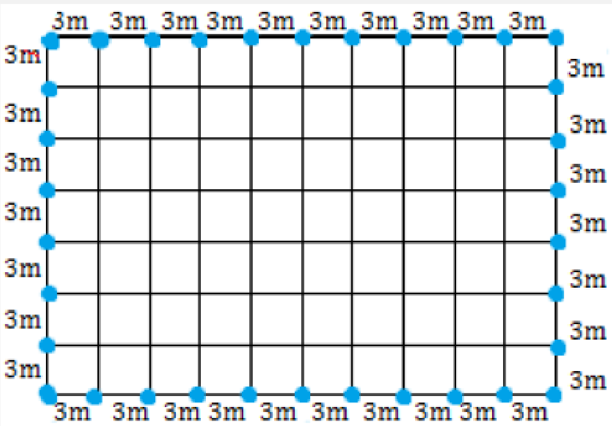
a) Aralık en çok kaç m olur?
b) <u>En az</u> kaç kazık gereklidir?

<u>Çözüm:</u>

Eşit aralıklarla dikilecek kazıklar en az sayıda olması istendiğinden aralıklar en büyük seçilmelidir.Yani 21 ve 30'un EBOB'u iki kazık arasındaki mesafeyi verir.

EBOB(21,30)=3

En çok 3'er metre aralıklarla kazıklar çakılabilir.30 ve 21 m'lik uzunluklar içerisinde 3m'lik aralık sırasıyla 10 ve 7 adettir.Buna göre 10 aralık için 11 kazık,7 aralık için 8 kazık çakılabilir.



Üst ve alt sıraya 10+1=11'er adet kazık çakılır.Düşey sırada ise en üst ve en alta önceden çakıldığı için (7+1)-2=6'şar adet kazık çakılır.

Toplam 11+11+6+6=34 adet kazık çakılır.

3) 150 kız , 192 erkeğin olduğu bir gezide ziyaretçiler gruplara ayrılacaktır.Buna göre her grup eşit sayıda ve kızlar ile erkekler birbirine karışmayacak şekilde ayrıldığında ,

a) Gruplarda <u>en fazla</u> kişi olabilir?
b) <u>En az</u> kaç grup kurulabilir?

<u>Çözüm:</u>

Bütünden küçük eş parçalar oluşturulması istendiğine göre EBOB problemidir. <u>En az</u> sayıda grup oluşturulacağına göre gruplara <u>en çok</u> kişi yerleştirilmelidir.O halde bir gruptaki kişi sayısı 150 ve 192'nin içinde aranan en büyük ortak bölen olmalıdır.

150	**192**	**2**
75	**96**	**3**
25	**32**	

En büyük ortak bölen 2.3=6'dır.

Her grup <u>en fazla</u> 6'şar kişiden oluşur.

$$\text{Grup Sayısı} = \frac{\text{Toplam kişi sayısı}}{\text{EBOB}}$$
$$= \frac{192}{6} + \frac{150}{6}$$
$$= 32 + 25$$
$$= 57$$

Kızlar ve erkekler birbirine karışmadan 6'şarlı toplam 57 grup kurulabilir.

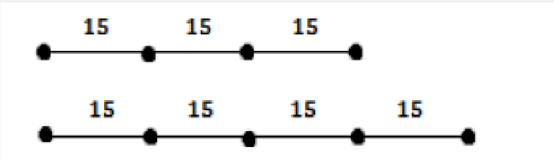
4) 45 cm ve 60 cm uzunluğundaki iki demir çubuk eşit uzunluktaki parçalara ayrılmak isteniyor.Buna göre,

a)Demir çubuk parçaları <u>en fazla</u> ne kadar uzunlukta olur?
b) <u>En az</u> kaç parça demir çubuk elde edilir?

<u>**Çözüm:**</u>

Bütünden küçük eş parçalar oluşturulması istendiğine göre EBOB problemidir. <u>En az</u> sayıda eşit uzunlukta parçalar oluşturulabilmesi için aralık en büyük seçilmelidir.

O halde 45 ve 60 cm'nin EBOB'unu bulunur. EBOB(45,60)=15'tir.Yani parça çubuklar 15'er cm olabilir en çok.



$$\begin{aligned}\text{Parça Sayısı} &= \frac{\text{Toplam parça uzunluğu}}{\text{EBOB}} \\ &= \frac{60}{15}+\frac{45}{15} \\ &= 4+3 \\ &= 7\end{aligned}$$

En az 7 parça demir çubuk elde edilir.

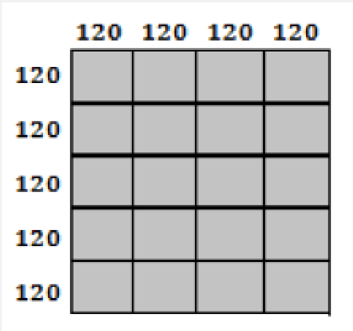
5) Eni 600 cm , boyu 480 cm olan bir odaya kare fayanslardan döşenecektir.Buna göre ,

a)Kare fayansların bir boyutunun uzunluğu <u>en fazla</u> ne olmalıdır?
b)<u>En az</u> kaç tane kare fayans gerekir?

<u>**Çözüm:**</u>

Bütüne bakılıp içerisindeki en büyük eş parçaların sayısı istendiğine göre EBOB problemidir. Buna göre 600 ve 480'in EBOB'u bulunup kare fayansların bir kenar uzunluğunun en fazla kaç olabileceği hesaplanır.

EBOB(600,480)=120'dir.



Buna göre kare fayansların bir boyutunun uzunluğu en fazla 120 cm'dir.

$$\begin{aligned}\text{Kare Sayısı} &= \frac{\text{Dikdörtgen alanı}}{\text{Kare alanı}} \\ &= \frac{600.480}{120.120} \\ &= 5.4 \\ &= 20\end{aligned}$$

Bir boyutunun uzunluğu en büyük, en az 20 adet kare fayans yerleştirilir.

Derleyen:YUSUF KPL

6) Eni 120, boyu 180,yüksekliği 240 cm olan dikdörtgenler prizmasının içerisine tüm hacmi dolduracak şekilde eşit büyüklükte küpler yerleştirilecektir.Buna göre ,

a)Küpün bir ayrıtı <u>en çok</u> ne olabilir?
b)<u>En az</u> kaç tane küp yerleştirilebilir?

<u>Çözüm:</u>

Bütüne bakılıp içerisindeki en büyük eş parçaların sayısı istendiğine göre EBOB problemidir. Buna göre 120,180 ve 240'ın EBOB'u bulunup küpün bir boyut uzunluğunun en fazla kaç olabileceği hesaplanır.

EBOB(120,180,240)=60 cm'dir.

Yani küpün bir boyut uzunluğu en fazla 60 cm olabilir.

$$\text{Küp Sayısı} = \frac{\text{Dik. prizma hacmi}}{\text{Küp hacmi}} = \frac{120.180.240}{60.60.60} = 2.3.4 = 24$$

Bir boyutunun uzunluğu en büyük, en az 24 adet küp yerleştirilir.

7) 122 ve 98 sayılarını böldüğünde her defasında 2 kalanı veren <u>en büyük</u> sayı kaçtır?

<u>Çözüm:</u>

122 ve 98 sayılarından 2 kalanı çıkartıldığında sayılar en büyük ortak bölen bir sayıya tam bölünür.Yani

122-2=120
98-2=96

sayıları en büyük ortak bir bölene tam bölünür.

120	96	
60	48	2
30	24	2
15	12	2
5	4	3

Sadece ortak bölenlerin çarpımı EBOB'u verir.

EBOB(120,96)=2.2.2.3
= 24

122 ve 98 sayıları en çok 24 sayısına bölündüğünde 2 kalanı verir.

8.1.10 EKOK ve EBOB'un GENEL ÖZELLİKLERİ:

1) İki doğal sayının EBOB'u ile EKOK'u çarpımı, sayıların çarpımına eşittir.

EBOB(A,B) . EKOK(A,B) = A . B

<u>Örnek:</u>

$$\underbrace{\text{EBOB}(10,20)}_{10}.\underbrace{\text{EKOK}(10,20)}_{20}=10.20$$

2) İki doğal sayıdan biri diğerinin tam katı ise bu iki sayının EBOB'u küçük olan sayıya , EKOK'u ise büyük olan sayıya eşittir.

A , B'nin tam katı ise (A>B)

EKOK(A,B) = A
EBOB(A,B) = B

<u>Örnek:</u>

$$\text{EKOK}(5,20)=20$$
$$\text{EBOB}(5,20)=5$$

3) Aralarında asal sayıların EBOB'u 1'e eşittir. Aralarında asal sayıların EKOK'u ise aralarında asal sayıların çarpımı olan sayıya eşittir.

A ile B aralarında asal sayılar ise,

EKOK(A,B) = A . B
EBOB(A,B) = 1

<u>Örnek:</u>

$$\text{EKOK}\ (9,16)=9.16$$
$$\text{EBOB}\ (9,16)=1$$

4) İki sayının EBOB'u bu iki sayıdan büyük olamaz.

EBOB(A,B) $\leq$ A
EBOB(A,B) $\leq$ B

<u>Örnek:</u>

$\underbrace{\text{EBOB}(12,18)}_{6} \leq 12$
$\underbrace{\text{EBOB}(12,18)}_{6} \leq 18$

5) İki sayının EKOK'u bu iki sayıdan küçük olamaz.

EKOK (A,B) $\geq$ A
EKOK (A,B) $\geq$ B

<u>Örnek:</u>

$\underbrace{\text{EKOK}(12,18)}_{36} \geq 12$
$\underbrace{\text{EKOK}(12,18)}_{36} \geq 18$

6) Aynı iki sayının EKOK'u da EBOB'u da kendilerine eşittir.

EKOK (A,A) = A
EBOB (A,A) = A

<u>Örnek:</u>

$\text{EKOK}\ (8,8) = 8$
$\text{EBOB}\ (8,8) = 8$

8.2.1 ÜSLÜ SAYI KAVRAMI

Aynı sayıların çarpımının kısa biçimde gösterimine **üslü biçimde gösterim** denir.

$$\underbrace{2.2.2.2.2.\ \dots .2}_{n\ tane} = 2^n$$

n tane 2 sayısının çarpımı üslü biçimde " 2^n " şeklinde gösterilir.

$Taban \leftarrow\ 2^{n \rightarrow üs, kuvvet}$

NOT:

Bir sayının
2.kuvvetleri <u>karesi</u> ,
3.kuvvetleri <u>küpü</u> şeklinde de okunabilir.

$5^2 \rightarrow$ 5'in karesi
$5^3 \rightarrow$ 5'in küpü

NOT:

" $2^4 = 2.2.2.2 \rightarrow$ " ifadesindeki 2^4 üslü ifadesi 4 tane 2'nin çarpımına eşittir.Yani tabandaki sayı , çarpılacak sayının cinsini, üs deki sayı kaç adet çarpılacağını ifade eder.

$2^5 \rightarrow$ ifadesi 5 tane 2'nin çarpımına eşittir.
$3^6 \rightarrow$ ifadesi 6 tane 3'ün çarpımına eşittir.
$(-5)^4 \rightarrow$ ifadesi 4 tane -5'in çarpımına eşittir.

Akılda kalması amaçlı Galatasaray futbol takımının sloganı kullanılabilir.

$(\text{re})^3 + (\text{ra})^3 + (\text{galatasaray})^2 + \text{cim} + (\text{bom})^2$

ii) Tabanı parantez içerisinde olan üslü ifadelerin değerini bulma:

Tabanı parantez içerisinde olan üslü ifadelerin değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$(-2)^4 \rightarrow 4$ tane (-2)'nin çarpımı şeklinde düşünülür.

$\rightarrow (-2).(-2).(-2).(-2)$

$\rightarrow +16$

Negatif sayıların <u>çift kuvvetleri</u> pozitife , <u>tek kuvvetleri</u> negatife eşittir.

$(\text{negatif})^{\text{çift}} = \text{pozitif}$

$(-2)^{100} = \text{pozitif}$

$(\text{negatif})^{\text{tek}} = \text{negatif}$

$(-2)^{99} = \text{negatif}$

Pozitif sayıların <u>çift kuvvetleri</u> pozitife , <u>tek kuvvetleri</u> de pozitif eşittir.

$(\text{pozitif})^{\text{çift}} = \text{pozitif}$

$(+2)^{100} = \text{pozitif}$

$(\text{pozitif})^{\text{tek}} = \text{pozitif}$

$(+2)^{99} = \text{pozitif}$

i) Parantezsiz üslü ifadelerin değerini bulma:

Parantezsiz üslü ifadelerin değeri aşağıdaki örnekteki gibi hesaplanır.

$+2^4 \rightarrow +\ (2^4)$

$\rightarrow +\ (2.2.2.2)$

$\rightarrow +\ (16)$

$+2^4$ parantezsiz işleminde önce 2^4'ün değeri bulunur.Daha sonra bulunan değerin önüne + konur.

$-3^4 \rightarrow -\ (3^4)$

$\rightarrow -\ (3.3.3.3)$

$\rightarrow -\ (81)$

-3^4 parantezsiz işleminde önce 3^4'ün değeri bulunur.Daha sonra bulunan değerin önüne - konur.

Yani önce işarete bakılmaksızın üslü ifade hesaplanır.Sonra sonucun önüne işaret eklenir.

NOT: (Gereksiz Parantez)

-2^4 ifadesine eklenen parantez gereksiz bir parantez olduğundan (-2^4) işleminin değerini değiştirmez.

Yani ; $-2^4 = (-2^4)$'*tür*.

NOT: (Gerekli Parantez)

-2^4 *ile* $(-2)^4$ ifadesinin sonucu aynı değildir.

$$-2^4 \neq (-2)^4$$

-2^4 parantezsiz işleminde önce 2^4'ün değeri bulunur.Daha sonra bulunan değerin önüne - konur.

$$-2^4 = -(2^4) = -(2.2.2.2) = -(16) = -16$$

$(-2)^4$ işleminin sonucu 4 tane (-2)'nin çarpımı şeklindedir.

$$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = +16$$

Buna göre $-16 \neq +16$ olduğundan $-2^4 \neq (-2)^4$ olduğu doğrulanmış olur.

ÜSLÜ SAYILAR İLE İLGİLİ NOTLAR:

1) Sıfır hariç tüm sayıların sıfırıncı kuvveti 1 sayısına eşittir.

$2^0=1$ $5^0=1$ $(\frac{1}{2})^0=1$ $(-10)^0=1$

2) Sıfırın , sıfırıncı kuvveti hariç tüm pozitif kuvvetleri sıfıra eşittir.

$0^4=0$ $0^7=0$ $0^{120}=0$ $0^0\neq 0$

3) Tüm sayıların 1. kuvveti kendisine eşittir.

$2^1=2$ $5^1=5$ $(\frac{2}{3})^1=\frac{2}{3}$ $(-10)^1=-10$

4) 1'in bütün kuvvetleri 1'e eşittir.

$1^4=1$ $1^7=1$ $1^{20}=1$ $1^{100}=1$

5) Üssü belirtilmemiş her sayının üssü 1 'dir.

$8=8^1$ $10=10^1$ $a=a^1$

6) -1 sayısının çift kuvvetleri +1 , tek kuvvetleri -1 sayısına eşittir.

$(-1)^{\text{çift}}=+1$
$(-1)^{\text{tek}}=-1$

$(-1)^{100}=+1$
$(-1)^{99}=-1$

AŞAĞIDA VERİLEN ÜSLÜ İFADELERİ EZBERE BİLMEK SİZE SINAVLARDA ZAMAN KAZANDIRACAKTIR.

$2^0=1$	$3^0=1$	$4^0=1$	$5^0=1$	$6^0=1$
$2^1=2$	$3^1=3$	$4^1=4$	$5^1=5$	$6^1=6$
$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$	$6^3=216$
$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$	$5^4=625$	
$2^5=32$	$3^5=243$			
$2^6=64$	$3^6=729$			
$2^7=128$				
$2^8=256$				
$2^9=512$				
$2^{10}=1024$				

TAM KARE SAYILAR

$1^2=1$	$11^2=121$	$30^2=900$	$25^2=625$
$2^2=4$	$12^2=144$	$40^2=1600$	$35^2=1225$
$3^2=9$	$13^2=169$	$50^2=2500$	$45^2=2025$
$4^2=16$	$14^2=196$	$60^2=3600$	$55^2=3025$
$5^2=25$	$15^2=225$	$70^2=4900$	$65^2=4225$
$6^2=36$	$16^2=256$	$80^2=6400$	$75^2=5625$
$7^2=49$	$17^2=289$	$90^2=8100$	$85^2=7225$
$8^2=64$	$18^2=324$	$100^2=10000$	$95^2=9025$
$9^2=81$	$19^2=361$		
$10^2=100$	$20^2=400$		

Derleyen:YUSUF KPL

NOT: Sonu 5 ile biten sayıların karesini bulurken kolay bir yöntemimiz var. Sondaki 5'in önündeki sayıyı bir fazlasıyla çarpıp ve yanına 25 eklediğinizde istenen sayıyı bulmuş olursunuz.

65^2 => Sondaki 5'in önündeki 6 ,bir fazlası olan 7 ile çarpılır. (6x7=42) Bulunan bu sayının (42) 'nin yanına 25 eklenir. Yani sonuç 4225 olur.

$65^2 = 4225$

8.2.2 ÜSLÜ SAYILARLA İLGİLİ TEMEL KURALLAR

8.2.2.A ÜSLÜ SAYILARIN KUVVETİNİ ALMA

$(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6$

Üslü bir sayının üssü alınırken, üsler çarpılır.

Çünkü ;

$(2^3)^2$ demek 2 tane 2^3 'ün çarpımı demektir.

Buna göre $(2^3)^2 = 2^3.2^3 = 2^6$ eder.

NOT: $(2^3)^2 = (2^2)^3$ parantez içi ve dışı üslerin yer değiştirmesi <u>işlemin sonucunu</u> değiştirmez.Bu değişiklik bazı soruları çözmemize yardımcı olacaktır.

8.2.2.B RASYONEL SAYILARIN KUVVETİNİ ALMA

Rasyonel sayıların kuvveti 2 şekilde alınabilir.

<u>1.yol</u>: (Üslü sayı tanımına göre)

$(\frac{5}{2})^{+3} \rightarrow 3 \ tane \ \frac{5}{2} \ çarpılıp \ sonuç \ bulunur$

$(\frac{5}{2})^{+3} = (\frac{5}{2}).(\frac{5}{2}).(\frac{5}{2}) = \frac{125}{8}$

<u>2.yol</u>: Ortak üs hem paya hem de paydaya ait olduğundan, pay ve paydanın kuvvetleri ayrı ayrı alınıp işlem yapılabilir.

$(\frac{5}{2})^{+3} = \frac{5^{+3}}{2^{+3}} = \frac{5.5.5}{2.2.2} = \frac{125}{8}$

Tam sayılı kesirlerin kuvveti alırken,tam sayılı kesir bileşik kesir haline getirildikten sonra kuvveti alınır.

$(1\frac{2}{3})^{+3} = (\frac{5}{3})^{+3} = \frac{5^{+3}}{3^{+3}} = \frac{125}{27}$

8.2.2.D ÜSLÜ SAYILARIN NEGATİF KUVVETLERİ

a) Üslü bir sayının negatif kuvveti alabilmek için,negatif olan üs pozitife dönüştürülür ve bu şekilde işlemin sonucu bulunur.

Bir üslü ifadenin üssünün işaretini değiştirmek için, paydaki ifade paydaya,paydadaki ifade paya gönderildiğinde üslü sayının üssünün işareti değişir.

Yani negatif üslü ifadenin üssünün işaretini pozitif olarak değiştirmek için, paydaki ifade paydaya yada paydadaki ifade paya gönderildiğinde üslü sayının negatif olan üssü pozitife dönüşmüş olur.

$$2^{-4} = \frac{1}{2^{+4}} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{16}$$

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^{+4}} = \frac{1}{(-2).(-2).(-2).(-2)} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2^{-4}} = 1.2^{+4} = 1.2.2.2.2 = 16$$

$$\frac{2^{-3}}{2^{-4}} = \frac{2^{+4}}{2^{+3}} = \frac{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}.2}{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}} = 2$$

b) Tabanı $\frac{a}{b}$ şeklinde olan üslü bir sayının negatif kuvvetini alırken, taban ters çevrilerek negatif üs pozitife dönüştürülür ve bu şekilde işlem yapılır.

$$(\frac{a}{b})^{-2} = (\frac{b}{a})^{+2}$$

$$(\frac{2}{3})^{-2} = (\frac{3}{2})^{+2} = \frac{3^{+2}}{2^{+2}} = \frac{3.3}{2.2} = \frac{9}{4}$$

$$(-\frac{1}{3})^{-2} = (-\frac{3}{1})^{+2} = (-3)^{+2} = (-3).(-3) = +9$$

$$(-\frac{2}{5})^{-3} = (-\frac{5}{2})^{+3} = (-\frac{5}{2}).(-\frac{5}{2}).(-\frac{5}{2}) = -\frac{125}{8}$$

8.2.3 ÜSLÜ SAYILARDA KARŞILAŞTIRMA

A) Tabanları Aynı Olan Üslü Sayılarda Karşılaştırma:

a) Tabanları aynı pozitif doğal sayı olan üslü sayılarda, üs büyüdükçe üslü sayının değeri de büyür.

$$2^{-4} = \frac{1}{2^{+4}} = \frac{1}{2.2.2.2} = \frac{1}{16}$$
$$2^{-3} = \frac{1}{2^{+3}} = \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{8}$$
$$2^{-2} = \frac{1}{2^{+2}} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2^{+1}} = \frac{1}{2}$$
$$2^{0} = 1$$
$$2^{1} = 2$$
$$2^{2} = 2.2 = 4$$
$$2^{3} = 2.2.2 = 8$$
$$2^{4} = 2.2.2.2 = 16$$

.
.
.

Buna göre tabanı aynı pozitif doğal sayı olan üslü sayılardan üssü küçük olan daha küçüktür.

$$2^{-4} < 2^{-3} < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0} < 2^{1} < 2^{2} < 2^{3} < 2^{4}$$

b) Tabanları 0 ile 1 arasında ve aynı olan üslü sayılarda, üs büyüdükçe üslü sayının değeri küçülür.

$$(\frac{1}{2})^{-2} = (\frac{2}{1})^{+2} = \frac{2^{+2}}{1^{+2}} = \frac{4}{1} = 4$$
$$(\frac{1}{2})^{-1} = (\frac{2}{1})^{+1} = \frac{2^{+1}}{1^{+1}} = \frac{2}{1} = 2$$
$$(\frac{1}{2})^{0} = \frac{1^{0}}{2^{0}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$(\frac{1}{2})^{+1} = \frac{1^{+1}}{2^{+1}} = \frac{1}{2}$$
$$(\frac{1}{2})^{+2} = \frac{1^{+2}}{2^{+2}} = \frac{1}{4}$$

.
.
.

Buna göre tabanı 0 ile 1 arasında ve aynı sayılardan üssü büyük olan sayının değeri küçüktür.

$$(\frac{1}{2})^{-2} > (\frac{1}{2})^{-1} > (\frac{1}{2})^{0} > (\frac{1}{2})^{+1} > (\frac{1}{2})^{+2}$$

B) Üsleri Aynı Olan Üslü Sayılarda Karşılaştırma:

a) Üsleri aynı pozitif doğal sayı, tabanı doğal sayı olan üslü sayılardan tabanı küçük olan sayı daha küçüktür.

$$0^{2} = 0.0 = 0$$
$$1^{2} = 1.1 = 1$$
$$2^{2} = 2.2 = 4$$
$$3^{2} = 3.3 = 9$$
$$4^{2} = 4.4 = 16$$

.
.
.

Görüldüğü üzere $0^{2} < 1^{2} < 2^{2} < 3^{2} < 4^{2}$ 'dir.

NOT:

Üsleri sıfır olan sayıların sıralaması birbirine eşittir.

$$2^{0} = 3^{0} = 4^{0}$$

Derleyen:YUSUF KPL

b) i. Tabanları <u>negatif tamsayı</u> , üsleri <u>pozitif çift tam sayı</u> olan üslü ifadelerin taban küçüldükçe , sayı değeri büyür.

$$(-1)^2 = (-1).(-1) = +1$$
$$(-2)^2 = (-2).(-2) = +4$$
$$(-3)^2 = (-3).(-3) = +9$$
$$(-4)^2 = (-4).(-4) = +16$$

.
.
.

Görüldüğü üzere $(-1)^2 \langle\ (-2)^2 \langle\ (-3)^2 \langle\ (-4)^2$ 'dir.

ii. Tabanları <u>negatif tamsayı</u> , üsleri <u>negatif çift tam sayı</u> olan üslü ifadelerin taban küçüldükçe , sayı değeri de küçülür.

$$(-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^{+2}} = \frac{1}{(-1).(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$
$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^{+2}} = \frac{1}{(-2).(-2)} = \frac{1}{4}$$
$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^{+2}} = \frac{1}{(-3).(-3)} = \frac{1}{9}$$
$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^{+2}} = \frac{1}{(-4).(-4)} = \frac{1}{16}$$

.
.
.

Görüldüğü üzere

$(-4)^{-2} \langle\ (-3)^{-2} \langle\ (-2)^{-2} \langle\ (-1)^{-2}$ 'dir.

c) i. Tabanları <u>negatif tamsayı</u> , üsleri <u>pozitif tek tam sayı</u> olan üslü ifadelerin taban küçüldükçe , sayı değeri de küçülür.

$$(-1)^3 = (-1).(-1)(-1) = -1$$
$$(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$$
$$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -27$$
$$(-4)^3 = (-4).(-4).(-4) = -64$$

.
.
.

Görüldüğü üzere $(-1)^3 \rangle\ (-2)^3 \rangle\ (-3)^3 \rangle\ (-4)^3$ 'dir.

ii. Tabanları <u>negatif tamsayı</u> , üsleri <u>negatif tek tam sayı</u> olan üslü ifadelerin taban küçüldükçe , sayı değeri de küçülür.

$$(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^{+3}} = \frac{1}{(-1).(-1).(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^{+3}} = \frac{1}{(-2).(-2).(-2)} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$
$$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^{+3}} = \frac{1}{(-3).(-3)(-3)} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$$
$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^{-3}} = \frac{1}{(-4).(-4).(-4)} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$$

.
.
.

Görüldüğü üzere $(-4)^{-3} \langle (-3)^{-3} \langle (-2)^{-3} \langle (-1)^{-3}$ 'dir.

d) **i.** Tabanları <u>0 ile -1 arasında</u> ve <u>aynı</u> olan üslü sayılarda,
üs <u>pozitif çift tamsayı</u> ise taban büyüdükçe , sayının değeri küçülür.

$$(-\frac{1}{2})^{+2} = (-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}) = +\frac{1}{4}$$
$$(-\frac{1}{3})^{+2} = (-\frac{1}{3}).(-\frac{1}{3}) = +\frac{1}{9}$$
$$(-\frac{1}{4})^{+2} = (-\frac{1}{4}).(-\frac{1}{4}) = +\frac{1}{16}$$
$$(-\frac{1}{5})^{+2} = (-\frac{1}{5}).(-\frac{1}{5}) = +\frac{1}{25}$$

.
.
.

Görüldüğü üzere ;

$(-\frac{1}{2})^{+2} \rangle\ (-\frac{1}{3})^{+2} \rangle\ (-\frac{1}{4})^{+2} \rangle\ (-\frac{1}{5})^{+2}$ 'dir.

ii. Tabanları <u>0 ile -1 arasında</u> ve <u>aynı</u> olan üslü sayılarda, üs <u>negatif çift tamsayı</u> ise taban büyüdükçe, sayının değeri de büyür.

$$(-\frac{1}{2})^{-2} = (-\frac{2}{1})^{+2} = (-2)^{+2} = (-2).(-2) = +4$$
$$(-\frac{1}{3})^{-2} = (-\frac{3}{1})^{+2} = (-3)^{+2} = (-3).(-3) = +9$$
$$(-\frac{1}{4})^{-2} = (-\frac{4}{1})^{+2} = (-4)^{+2} = (-4).(-4) = +16$$
$$(-\frac{1}{5})^{-2} = (-\frac{5}{1})^{+2} = (-5)^{+2} = (-5).(-5) = +25$$

.

.

.

Görüldüğü üzere ;

$(-\frac{1}{2})^{-2} < (-\frac{1}{3})^{-2} < (-\frac{1}{4})^{-2} < (-\frac{1}{5})^{-2}$ 'dir.

C) Üsleri ve Tabanları Eşit Olmayan Üslü Sayıları Karşılaştırma:

i. Üssün üssünden yararlanarak tabanlar eşitlenir.

$$16^3 \ , \ 8^5 \ , \ 2^9 \Rightarrow (2^4)^3, \ (2^3)^5, \ 2^9$$
$$\Rightarrow 2^{12}, \ 2^{15} \ , \ 2^9$$
$$\Rightarrow 2^9 < 2^{12} < 2^{15}$$
$$\Rightarrow 2^9 < 16^3 < 8^5$$

ii. Üssün üssünden yararlanarak üsler eşitlenir.

$$25^6 \ ,16^3 \ ,3^{12} \Rightarrow (5^2)^6, \ (2^4)^3, \ 3^{12}$$
$$\Rightarrow 5^{12}, \ 2^{12} \ , \ 3^{12}$$
$$\Rightarrow 2^{12} < 3^{12} < 5^{12}$$
$$\Rightarrow 16^3 < 3^{12} < 25^6$$

iii. Üslü değerler teker teker bulunup karşılaştırılır.

$$2^6 \ , \ 5^3 \ , \ 9^2 \Rightarrow 64 \ , \ 125 \ , \ 81$$
$$\Rightarrow 64 < 81 < 125$$
$$\Rightarrow 2^6 < 9^2 < 5^3$$

8.2.4 ÜSLÜ SAYILARDA 4 İŞLEM

8.2.4.A ÜSLÜ SAYILARDA TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ

Üslü sayılarda toplama veya çıkarma işleminde her üslü niceliğin değeri ayrı ayrı bulunur ve gerekli işlem yapılır.

$$2^3 + 2^4 = (2.2.2) + (2.2.2.2) = 8 + 16 = 24$$
$$3^4 - 4^2 = (3.3.3.3) - (4.4) = 81 - 16 = 65$$

NOT: Toplama ve çıkarma işleminde ortak çarpan parantezine alma işlemi varsa, paranteze alınıp işlem yapılabilir.

$$5.2^3 + 6.2^4 = 5.2^3 + 6.(2.2^3) = (5+12).2^3 = 17.2^3$$

8.2.4.B ÜSLÜ SAYILARDA ÇARPMA İŞLEMİ

a) Tabanları aynı olan üslü sayılar çarpılırken üsler toplanır.

$$2^{+3}.2^{+4} = 2^{(+3)+(+4)} = 2^{+7}$$

<u>**İspat:**</u>

$$2^{+3}.2^{+4} = (2.2.2).(2.2.2.2) = 2^{+7}$$

b) Üsleri aynı tabanları farklı olan üslü sayılar çarpılırken, tabanlar çarpılır üs aynen yazılır.

$$3^{+2}.4^{+2} = (3.4)^{+2} = 12^{+2}$$

<u>**İspat:**</u>

$$3^{+2}.4^{+2} = (3.3).(4.4) = (3.4).(3.4) = 12.12 = 12^{+2}$$

c) Üsleri de tabanları da aynı olmayan sayıların tabanları aynı hale getirilir.

$$27^4.81^2 = (3^3)^4.(3^4)^2 = 3^{12}.3^8 = 3^{20}$$

d) Üsleri ve tabanları aynı olmayan sayıların üsleri aynı hale getirilip işleme devam edilir.

$$64^3.25^9 = (2^6)^3.(5^2)^9 = 2^{18}.5^{18} = (2.5)^{18} = 10^{18}$$

NOT: *Çarpım durumunda bulunan iki veya ikiden fazla sayının kuvveti,çarpanların ortak kuvvetidir. Ortak kuvvet, her bir çarpana ait olduğundan her bir çarpana teker teker eklenebilir.

$$(2.3)^{+4} = 2^{+4}.3^{+4}$$

Çarpanlarının da üssü olduğu durumlarda, ortak kuvvet çarpanların üssü teker teker ile çarpılarak eklenir.

$$(2^{+3}.3^{+2})^{+4} = (2^{+3})^{+4}.(3^{+2})^{+4} = 2^{+12}.3^{+8}$$

SONDAKİ BASAMAKLARINDAKİ SIFIR SAYISI :

i. 10'un kuvveti olan sayıların sonunda , kuvvet kadar sıfır sayısı vardır.

$10^n = 1\underbrace{000...0}_{n \text{ tane}}$ sayısının sonunda n tane sıfır vardır.

ii. 4.10^n şeklindeki sayıların son basamağında 10'un kuvveti kadar sıfır sayısı vardır.

$$4.10^n = 4.1\underbrace{000...0}_{n \text{ tane}}$$
$$= 4\underbrace{000...0}_{n \text{ tane}}$$

BASAMAK SAYISI HESABI :

i. $10^n = \underbrace{1000...0}_{n+1 \text{ basamak}}$ sayısı n+1 basamaklıdır.

ii. $4.10^n = 4.1\underbrace{000...0}_{n \text{ tane}}$

$= 4\underbrace{000...0}_{n \text{ tane}}$

4.10^n sayısı n+1 basamaklıdır.

NOT:

Tabanı 2 ve 5 olan çarpım durumundaki sayılar çarpma işleminin özelliklerinden yararlanarak,tabanı 10 olan sayıya dönüştürülerek basamak sayısı hesabı yada sonundaki sıfır sayısı hesabı yapılabilir.

$$2^{10}.5^8 = 2^2.2^8.5^8 = 2^2.(2.5)^8 = 2^2.10^8 = 4.10^8$$

8.2.4.C ÜSLÜ SAYILARDA BÖLME İŞLEMİ

a) Tabanları aynı üsleri farklı olan üslü ifadelerin bölümü yapılırken, ortak taban aynen yazılır,payın üssünden paydanın üssü çıkarılarak sonucun üssü bulunur.

$$\frac{5^{+3}}{5^{+2}} = (5)^{(+3)-(+2)} = 5^{+1}$$

Çünkü ;

$$\frac{5^{+3}}{5^{+2}} = 5^{+3}.5^{-2} = 5^{(+3)+(-2)} = 5^{+1}$$

b) Tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerin bölümünde tabanlar bölünür, ortak üs, üs olarak yazılır.

$$\frac{5^{+3}}{2^{+3}} = (\frac{5}{2})^{+3}$$

Çünkü ;

$$\frac{5^{+3}}{2^{+3}} = \frac{5.5.5}{2.2.2} = (\frac{5}{2}).(\frac{5}{2}).(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2})^{+3}$$

c) Tabanları ve üsleri farklı olan üslü ifadelerde bölme işlemi yapabilmek için;

1. Yol :

Tabanlar eşitlenmeye çalışılarak bölme işlemi yapılır.

$$\frac{4^{+6}}{8^{+2}}=\frac{(2^{+2})^{+6}}{(2^{+3})^{+2}}$$
$$=\frac{2^{+12}}{2^{+6}}$$
$$=2^{(+12)-(+6)}$$
$$=2^{+6}$$

2. Yol :

Üsler eşitlenmeye çalışılarak bölme işlemi yapılır.

$$\frac{4^{+6}}{8^{+2}}=\frac{4^{+6}}{(2^{+3})^{+2}}$$
$$=\frac{4^{+6}}{2^{+6}}$$
$$=(\frac{4}{2})^{+6}$$
$$=2^{+6}$$

3. Yol :

Tekrarlı çarpım şeklinde yazılır,sadeleştirme işlemi yapılarak bölme işlemi yapılır.Bu işlem uzun ve zaman alıcı bir yöntemdir.Bu yüzden önce diğer yöntemleri denemek çoğu zaman daha kolaydır.

$$\frac{4^{+6}}{8^{+2}}=\frac{\cancel{4.4}.4.4.4.4}{\cancel{8.8}}$$
$$=\frac{\cancel{4.4}.4.4}{\cancel{2.2}}$$
$$=\frac{2.2.4.4}{1.1}$$
$$=64$$

NOT: Bölüm durumunda bulunan (kesir halinde bulunan) sayıların kuvveti alırken,kuvvet ortak kuvvet olarak kabul edilir.Yani ortak kuvvet hem payın hem de paydanın kabul edilir.

$$(\frac{5}{2})^{+3}=\frac{5^{+3}}{2^{+3}}=\frac{125}{8}$$

Hatırlanırsa yukarıdaki işlemin tam tersini üslü biçimde yazabilme şeklinde aşağıdaki gibi yapılıyordu.

$$\frac{125}{8}=\frac{5^{+3}}{2^{+3}}=(\frac{5}{2})^{+3}$$

8.2.6 ONDALIK GÖSTERİMLERİ 10'UN KUVVETİ OLARAK ÇÖZÜMLEME

Basamak İsimleri	Binler Basamağı	Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı	VİRGÜL	Onda Birler Basamağı	Yüzde Birler Basamağı	Binde Birler Basamağı
Onluk Kuvveti	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Sayı Değeri	5	0	2	1	,	4	8	3

$$\underbrace{5021}_{\text{(Tam Kısım)}} , \underbrace{483}_{\text{(Kesir Kısmı)}}$$

Biliyoruz ki şu an tüm dünyada kullanılan sayı sistemi 10'luk sistemdir. Buna göre **5021,483** sayısını 10 sayısının kuvvetlerini kullanarak aşağıdaki şekillerde çözümleyebiliriz.

i. $5.10^3+0.10^2+2.10^1+1.10^0+4.10^{-1}+8.10^{-2}+3.10^{-3}$

ii. $5.1000+0.100+2.10+1.1+4.\frac{1}{10}+8.\frac{1}{100}+3.\frac{1}{1000}$

iii. $5.1000+0.100+2.10+1.1+4.0,1+8.0,01+3.0,001$

NOT:

Ondalık gösterimlerin çözümlenmesinde 0 (sıfır) olan basamakların çözüme yazılmasına gerek yoktur.

Çözümlenmiş biçimde verilmiş ondalık gösterimlerde gösterilmemiş basamaklarda 0 (sıfır) vardır.

8.2.7 ÇOK KÜÇÜK VE ÇOK BÜYÜK SAYILAR

Çok büyük ve çok küçük sayılar , basamak değerleri çok büyük olan ya da değerce çok küçük olan sayıları ifade ederken kolaylık sağlaması açısından matematiksel hesaplamalar açısından çok önemli bir buluştur.Bazı önemli sabit sayıların tanımlanmasında , detaylı hesaplamalarda , küçük kütleli ya da sonsuza yakın değerdeki mesafelerle ilgili işlemlerde. kolaylık sağlarlar.

10'un pozitif tam sayı kuvvetleri çok büyük sayıların, negatif tam sayı kuvvetleri çok küçük sayıların üslü ifadeler şeklinde gösterilmesi için kullanılır.

$\Rightarrow$ Çok büyük sayıları aşağıdaki şekillerdeki gibi 10'un kuvveti halinde yazabiliriz.

$$40000 = 4.10000 = 4.10^4$$

$$53200000000 = 532.100000000 = 532.10^8$$

$$2000.30000 = 2.1000.3.10000 = 2.10^3.3.10^4 = 6.10^7$$

$\Rightarrow$ Çok küçük sayıları aşağıdaki şekillerdeki gibi 10'un kuvveti halinde yazabiliriz.

$$\frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 1.10^{-4}$$

$$\frac{5}{1000000000000000} = \frac{5}{10^{15}} = 5.10^{-15}$$

$$0,03x\,0,0004 = \frac{3}{100}.\frac{4}{10000} = \frac{3}{10^2}.\frac{4}{10^4} = \frac{12}{10^6} = 12.10^{-6}$$

$\Rightarrow$ a bir tam sayı olmak üzere $a.10^n$ sayısında ,n pozitif tam sayı ise a'nın sağına n tane sıfır koyulur.

$$3.10^5 = 3\underbrace{00000}_{5 \text{ tane}}$$

$\Rightarrow$ a bir tam sayı olmak üzere $a.10^n$ sayısında, n negatif tam sayı ise virgülden sonra n tane basamak olur ve a sayısı sağa yaslı olarak yazılır. Boş kalan basamaklara sıfır koyulur.

$$3.10^{-5} = 0,\underbrace{00003}_{5 \text{ tane}}$$

$\Rightarrow$ $a.10^n$ gibi ifadeler bu ifadeye eşit farklı şekillerde yazılabilirler.

$$\begin{aligned} a.10^n &= a0.10^{n-1} \\ &= a00.10^{n-2} \\ &= a000.10^{n-3} \end{aligned}$$

Buna göre $a.10^n$ ifadesinde , "a'nın virgülü 1 sağa kaydırıldığında , n sayısı 1 küçülür" .

$$\begin{aligned} a.10^n &= 0,a.10^{n+1} \\ &= 0,0a.10^{n+2} \\ &= 0,00a.10^{n+3} \end{aligned}$$

Buna göre $a.10^n$ ifadesinde , "a'nın virgülü 1 sola kaydırıldığında , n sayısı 1 büyültülür."

Yani kısaca "a" küçülürse "n" büyür, "a" büyürse "n" küçülür.

VİRGÜL KAYDIRMA İŞLEMİNDE DİKKAT !!!

$2,156.10^8$ sayısının virgül kaydıma işlemi ile eşitlerinin bulunması işlemini inceleyelim.

Virgül 1 sağa kaydırıldığında

$$2,156.10^8 = \underbrace{21,56}_{\text{Büyür}}.10^{7 \rightarrow (1 \text{ Küçülür.})}$$

Virgül 1 sola kaydırıldığında

$$2,156.10^8 = \underbrace{0,2156}_{\text{Küçülür}}.10^{9 \rightarrow (1 \text{ Büyür})}$$

ETKİNLİK:

45 000 000 $= 45000000 \cdot 10^0$
$= 4500000 \cdot 10^1$
$= 450000 \cdot 10^2$
$= 45000 \cdot 10^3$
$= 4500 \cdot 10^4$
$= 450 \cdot 10^5$
$= 45 \cdot 10^6$
$= 4{,}5 \cdot 10^7$

Not: Dikkat edilirse 10'un kuvveti olan 1 derece arttığında,diğer çarpanın değeri bir basamak kadar küçülür.

8.2.8 BİLİMSEL GÖSTERİM

Bilim adamlarının ilgilendikleri pek çok nicelik ya çok büyük ya da çok küçük değerlerdir.İşte bu yüzden hayatımızda çok büyük ve çok küçük sayılarla işlem yapmamızı kolaylaştıran ve tüm dünyaca kullanılan bir standarta bir bilimsel gösterime ihtiyaç duyulmuştur.Buna göre ;

"a" bir gerçek sayı **$1 \leq |a| < 10$** ve **$n \in Z$** olmak üzere
$a.10^n$ şeklindeki gibi gösterimler bilimsel gösterimdir.

Gezegenlerin birbirine uzaklıkları bilimsel olarak ifade edilmektedir.Gezegenlerin güneşe olan ortalama uzaklıklarını bilimsel olarak inceleyelim.

Merkür => 58 000 000 km = $5{,}8 \cdot 10^7$ km

Venüs =>108 000 000 km = $1{,}08 \cdot 10^8$ km

Dünya =>150 000 000 km = $1{,}5 \cdot 10^8$ km

Mars =>228 000 000 km = $2{,}28 \cdot 10^8$ km

Jüpiter =>778 000 000 km = $7{,}78 \cdot 10^8$ km

Satürn =>1 426 000 000 km = $1{,}426 \cdot 10^9$ km

Uranüs => 2 872 000 000 km = $2{,}872 \cdot 10^9$ km

Neptün => 4 503 000 000 km = $4{,}503 \cdot 10^9$ km

NOT: Sayıları bilimsel gösterime dönüştürürken tam kısmın **$1 \leq |a| < 10$** olmasına dikkat edilir.

NOT: Tam kısım negatif olabileceğinden dolayı negatif bilimsel gösterimler olabilir.

Örnek:

Bir AİDS virüsünün uzunluğu 0,00011 mm olduğuna göre 0,00011 mm bilimsel olarak nasıl ifade edilir ?

Çözüm:

1.adım: (Verilen sayının yanına **10^0** eklenir.)

$0{,}00011 = 0{,}00011 \cdot 10^0$

2.adım: ($a.10^n$ ifadesinde a sayısı , $1 \leq |a| < 10$ haline getirilir.)

$0{,}00011 \cdot 10^0$ ifadesinde, 0,00011 sayısı **$1 \leq |a| < 10$** olacak şekilde virgül kaydırma işlemi yapılır.Virgülün her 1 basamak sağa kaydırılmasında, a sayısı büyür ve 10'un üssü 1 azaltılır.

$$\underbrace{\overrightarrow{0001}^{\text{4 basamak sağa kaydırılır}}}_{\substack{\text{Tam Kısım} \\ (1 \leq |n| < 10)}},1 \cdot 10^{-4} \rightarrow \text{Üs 4 küçülür.}$$

$1{,}1 \cdot 10^{-4} \rightarrow$ şeklinde bilimsel gösterim olarak gösterilir.

8.3.1 KAREKÖKLÜ SAYI KAVRAMI

8.3.1.A Tam Kare Sayılar

Değeri bir sayma sayının karesi olan **1,4,9,16,25, ...** gibi sayılara **tam kare sayılar** veya **karesel sayılar** denir.

Örnek:

Ezbere bilmemizin kolaylık sağlayacağı tam kare sayıları hatırlayalım.

$1^2=1$	$11^2=121$	$25^2=625$
$2^2=4$	$12^2=144$	$30^2=900$
$3^2=9$	$13^2=169$	$35^2=1225$
$4^2=16$	$14^2=196$	$40^2=1600$
$5^2=25$	$15^2=225$	$45^2=2025$
$6^2=36$	$16^2=256$	$50^2=2500$
$7^2=49$	$17^2=289$	$55^2=3025$
$8^2=64$	$18^2=324$	$60^2=3600$
$9^2=81$	$19^2=361$	$65^2=4225$
$10^2=100$	$20^2=400$	$70^2=4900$

8.3.1.C Karekök Alma İşlemi :

Bir kenar uzunluğu verilen karenin alanını bulma işlemi **kare alma** işlemi, alanı verilen karenin bir kenar uzunluğunu bulma işlemine ise **karekök alma** işlemi denir.

$a\geq 0$ ve $a\in R$ olmak üzere ; $\sqrt{a}$ ifadesine kareköklü ifade denir.
Karekök "$\sqrt{\ }$" sembolü ile gösterilir.

$\sqrt{a}=b$ ifadesi "a'nın karekökü b'dir." veya "karekök a eşittir,b'ye" şeklinde okunur.

Burada a karekökü alınan sayı, b ise karekökün değeridir.

$\sqrt{a}=b$ ifadesinin anlamı ise ; alanının ölçüsü a cm^2 olan bir karenin, bir kenarının uzunluğunun ölçüsünün b cm olduğunu ifade eder.

Kareköklü Sayılarla İlgili Notlar :

1) Karesi verilen bir sayının kendisi, aşağıdaki şekillerde bulunabilir.

$x^2=9$ eşitliği "*hangi sayıların karesi 9'dur?*" anlamına gelir.

Buna göre a sayısının hangi sayıların karesi olduğu , aşağıdaki gibi bulunur.

$x^2 = 9$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ (Her iki tarafta karekök içine alınır.)

$\sqrt{x.x} = \sqrt{9}$ (Çarpım durumunda bulunan her aynı iki sayı) karekök dışına 1 tane olarak çıkar.

$x = +\sqrt{9}$ (pozitif karekök)

$= -\sqrt{9}$ (negatif karekök)

2) Bir sayının karekökü negatife eşit olamaz.Çünkü kareköklü işlemler,alanının ölçüsü verilmiş bir karenin bir kenar uzunluğunun ölçü hesabında kullanılır.Yani uzunluk ölçüleri negatif olarak ifade edilmezler.

Alanının ölçüsü 36 cm^2 olan bir karenin bir kenar uzunluğunun ölçüsü 6 cm'dir.Uzunluk ölçüsü -6 cm diye ifade edilemez.

$\sqrt{36}=6$

3) Karekök içindeki aynı çarpanlardan iki tanesi,karekök dışına bir tane olarak çıkartılır.

$\sqrt{36}=\sqrt{6.6}=6$

$\sqrt{100}=\sqrt{10.10}=10$

$\sqrt{256}=\sqrt{16.16}=16$

$\sqrt{361}=\sqrt{19.19}=19$

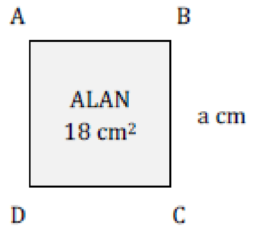
8.3.1.D Alanının Ölçüsü Tam Kare Olmayan Karenin Bir Kenar Uzunluğu Ölçü Hesabı :

Alanının ölçüsü tam kare olarak verilmeyen karelerin,bir kenar uzunluğunun ölçüsünün değeri kendine en yakın iki tam kare sayının karekökü arasındadır.

Örnek:

Alanının ölçüsü 18 cm^2 olarak verilen bir karenin bir kenar uzunluğunu hesaplayalım.

Çözüm:



$A(ABCD) = a.a$

$18 = a.a$ (Her iki tarafta karekök içine alınır)

$\sqrt{18} = \sqrt{a.a}$

$\sqrt{18} = a$

$\sqrt{18}$ sayısının hangi iki tam sayı arasında olduğunu bulalım.

18 sayısından küçük ve büyük olan en yakın tam kare sayılar belirlenir ve bu üç sayı karekök içinde olacak şekilde küçükten büyüğe doğru sıralanır.

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{18} < 5$$

Yani karenin bir kenar uzunluğu olan $\sqrt{18}$, 4 ile 5 arasında 4 küsür bir sayıya eşittir.

Karekök içi büyüdükçe,karekökün değeri büyür, karekök içi küçüldükçe karekökün değeri küçülür.

8.3.1.E Tam Kare Olmayan Sayıların Kareköklerinin Değerini Sayı Doğrusunda Gösterme:

a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere x , a ile b arasındaki <u>tam kare olmayan</u> bir sayıdır.

Örnek:

$\sqrt{30}$ sayısı sayı doğrusu üzerindeki hangi ardışık iki tam sayı arasındadır?

Çözüm:

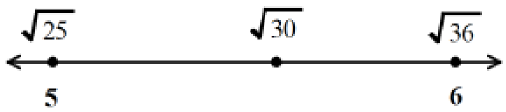
$\sqrt{30}$ sayısının hangi iki tam sayı arasında olduğunu bulalım.

30 sayısından küçük ve büyük olan en yakın tam kare sayılar belirlenir ve bu üç sayı karekök içinde olacak şekilde küçükten büyüğe doğru sıralanır.

$$\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$$

$$5 < \sqrt{30} < 6$$

Yani $\sqrt{30}$, 5 ile 6 arasında 5 küsür bir sayıya eşittir.



Örnek:

$-\sqrt{15}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini gösteriniz.

Çözüm:

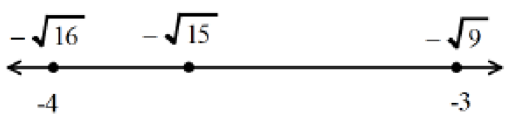
$-\sqrt{15}$ sayısının hangi iki tam sayı arasında olduğunu bulalım.

-15 sayısından küçük ve büyük olan en yakın tam kare sayılar belirlenir ve bu üç sayı karekök içinde olacak şekilde küçükten büyüğe doğru sıralanır.

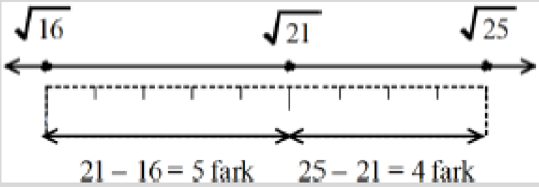
$$-\sqrt{16} < -\sqrt{15} < -\sqrt{9}$$

$$-4 < -\sqrt{15} < -3$$

Yani $-\sqrt{15}$, -3 ile -4 arasında -3 küsür bir sayıya eşittir.



a ve b ardışık tam sayıları arasında bulunan tam kare olmayan bir sayının hangi tam sayıya yakın olduğunu bulmak için tam kare olmayan sayı ile bu sayıya en yakın olan tam kare sayılar arasındaki uzaklığa bakılır.



$\sqrt{21}$ sayısı , $\sqrt{16}$ 'ya göre $\sqrt{25}$ 'e daha yakındır.

8.3.2 KAREKÖKLÜ SAYILARLA İLGİLİ TEMEL ÖZELLİKLER

8.3.2.A Karekök İçindeki Bir Sayıyı $a\sqrt{b}$ Şeklinde Yazma

1.YOL:
Karekök içerisindeki sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazabilmek için , sayı öncelikle asal çarpanlarına ayrılır.Karekök içerisindeki asal çarpanlardan aynı 2 tanesi 1 tane ve karekökle çarpım durumunda olacak şeklinde karekökün katsayısı olarak çıkarılır.Karekök dışına çıkamayan asal çarpanlar karekök içerisinde kalır.

Karekök dışına çıkan asal çarpanlar kendi arasında,karekök içinde kalan asal çarpanlar kendi arasında çarpılıp $a\sqrt{b}$ ifadesi oluşturur.

Örnek:

$\sqrt{160}$ ifadesini $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

Çözüm: (1.yol)

160 sayısı asal çarpanlarına ayrılır.

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Karekök içindeki aynı iki çarpan dışarı 1 çarpan şeklinde çıkarılır.

$$\sqrt{160} = \sqrt{\underline{2.2}.\underline{2.2}.2.5}$$
$$= 2.2.\sqrt{2.5}$$
$$= 4.\sqrt{10}$$

2.YOL:
Karekök içerisindeki sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazabilmek için , sayı öncelikle birisi tam kare olacak şekilde iki sayının çarpımı şeklinde yazılır.Daha sonra tam kare olan çarpan karekök dışına, karekökle çarpım şeklinde olacak şekilde karekökün katsayısı olarak çıkarılır.Karekök içindeki diğer çarpan kökün içinde kalır.

2.yol :

$$\sqrt{160} = \sqrt{16.10}$$
$$= 4.\sqrt{10}$$

8.3.2.B $a\sqrt{b}$ Şeklindeki Bir Sayının Katsayısını Karekök İçine Alma

$a\sqrt{b}$ şeklinde bir sayının katsayısını karekök içine almak için;katsayının karesini karekök içindeki sayı ile çarpar ve karekök içine yazarız.

Diğer bir deyişle katsayı karekök içine 2 tane olarak girer.Karekök içindeki sayı ile çarpım durumunda bulunur.

Örnek:

$5\sqrt{2}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

1.yol:

Karekök dışındaki katsayı,karekök içerisine iki tane olarak girdirilir.

$$5\sqrt{2} = \sqrt{\underbrace{5.5}.2}$$
$$= \sqrt{50}$$

2.yol:

Karekök dışındaki katsayı,karekök içerisine karesi alınarak girdirilir.

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2.2}$$
$$= \sqrt{25.2}$$
$$= \sqrt{50}$$

8.3.3 KAREKÖKLÜ SAYILARDA SIRALAMA İŞLEMİ

Kareköklü sayılarda sıralama işlemi yaparken karşılaştırılan bütün sayılar karekök içine alınır ve bu şekilde sıralama işlemi yapılır.

a) Pozitif kareköklü sayılar arasında karşılaştırma yaparken karekök içi büyük olan sayı büyüktür yada karekök içi küçük olan sayı daha küçüktür şeklinde sıralama yapılır.

$$3\sqrt{3} \;\; ..... \;\; 2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{3.3.3} \;\; ..... \;\; \sqrt{2.2.5}$$
$$\sqrt{27} \;\; > \;\; \sqrt{20}$$

b) Negatif kareköklü sayılar arasındaki karşılaştırmada ise karekök içi küçük olan sayı büyüktür yada karekök içi büyük olan sayı küçüktür şeklinde sıralama yapılır.

$$-2\sqrt{3} \;\; ..... \;\; -2\sqrt{5}$$
$$-\sqrt{2.2.3} \;\; ..... \;\; -\sqrt{2.2.5}$$
$$-\sqrt{12} \;\; > \;\; -\sqrt{20}$$

c) Pozitif kareköklü sayılar,negatif kareköklü sayılara göre daha büyüktür.Yani sadece işarete bakılarak sıralama işlemi yapılır.

$3\sqrt{6} \;>\; -2\sqrt{16}$ (sadece işarete bakmak yeterlidir.)

8.3.4 KAREKÖKLÜ SAYILARLA 4 İŞLEM

8.3.4.A Kareköklü Sayılarla Çarpma İşlemi

a) Kareköklü sayılar birbiri ile çarpılırken , sayılar tek karekök içinde çarpım durumunda yazılır ve işleme bu şekilde devam edilir.

$$\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} = \sqrt{a.b}$$

Örnek:

$$\sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{2\,.\,3} = \sqrt{6}$$
$$\sqrt{4} \,.\, \sqrt{4} = \sqrt{4\,.\,4} = \sqrt{16}$$
$$\sqrt{6} \,.\, \sqrt{8} = \sqrt{6\,.\,8} = \sqrt{48}$$
$$\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{2\,.\,2\,.\,2\,.\,2\,.} = \sqrt{16}$$

b) Katsayılı kareköklü sayılar birbiri ile çarpılırken; karekök dışındaki sayılar kendi aralarında , karekök içindeki sayılar kendi aralarında çarpılır.Karekök içinde tam kare çarpan varsa dışarı alınır.

$$a\sqrt{b}\ .\ c\sqrt{d}=a.c\sqrt{b.d}$$

Örnek:

$$2\sqrt{2}\ .\ 4\sqrt{3}=2.4\sqrt{2\ .\ 3}=8\sqrt{6}$$
$$2\sqrt{12}\ .\ 3\sqrt{3}=2.3.\sqrt{12\ .\ 3}=6\sqrt{36}$$
$$2\sqrt{3}\ .\ \sqrt{3}=2\sqrt{3\ .\ 3}=2\sqrt{9}$$

c) Kareköklü sayının kendisi ile çarpımı tam sayıdır.

$$\sqrt{a}.\sqrt{a}=\sqrt{a.a}=a$$

Örnek:

$$\sqrt{2}\ .\ \sqrt{2}=\sqrt{2.2}=2$$
$$\sqrt{5}\ .\ \sqrt{5}=\sqrt{5.5}=5$$

Kareköklü Sayılarla Çarpma İşlemi ile İlgili Notlar:

1) Ortak karekök içinde çarpım durumunda bulunan sayılar, ayrı ayrı kareköklerin çarpımı biçiminde gösterilebilir.

$$\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\ \sqrt{b}$$

Örnek:

$$\sqrt{6}=\sqrt{2\ .\ 3}=\sqrt{2}\ .\ \sqrt{3}$$

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\ .\ 3}=\sqrt{4}\ .\ \sqrt{3}=2.\ \sqrt{3}$$

2) Paydasında kareköklü sayı bulunan rasyonel sayıların paydasındaki sayıyı doğal sayı yapmak için genişletme işlemi uygulanır.

$$\underset{(\sqrt{a})}{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{1.\sqrt{a}}{\sqrt{a}.\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

Örnek:

$$\underset{(\sqrt{2})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8.3.4.B Kareköklü Sayılarla Bölme İşlemi

a) Kareköklü bir sayıyı, kareköklü bir sayıya bölerken; karekök içleri ortak karekök içine alınır ve işleme bu şekilde devam edilir.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Örnek:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$$

Örnek:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{24}{8}}=\sqrt{3}$$

Derleyen:YUSUF KPL

b) Katsayılı kareköklü sayılar birbirine bölünürken; karekök dışındaki sayılar kendi aralarında , karekök içindeki sayılar ise ortak karekök içerisinde birbirine bölünürler.

$$\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}}=\frac{a}{c}\cdot\sqrt{\frac{b}{d}}$$

Örnek:

$$\frac{8\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{8}{2}\cdot\sqrt{\frac{6}{2}}=4\cdot\sqrt{3}$$

Örnek:

$$\frac{\sqrt{72}}{3\sqrt{8}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{72}{8}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9}=\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{3}{3}=1$$

c) Karekök içi pay ve paydadan oluşan sayılar , ayrı ayrı karekökler halinde yazılabilir.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Örnek:

$$\sqrt{\frac{81}{49}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{49}}=\frac{9}{7}$$

8.3.4.C Kareköklü Sayılarla Toplama ve Çıkarma İşlemi

a) <u>Karekök içleri aynı olan</u> sayıların katsayıları arasında toplama yada çıkarma işlemi yapılabilir.

Örnek:

$$2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+3+5)\cdot\sqrt{3}$$
$$=10\cdot\sqrt{3}$$

Örnek:

$$5\sqrt{5}+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(5+2-3)\cdot\sqrt{5}$$
$$=4\cdot\sqrt{5}$$

NOT: Önünde kat sayısı olmayan sayıların katsayısı 1 kabul edilir.Çünkü bir sayının önündeki katsayısı tane sayısını ifade eder.

$$\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=1.\sqrt{5}+1\sqrt{5}+1\sqrt{5}$$
$$=(1+1+1).\sqrt{5}$$
$$=3.\sqrt{5}$$

b) <u>Karekök içleri aynı olmayan fakat aynı hale getirilebilen</u> kareköklü ifadelerin katsayıları arasında toplama ve çıkarma işlemi yapılabilir.

Örnek:

$$\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{4.2}+\sqrt{16.2}$$
$$=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}$$
$$=(2+4)\cdot\sqrt{2}$$
$$=6\cdot\sqrt{2}$$

DİKKAT:
Sadece karekök içi aynı olan sayıların katsayıları toplana - bilir yada çıkartılabilir.

c) Karekök içi aynı olmayan fakat karekök içi tam kare olan sayılar karekök dışına çıkartılarak işlem yapılabilir.

Örnek:

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4$$
$$=7$$

d) Karekök içi aynı olmayan yada aynı hale getirilemeyen kareköklü sayılar arasında toplama veya çıkartma işlemi yapılamaz.İşlem yapılmadan aynı biçimde kalır.

Örnek:

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\rightarrow$ Karekök içleri aynı olmadığı için toplama işlemi yapılamaz.

Örnek:

$2+\sqrt{3}\rightarrow$ Bir tamsayı ile kareköklü bir sayı toplanamaz.

DİKKAT !!!

Aşağıda verilen bilgiler karşımıza çok çıkan ve bizleri yanıltmayı amaçlayan bilgilerdir.O yüzden çok dikkat ediniz.

$a\neq 0, b\neq 0$ olmak üzere ;

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$$
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$$

8.3.5 ONDALIK SAYILARIN KAREKÖKÜ

Karekök içinde ondalık sayı var ise öncelikle ondalık sayı pay ve paydadan oluşacak şekilde yazılır,sonra ise kareköklü sayılarla bölme işlemi gibi işleme devam edilir.

Örnek:

$$\sqrt{0{,}09}=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}$$

Örnek:

$$\sqrt{0{,}0121}=\sqrt{\frac{121}{10000}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{10000}}=\frac{11}{100}$$

UNUTMA !!!
Ondalık sayıları pay ve payda haline getirmeden karekök dışına çıkartamazsın.

8.3.6 Gerçek Sayılar

8.3.6.A Rasyonel Sayılar

$a, b \in Z$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılan yada yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir.Rasyonel sayılar kümesi Q harfi ile isimlendirilir.

Örnek:

$\frac{4}{5}$, 5 , 1,2 , $0,\overline{3}$, $\sqrt{4}$, $3\frac{1}{2}$, ... gibi $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir.

NOT:

Rakam:
$A = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$

gibi sayıları oluşturmaya yarayan matematiğimizin harflerine rakam denir.

Sayma Sayıları:
$S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , ... \}$

gibi sayılara sayma sayıları denir.

Doğal Sayılar:
$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ... \}$

gibi sayılara doğal sayılar denir.

Tamsayılar:
$Z = \{ ... -3, -2, -1, 0 , +1 , +2 , +3 , ... \}$

gibi sayılara tam sayılar denir.

Her tam sayı aynı zamanda rasyonel bir sayıdır.Her tam sayının paydasında gizli bir 1 vardır.Yani her tam sayı $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilir.

Örnek:

$+4 = +\frac{4}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$

NOT:

Ondalık sayılar rasyonel sayıdır.Çünkü ondalık sayılar $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.

Örnek:

$+0,2 = +\frac{2}{10}$, $-1,3 = -\frac{13}{10}$, $1,21 = \frac{121}{100}$

NOT:

Tam sayılı kesirler ,sadece pay ve paydadan oluşan bileşik kesir halinde yazılabildiğinden,yani $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabildiğinden rasyonel sayılardır.

Örnek:

$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Örnek:

$-1\frac{3}{10} = -\frac{13}{10}$

NOT:

Karekök dışına doğal sayı olarak çıkabilen tam kare sayılar rasyonel sayılardır.Çünkü karekök dışında $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.

Örnek:

$\sqrt{16} = \sqrt{4 . 4} = 4 = \frac{4}{1}$

Örnek:

$\sqrt{169} = \sqrt{13 . 13} = 13 = \frac{13}{1}$

NOT:

Bir ondalık sayının kesir kısmında belirli bir basamaktan sonra aynı rakam veya rakam grupları sürekli olarak tekrar ediyorsa,bu tür sayılara <u>devirli ondalık sayı</u> denir.

Devirli ondalık sayılar $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabildiğinden rasyonel sayılardır.

Devirli ondalık sayıları kesir olarak ifade etmek için aşağıdaki formülü kullanırız.

$$a,b\overline{c} = \frac{\overbrace{\left(\text{Sayının tamamı} - \text{sayının devretmeyen kısmı}\right)}^{\text{Sayının virgülü kapatılarak}}}{\left(\begin{array}{l}\text{Sayının kesir kısmına bakılarak;}\\ \text{devreden basamak sayısı kadar 9,}\\ \text{devretmeyen basamak sayısı kadar 0}\\ \text{yazılır.}\end{array}\right)}$$

$$= \frac{abc - ab}{90}$$

Örnek:

$$1,2\overline{5} = \frac{125-12}{90}$$
$$= \frac{113}{90}$$

Örnek:

$$3,\overline{44} = \frac{344-3}{99}$$
$$= \frac{341}{99}$$

Örnek:

$$2,2\overline{54} = \frac{2254-22}{990}$$
$$= \frac{2232}{990}$$

8.3.6.B İrrasyonel Sayılar

$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara yani rasyonel olmayan sayılara <u>irrasyonel sayılar</u> denir. İrrasyonel sayılar kümesi İ harfi ile isimlendirilir.

Örnek:

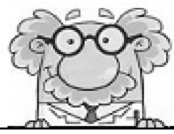
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ gibi karekök dışına çıkamayan sayılar irrasyonel sayılardır.

Örnek:

3,586741235899854123 ... gibi düzenli devretmeyen sayılar irrasyonel sayıdır.

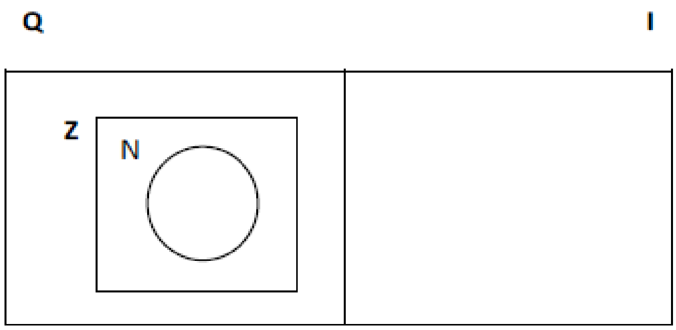
Örnek:

Bir çemberin çapına bölümünü ifade eden sabit sayı olan π (Pi) sayısı , $\Pi = 3,141592653589 \ldots$ şeklindeki değeri ile düzenli devretmeyen bir sayıdır.Yani π irrasyonel bir sayıdır.



Rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların birleşimi olan kümeye gerçek (reel) sayılar kümesi denir.

Yani rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıların hepsi birer gerçek sayıdır.Reel sayılar kümesi R ile gösterilir.



Derleyen:YUSUF KPL

8.4.1 OLASILIK NEDİR?

8.4.1.A OLASILIK TEMEL KAVRAMLAR

Olasılık ; gerçekleşmesi olası yani kesin olarak emin olmadığımız durumların incelenmesi ile ilgilenir.

Şans değil, bilimsel temeli olan bir tahmin vardır. Geçmişe değil geleceğe dair tahmini değerler verir.

Günümüzde olasılık hesapları büyük önem taşır.Örneğin meteoroloji tahminlerinde,ticarette, tarımda,sağlıkta,eğitimde benzer pek çok durumda olasılık hesapları yapılır.

Olasılık;bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel değeridir.

Deney:

Olayların sonuçlarını belirlemek için dikkatle yapılan denemelere deney denir.Deneylerin sonucu kesin olarak bilinmez.

Örneğin;

Madeni bir paranın yazı-tura için havaya atılması

Zarın havaya atılması

Torbadan top çekilmesi

Sınıftan başkanlık için rastgele bir öğrencinin seçilmesi

Çıktı:

Bir deneyin sonucunda mümkün olabilecek tüm sonuçların her birine çıktı denir.

Örneğin;

Madeni bir paranın havaya atılması deneyinde paranın yazı gelmesi ve paranın tura gelmesi bu deneyin çıktılarıdır.

Zarın havaya atılması deneyinde zarın 1 gelmesi, zarın 2 gelmesi, zarın 3 gelmesi, zarın 4 gelmesi, zarın 5 gelmesi ve zarın 6 gelmesi bu deneyin çıktılarıdır.

Bir torbadan top çekilmesi deneyinde,torbadan çekilen her top birer çıktıdır.

Örnek Uzay (Olası Durumlar):

Bir deneyin mümkün olan çıktılarının tamamına örnek uzay denir.

Örneğin;

Madeni bir paranın havaya atılması deneyinde;

Örnek uzay (Olası durumlar): T , Y
Olası durum sayısı: 2

Zarın havaya atılması deneyinde;

Örnek uzay (Olası durumlar): 1,2,3,4,5,6
Olası durum sayısı: 6

İçinde 2 kırmızı,3 sarı ve 2 mavi top bulunan torbadan rastgele bir top çekilmesi deneyinde;

Örnek uzay (Olası durumlar): K_1,K_2, S_1,S_2, S_3,M_1,M_2,
Olası durum sayısı: 7

Olay (İstenilen Durumlar):

Bir örneklem uzayın belirli şartlarını sağlayan çıktılarına olay denir.

Örneğin;

Bir zar atılması deneyinde bazı olaylar şu şekildedir;

- Tek sayı gelmesi olayı ; 1, 3, 5

- Çift sayı gelmesi olayı ; 2, 4, 6

- 3'ten büyük gelmesi olayı ; 4, 5, 6

- Asal sayı gelmesi olayı ; 2, 3, 5 - 3'ün katı gelmesi olayı ; 3, 6

- Aynı anda havaya atılan İki madeni paranın ikisininπ de aynı gelmesi olayı; (Y,Y) , (T,T)

- Aynı anda havaya atılan iki zarın üst yüzüne gelenπ sayıları toplamının 8 olması olayı; (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)'dir.

8.4.1.B BASİT OLAYLARIN OLMA OLASILIĞI:

$$\text{Bir Olayın Olma Olasılığı} = \frac{\text{Olayın Çıktı Sayısı}}{\text{Tüm Çıktıların Sayısı}}$$

Bir olayın olasılık değeri kesir,ondalık sayı veya yüzde şeklinde ifade edilebilir.

Örnek:

Bir zar atma deneyinde üst yüze asal sayı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Örnek Uzay (Olası Durumlar): 1,2,3,4,5,6
Olası çıktı sayısı: 6

Olay (İstenen durumlar):2,3,5
İstenen çıktı sayısı: 3

$$\text{Bir Olayın Olma Olasılığı} = \frac{\text{İstenen Çıktı Sayısı}}{\text{Tüm Çıktıların Sayısı}}$$

$$= \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

BASİT OLASILIK İLE İLGİLİ NOTLAR:

1) Bir deneyde çıktı sayısı fazla olan olayın gerçekleşme olasılığı daha fazladır.

Örnek :

3 kırmızı , 4 beyaz ve 5 mavi topun olduğu bir torbadan;

a) Kırmızı top çekme olasılığı kaçtır?

b) Beyaz top çekme olasılığı kaçtır?

c) Mavi top çekme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

a) $\text{Kırmızı top çekme olasılığı} = \frac{\text{Kırmızı Top Sayısı}}{\text{Toplam Top Sayısı}}$

$$= \frac{3}{12}$$

b) $\text{Beyaz top çekme olasılığı} = \frac{\text{Beyaz Top Sayısı}}{\text{Toplam Top Sayısı}}$

$$= \frac{4}{12}$$

c)

$\text{Mavi top çekme olasılığı} = \frac{\text{Mavi Top Sayısı}}{\text{Toplam Top Sayısı}}$

$$= \frac{5}{12}$$

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü üzere çıktı sayısı fazla olan olayın gerçekleşme olasılığı daha fazladır.

2) Bir olayın olma olasılığı 0'dan küçük , 1'den büyük olamaz.

$$0 \leq \text{Bir Olayın Olma Olasılığı} \leq 1$$

Örnek:

Bir olayın olasılığı $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{11}$ ve $\frac{7}{15}$ gibi sayılar olabilir.Çünkü bu sayılar 0 ile 1 sayıları arasındadır.

Derleyen:YUSUF KPL

3) Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığı toplamı 1'e eşittir.

Bir Olayın Olma Olasılığı + Aynı Olayın Olmama Olasılığı = 1

Örnek:

Bir sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız olma olasılığı $\frac{3}{5}$ ise kız olmama olasılığı kaçtır?

Çözüm:

Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığı toplamı 1'dir.

$$\text{Kız olmama olasılığı} = 1 - \text{Kız olma olasılığı}$$
$$= 1 - \frac{3}{5}$$
$$= \frac{2}{5}$$

4) "ve" ve **"veya"** bağlacının bulunduğu problemlerde olasılık hesabı:

Olasılık sorularında istenen durumlarda kullanılan;

a) " ve " bağlacı

$\Rightarrow$ Söylenen iki duruma da uyması ,bazı durumlarda ise söylenen iki duruma da uyan ortak elemanların ifadesidir.

Örnek:

* Tavla zarının atılması deneyinde üst yüze çift ve asal sayı gelmesi demek;

$\Rightarrow$ Hem çift hem de asal olması anlamındadır.Yani istenen sayı hem çift hem de asal olan 2'dir.

* Erkek ve gözlüklü olması demek $\Rightarrow$ Hem erkek hem de gözlüklü olması yani gözlüklü erkek isteniyor anlamındadır.

b) " veya " bağlacı

$\Rightarrow$ Söylenen iki duruma da ayrı ayrı uyması anlamına gelir.Böyle durumlarda iki durumun olasılık değerleri toplanır.Eğer her iki duruma da uyan durumlar varsa bu durumun olasılık değeri toplamdan çıkartılır.

Örnek:

* Tek veya çift olması $\Rightarrow$ Tek sayı da olabilir,çift sayı da olabilir anlamındadır.

* Mavi veya sarı olması $\Rightarrow$ Mavi de olabilir,sarı da olabilir anlamındadır.

NOT:

*Söylenen iki duruma da uyan ortak durum yoksa;

O(A veya B) = O(A)+O(B)

*Söylenen iki duruma da uyan ortak durum varsa;

O(A veya B) = O(A)+O(B) - O(A ve B)

8.4.1.C KESİN OLAY VE İMKANSIZ OLAY :

Kesin Olay:

Bir deneyin çıktılarının tamamımı içeren olaya **kesin olay** denir.

Kesin olayın olma olasılığı 1'dir.

Örneğin;

Madeni bir paranın sert düz bir zemine atılması olayında yazı veya tura gelmesi <u>kesin olaydır</u>.

İmkansız Olay:

Bir deneyin çıktılarından olmayan bir olaya **imkansız olay** denir.

İmkansız olayın olma olasılığı 0'dır.

Örneğin;

Madeni bir paranın atılması olayında üst yüzüne 5 gelmesi imkansız olaydır.

8.4.1.D DAHA FAZLA OLASILIK, EŞ OLASILIK VE DAHA AZ OLASILIK:

Bazı durumlarda olasılık hesabı yapılmadan "daha fazla" , "eşit" veya "daha az" olasılıklı durumlar belirlenebilir.

EŞ OLASILIKLI OLMA:

Bir olasılık deneyinde her bir çıktının gerçekleşme ihtimali aynı ise bu olaya **eş olasılıklı olay** denir.

Tüm durumların sayısı n olan bir deneyde her bir çıktının gerçekleşebilme olasılığı $\frac{1}{n}$'dir.

Örnek:

20 öğretmen , 150 kız öğrenci ve 130 erkek öğrencinin olduğu bir okuldan rastgele seçilecek biri için ;

i) Öğretmen olma olasılığı en azdır.Çünkü öğretmen sayısı öğrenci sayısından daha azdır.

ii)Kız öğrenci olma olasılığı en fazladır.Çünkü en fazla sayı kız öğrencilere aittir.

iii) Öğrenci olma olasılığı daha fazladır.Çünkü öğrenci sayısı,öğretmen sayısından fazladır.

NOT:

Büyüklükleri,biçimleri ve fiziksel özellikleri aynı olan fakat;renkleri,desenleri,üzerindeki yazıları ve numaraları farklı olabilen nesnelere **özdeş nesneler** denir.

8.5.1 CEBİRSEL İFADELER

8.5.1.A CEBİRSEL İFADELER

İçinde en az bir bilinmeyen bulunan ve işlem içeren ifadelere cebirsel ifade denir.

Örnek:

6.a , 4.d+1 , x+2y, ... vb. ifadeler en az bir bilinmeyen ve işlem içerdiklerinden dolayı cebirsel ifadedir.

(6+3) , (8-5) , (4.2) , (8:2) , ... vb. ifadeler bilinmeyen içermediğinden dolayı cebirsel ifade değildirler.

Bilinmeyen sayılar a,b,c, ... gibi harflerle veya Δ,□,♦,⋆, ... gibi sembollerle gösterilebilir.

8.5.1.B CEBİRSEL İFADELER TEMEL KAVRAMLAR

1) Terim:

Bir cebirsel ifadede toplama (+) veya çıkarma işlemleri (-) ile birbirinden ayrılan her bir bölüme terim denir.

Örnek:

3x-2y+5 cebirsel ifadesinin +3x , -2y ve +5 olmak üzere 3 tane terimi vardır.

5-a cebirsel ifadesinin +5 ve -a olmak üzere 2 tane terimi vardır.

xy-2x+4y-3 cebirsel ifadesinin +xy , -2x , +4y ve -3 olmak üzere 4 tane terimi vardır.

3) Değişken:

Bir cebirsel ifadede kullanılan a,b,c, ... gibi harflere veya □,Δ, ... gibi sembollere <u>bilinmeyen (değişken)</u> denir.

Örnek:

3x+7 cebirsel ifadesinde x değişken olmak üzere
1 tane değişken vardır.

$c^2+2cd+d^2$ cebirsel ifadesinde c ve d değişken olmak üzere
2 tane değişken vardır.

x^2+2x+1 cebirsel ifadesinde x değişken olmak üzere
1 tane değişken vardır.

4) Sabit Terim:

Değişken içermeyen terimlere sabit terim denir.Her cebirsel ifadede <u>sabit terim</u> olmayabilir.

Örnek:

4x+5 cebirsel ifadesinde +5 sabit terimdir.

2x-5y-8 cebirsel ifadesinde -8 sabit terimdir.

a-4b cebirsel ifadesinde sabit terim yoktur.

$3e-e^2$ cebirsel ifadesinde sabit terim yoktur.

5) Benzer Terim:

Bir cebirsel ifadede hem harfleri (değişkeni) hem de harflerinin kuvveti aynı terimlere <u>benzer terimler</u> denir.

Örnek:

-3x ile +4x terimlerinin bilinmeyeni olan x'ler aynı olduğu için -3x ile +4x terimleri <u>benzer terimlerdir.</u>

$+2a^2$ ile -7a terimlerinin bilinmeyenleri aynı fakat bilinmeyenlerinin kuvvetleri aynı olmadığından $+2a^2$ ile -7a terimleri <u>benzer terim değildir.</u>

Dikkat 1 !!!

a^2 ile $\frac{1}{a^2}$ terimleri benzer terim değildir.

Çünkü;

a^2 ile $\frac{1}{a^2}$ terimleri a^2 ile a^{-2} şeklinde yazıldığından ve aynı bilinmeyenlerinin kuvveti aynı olmadığından a^2 ile $\frac{1}{a^2}$ terimleri <u>benzer terim değildir.</u>

Dikkat 2 !!!

Sabit terimler kendi arasında benzer terimlerdir.

8.5.1.C CEBİRSEL İFADELERDE İŞLEMLER

1) Cebirsel İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemi:

Cebirsel ifadeler arası toplama veya çıkarma işlemi sadece benzer terimler arasında yapılır.

Cebirsel ifadeler arası toplama veya çıkarma işlemi yaparken benzer terimlerin katsayıları toplanır veya çıkartılır.Sonra bulunan katsayılar toplamı yada farkı değişkenin yanına katsayı olarak yazılır.Varsa sabit terimler de kendi arasında toplanır ya da çıkartılır.

h) 4x+2x-3x =(4+2-3).x
= 3.x

Parantezin olmadığı işlemlerde benzer terimlerin katsayıları arası toplama işlemi yapılır.

ı) 4x-1-3x+5 =(4-3).x+(-1+5)
= 1.x+4

Parantezin olmadığı işlemlerde benzer terimlerin katsayıları toplanıp , değişkene katsayı olarak yazılır.Sabit terimler de ayrı toplanıp cebirsel ifadeye sabit terim olarak yazılır.

2) Cebirsel İfadelerde Çarpma İşlemi:

Cebirsel ifadelerde çarpma işlemi yaparken aşağıdaki çarpma kurallarına dikkat edilmelidir.

1) İki bilinen sayı çarpılabilir.

Örnek:

2.3=6 , 4.2=8 , (-2).(+3)= -6

2) Bilinen bir sayı ile bilinmeyen bir sayı (değişken) çarpılmaz.

Örnek:

2.a=2.a , 3.b=3.b , $4.c^2=4.c^2$

3) Farklı harfli bilinmeyenler çarpılmaz.

Örnek:

a.b = a.b , x.a = x.a

4) Aynı harfli bilinmeyenlerin çarpımı üslü biçimde yazılır.

Örnek:

$a.a = a^2$, $b.b.b = b^3$, $c^2.c^5 = c^7$

5) Tek terimli bir cebirsel ifade ile iki terimli bir cebirsel ifadeyi çarparken , çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerinde dağılma özelliği kullanılır.

Örnek:

$$2.(a+2) = +2.a+2.2$$
$$= 2.a+4$$

Parantez dışındaki ifade parantez içindeki terimlerle tek tek çarpılır.

Örnek:

$$-3.(-b-2) = +3.b+3.2$$
$$= 3b +6$$

Dağılma işlemi yapılırken önce işaretlerin sonra da sayıların çarpılması gerektiği kuralına dikkat edilmelidir.

6) İki terimli bir cebirsel ifade ile iki terimli bir cebirsel ifadeyi çarparken , çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerinde dağılma özelliği kullanılır.

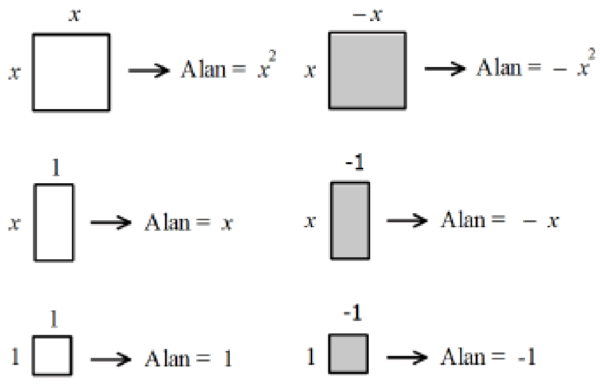
Örnek:

$$(x+y).(z+t) = x . (z+t) + y . (z+t)$$
$$= +x.z +x.t +y.z +y.t$$

İşlemin sonunda benzer terim olmadığı için işlemde toplama ve çıkarma işlemi yapılmaz.Cebirsel ifade bu şekilde kalır.

Cebirsel İfadelerde Çarpma İşleminin Modellemesi:

Çarpma işlemini modellerle gösterirken alan hesaplamaları kullanılır.



Cebirsel karolardan oluşturulan dikdörtgen şekillerin alan hesabı 2 şekilde hesaplanabilir.

1.yol:

Cebirsel karolardan oluşturulan dikdörtgenin alanını bulmak için oluşan dikdörtgenin kısa kenar uzunluk ölçüsü ile uzun kenar uzunluk ölçüsü çarpılır.

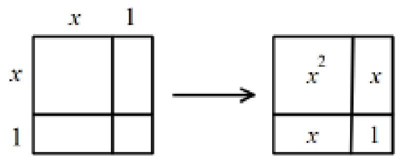
2.yol:

Şekli oluşturan cebir karolarının alan ölçüleri tek tek hesaplanır.Sonra hesaplanan alan ölçülerinin hepsi teker teker toplanarak şeklin alanı hesaplanır.

Örnekler:

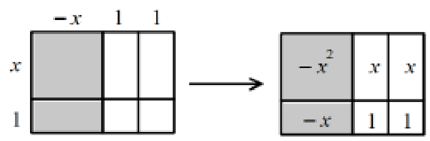
1) Aşağıda verilen cebir karoları ile verilen cebirsel işlemleri gösteriniz.

a)



$(x+1).(x+1) = x^2+x+x+1$

d)



$(x+1).(-x+2) = -x^2+x+2$

8.5.2 DENKLEMLER

1) EŞİTLİK:

Eşitlik denilince akla eşit kollu teraziler gelmelidir. Çünkü eşit kollu teraziler denge prensibine göre çalışır.Yani eşit kollu terazilerin dengede durabilmesi için sağ kefesindeki ağırlıklar ile sol kefesindeki ağırlıkların miktarı eşit olmalıdır.

Terazinin dengede olma durumuna eşitlik,dengede olmama durumuna eşitsizlik denir.

Eşit kollu terzide sağ ve sol kefesinde 4'er kg varken dengede olduğu bilindiğine göre aşağıda işlemler uygulandığındaki durumları inceleyelim.

1) Terzinin her iki kefesine de 2'şer kg eklendiğinde denge(eşitlik) bozulmaz.

4 = 4
4+2 = 4+2 (Eşitliğin her iki tarafına da 2 eklendiğinde)
6 = 6 (Denge bozulmaz.)

2) Terazinin her iki kefesinden de 2'şer kg çıkarıldığında denge(eşitlik) bozulmaz.

4 = 4
4 -2 = 4 -2 (Eşitliğin her iki tarafından da 2 çıkarılırsa)
6 = 6 (Denge bozulmaz.)

3) Terazinin her iki kefesinin de yarısı alınırsa (2'ye bölünürse) denge(eşitlik) bozulmaz.

4 = 4
4:2 = 4:2 (Eşitliğin her iki tarafı da 2'ye bölünürse)
2 = 2 (Denge bozulmaz.)

4) Terazinin her iki kefesi 2 katına çıkarılırsa (2 ile çarpılırsa) denge(eşitlik) bozulmaz.

4 = 4
4.2 = 4.2 (Eşitliğin her iki tarafı da 2 ile çarpılırsa)
8 = 8 (Denge bozulmaz.)

5) Terazinin her iki kefesindeki ağırlıklar karesi kadarına yükseltilirse (2. dereceden kuvveti alınırsa) denge(eşitlik) bozulmaz.

4 = 4
$4^2 = 4^2$ (Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa)
16 = 16 (Denge bozulmaz.)

6) Terazinin her iki kefesinde de ağırlıkların karekökü kadarı bırakılırsa (ağırlıkların karekökü alınırsa) denge(eşitlik) bozulmaz.

4 = 4
$\sqrt{4} = \sqrt{4}$ (Eşitliğin her iki tarafının karekökü alınırsa)
2 = 2 (Denge bozulmaz.)

Yukarıdaki işlemlerden de anlaşılmak üzere , eşitliğin her iki tarafına ;

1) Aynı sayıları ekleme
2) Aynı sayıları çıkarma
3) Aynı sayılarla çarpma
4) Aynı sayılarla bölme
5) Aynı dereceden kuvveti alma
6) Kareköklerini alma

işlemleri yapıldığında eşitlik (denge) bozulmaz.

Derleyen:YUSUF KPL

2) DENKLEM:

İçerisinde bilinmeyen bulunan ve bilinmeyenin bazı değerleri için doğru olan eşitliklere denklem denir.

Bilinmeyeninin kuvveti 1 ve bir bilinmeyenden oluşan denklemlere ise 1.dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Denklemi sağlayan bilinmeyen değerlerine denklemin denklemin kökü denir.

Denklemin köklerinin oluşturduğu kümeye çözüm kümesi denir.

Örnekler:

b-6 $\longrightarrow$ Denklem belirtmez.
(Eşitlik yok)

6+4 $\longrightarrow$ Denklem belirtmez.
(Bilinmeyen yok)

x+3=5 $\longrightarrow$ Denklem belirtir.
(Eşitlik ve bilinmeyen var.)

$\longrightarrow$ Bilinmeyeni olan x'in kuvveti 1 olduğundan 1.dereceden ve 1 farklı bilinmeyene sahip olduğundan 1 bilinmeyenlidir.

a-7=2+3a $\longrightarrow$ Denklem belirtir.
(Eşitlik ve bilinmeyen var.)

$\longrightarrow$ Bilinmeyeni olan a'nın kuvveti 1 olduğundan 1.dereceden ve 1 farklı bilinmeyene sahip olduğundan 1 bilinmeyenlidir.

$x^2+4x+4=0$ $\longrightarrow$ Denklem belirtir.
(Eşitlik ve bilinmeyen var.)

$\longrightarrow$ Bilinmeyeni olan x'in en büyük kuvveti 2 olduğundan 2.dereceden ve 1 farklı bilinmeyene sahip olduğundan 1 bilinmeyenlidir.

1.Dereceden 1 Bilinmeyenli Denklem Çözümünde Dikkat Edilecek Kurallar:

1.dereceden 1 bilinmeyenli denklem çözümlerini eşitlik kurallarını uygulayarak yaparız.

Denklem çözümlerini soru çeşitleri üzerinde inceleyelim.

ÇEŞİT 1:

Eşitliğin bir tarafında bilinmeyeni olan denklem çözümü:

Örnek:

3a+5=14 denkleminde a kaçtır?

1.yol:

1.adım: (Bilinmeyen terim yalnız bırakılır)
3a+5= 14
3a = 14-5 (+5 terimi sağ tarafa -5 olarak geçti)
3a = 9

2.adım: (Bilinmeyen sayı yalnız bırakılır)

3a = 9
$a = \frac{9}{3}$ (3 sağ tarafa bölüm olarak geçirilir)
a =3

2.yol:

1.adım: (Bilinmeyen terim yalnız bırakılır)

3a+5 = 14
3a+5-5 = 14-5 (Her iki tarafa da -5 eklenir)
3a = 9

2.adım: (Bilinmeyen sayı yalnız bırakılır)

3a = 9
$\frac{3a}{3} = \frac{9}{3}$ (Her iki tarafta 3'e bölünür)
a = 3

ÇEŞİT 2:

Eşitliğin her iki tarafında da bilinmeyeni olan denklem çözümü:

Örnek:

5a + 4 = a -12 denkleminde a kaçtır?

1.yol:

1.adım: (Bilinmeyen terimler eşitliğin bir tarafına, bilinen terimler ise eşitliğin diğer tarafına toplanır)

5a + 4 = a -12
5a - a = -12-4 (+4 terimi sağa, a terimi sola geçti)
4a = -16

2.adım:(Bilinmeyen sayı yalnız bırakılır)

4a = -16
$a = \frac{-16}{4}$ (4 sağ tarafa bölüm olarak geçirildi.)
a = -4

2.yol:

1.adım: (Bilinmeyenli terimler eşitliğin sadece bir tarafında ,bilinen terimler ise eşitliğin sadece diğer tarafında olacak şekilde eşitlik kuralları uygulanır.)

5a + 4 = a -12
5a **-a** + 4 = a **-a** -12 (Her iki tarafa **-a** terimi eklenir)
4a+4 = -12
4a+4 **-4** = -12 **-4** (Her iki tarafa **-4** terimi eklenir)
4a = -16

2.adım:(Bilinmeyen sayı yalnız bırakılır)

4a = -16
$a = \frac{-16}{4}$ (4 sağ tarafa bölüm olarak geçirildi)
a = -4

ÇEŞİT 3:

Parantez içeren denklem çözümü:

Örnek:

2(a +1)+3 = 3.(a -10) denkleminde a kaçtır?

1.yol:

1.adım: (Dağılma özelliği uygulanarak parantezler kaldırılır.)

2(a +1)+3 = 3(.a -10) (Dağılma özelliği kullanılır.)
2.a +2 +3 = 3a -30 (Benzer terimler toplanır)
2.a +5 = 3a -30

2.adım: (Bilinmeyen terimler eşitliğin bir tarafına, bilinen terimler ise eşitliğin diğer tarafına toplanır.)

2.a +5 = 3.a -30
+5+30 = 3a -2a (+2a terimi sağa, -30 terimi sola geçer)
+35 = a

2.yol:

1.adım: (Dağılma özelliği uygulanarak parantezler kaldırılır.)

2(a +1)+3 = 3(.a -10) (Dağılma özelliği kullanılır.)
2.a +2 +3 = 3a -30 (Benzer terimler toplanır)
2.a +5 = 3a -30

2.adım: (Bilinmeyenli terimler eşitliğin sadece bir tarafında ,bilinen terimler ise eşitliğin sadece diğer tarafında olacak şekilde eşitlik kuralları uygulanır.)

2.a +5 = 3a-30
2.a**-2a**+5=3a **-2a** -10 (Her iki tarafa **-2a** terimi eklenir)
+5 = a -30
+5**+30** = a -30**+30** (Her iki tarafa **+30** terimi eklenir)
+35 = a

Derleyen:YUSUF KPL

ÇEŞİT 4:

Eşitliğin her iki tarafında da bir terimi olan rasyonel denklem çözümü:

Örnek:

$\frac{3.a}{4}=\frac{1}{2}$ denkleminde a kaçtır?

1.yol:

1.adım: (İçler dışlar çarpımı (çapraz çarpım) yapılır.)

$\frac{3.a}{4} = \frac{1}{2}$ (İçler dışlar çarpımı yapılır.)

$3a.2 = 4.1$

$6a = 4$

2.adım: (Bilinmeyen sayı yalnız bırakılır.)

$6a = 4$ (6 sağ tarafa bölüm olarak geçirilir.)

$a = \frac{4}{6}$ (Pay ve payda 2 ile sadeleştirilir.)

$a = \frac{2}{3}$

2.yol:

1.adım: (Paydalar eşitlenir.)

$\frac{3.a}{4} = \frac{1}{\underset{(2)}{2}}$ (İçler dışlar çarpımı yapılır.)

$\frac{3.a}{4} = \frac{2}{4}$

Birbirine eşit kesirlerin paydaları eşitse , paylari da eşittir.Buna göre ;

$3a = 2$

2.adım: (Bilinmeyen sayı yalnız bırakılır.)

$3a = 2$

$a = \frac{2}{3}$ (3 sağ tarafa bölüm olarak geçirildi.)

$a = \frac{2}{3}$

ÇEŞİT 5:

Terimleri rasyonel denklem çözümü:

Örnek:

$\frac{a}{4}+\frac{a}{3}=\frac{1}{2}$ denkleminde a kaçtır?

1.yol:

1.adım:(Bilinmeyen terimlerin paydaları eşitlenir)

$\frac{a}{\underset{(3)}{4}}+\frac{a}{\underset{(4)}{3}}=\frac{1}{2}$ (Dağılma özelliği kullanılır.)

$\frac{3a}{12}+\frac{4a}{12}=\frac{1}{2}$

$\frac{7a}{12}=\frac{1}{2}$

2.adım: (İçler dışlar çarpımı yapılır.)

$\frac{7a}{12}=\frac{1}{2}$

$7a.2=12.1$

$14.a=12$ (14 sağ tarafa bölüm olarak geçirilir.)

$a=\frac{12}{14}$ (Pay ve payda 2 ile sadeleştirilir.)

$a=\frac{6}{7}$

2.yol:

1.adım: (Tüm terimlerin paydaları eşitlenir)

$\frac{a}{\underset{(3)}{4}}+\frac{a}{\underset{(4)}{3}}=\frac{1}{\underset{(6)}{2}}$ (Dağılma özelliği kullanılır.)

$\frac{3a}{12}+\frac{4a}{12}=\frac{6}{12}$

$\frac{7a}{12}=\frac{6}{12}$

2.adım: (Paydalar eşitse paylar da eşittir.)

$\frac{7a}{12}=\frac{6}{12}$

$7a=6$

$a=\frac{6}{7}$

Derleyen:YUSUF KPL

8.5.3 ÖZDEŞLİKLER

İçerisinde bir yada birden fazla bilinmeyen bulunan ve bilinmeyenlerin her gerçek sayı değeri için doğru olan eşitliklere özdeşlik denir.

Özdeşlikler içerdikleri değişkenlere verilecek tüm değerler için doğru iken. denklemler ise bazı gerçek sayı değerleri için doğrudur.

Örnek:

2.(x+1)=2x+2 eşitliğinin özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

x'e verilen her değer için eşitlik doğru olursa ,bu eşitliğe özdeşlik denir.

x'e birkaç değer verelim.

x=1 için,

2.(x+1) = 2x+2
2.(1+1) = 2.1+2
2. (2) = 2+2
4 = 4 (Doğru)

x=2 için,

2.(x+1) = 2x+2
2.(2+1) = 2.2+2
2. (3) = 4+2
6 = 6 (Doğru)

x=-3 için,

2.(x+1) = 2x+2
2.(-3+1) = 2.(-3)+2
2. (-2) = -6+2
-4 = -4 (Doğru)

x= -10 için,

2.(x+1) = 2x+2
2.(-10+1) = 2.(-10)+2
2. (-9) = -20+2
-18 = -18 (Doğru)

Bu şekilde verilen x'in diğer değerleri için de eşitlik doğru olduğundan olduğundan 2.(x+1) = 2x+2 eşitliğine özdeşliktir denir.

NOT:

Verilen eşitliklerde değişkenlere değer vermek yerine, eşitliğin her iki tarafındaki cebirsel ifadeleri en sade hallerinde yazıp eşit olup olmadıkları kontrol edilebilir.

Eşitliğin her iki yanındaki cebirsel ifadeler aynı ise özdeşliktir denir.

Örnek:

$x.(x+3)=x^2+3x$ eşitliğinin özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

$x.(x+3)=x^2+3x$ (sol tarafa dağılma özelliği uygulanırsa)
$x^2+3x=x^2+3x$ (sağ ve sol taraftaki cebirsel ifade aynı)

Eşitliğin her iki yanındaki cebirsel ifadeler aynı olduğundan $x.(x+3)=x^2+3x$ özdeşliktir.

NOT:

Eşitliğin özdeşlik olup olmadığını anlamanın diğer bir yolu da eşitlikteki tüm terimleri eşitliğin bir tarafına toplamaktır. Eğer toplama sonucu 0=0 eşitliği oluşuyorsa eşitlik bir özdeşliktir.

Örnek:

3.(a+3)=3a+6 eşitliğinin özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

3.(a+3) =3.a+6
3.a+9 = 3.a+6
3.a-3.a+9-6 = 0
3 = 0

Toplama sonucu eşitlik sağlanmadığından özdeşlik değildir.

Örnek:

2a+5=3a-5 eşitliğinin özdeşlik olup olmadığını inceleyelim.

2a+5=3a-5
+5+5=3a-2a
+10 = a

0=0 eşitliğini sağlamadığı için özdeşlik değildir.

Eşitlik sadece tek bir değer için doğru olduğu için eşitlik bir denklemdir.

Derleyen:YUSUF KPL

NOT:

Parantezli cebirsel ifade ile parantezli cebirsel ifadenin dağılma özelliği ile oluşturulan cebirsel ifadesinin eşitliği özdeşlik oluşturur.

8.5.3.A ÖNEMLİ ÖZDEŞLİKLER:

1) İKİ TERİMİN TOPLAMININ KARESİ ÖZDEŞLİĞİ

İki terimin toplamının karesi alınırken;

1) Birinci terimin karesi alınır.
2) Birinci terim ile ikinci terimin çarpımının iki katı alınır.
3) İkinci terimin karesi alınır.

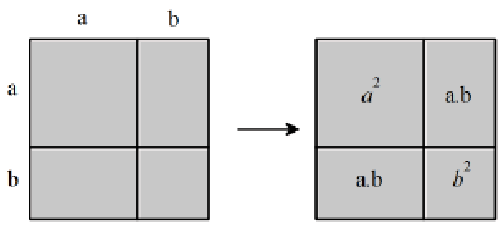
ve bu üç ifade toplanır.

$$(1.\text{terim}+2.\text{terim})^2=(1.\text{terim})^2+2.(1.\text{terim}).(2.\text{terim})+(2.\text{terim})^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2.a.b+b^2$$

İki Terimin Toplamının Karesi Özdeşliği Modeli:

Aşağıda verilen büyük karenin alanı , şekli oluşturan parçaların alanları toplamına eşittir.



Kenar uzunluğu a+b olan karenin alan hesabı	Şekli oluşturan parçaların alan hesabı
$(a+b)^2=(a+b).(a+b)$	$a^2+2.a.b+b^2$

$(x+\sqrt{5}\ )^2$ özdeşliğinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

Ezber yöntem ile eşiti bulunur.

$$(1.\text{terim}+2.\text{terim})^2=(1.\text{terim})^2+2.(1.\text{terim}).(2.\text{terim})+(2.\text{terim})^2$$

1.terim $\longrightarrow$ +x

2.terim $\longrightarrow$ $+\sqrt{5}$

$$(x+\sqrt{5}\ )^2 = x^2+2.x.\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$$
$$= x^2+2\sqrt{5}.x+5$$

Örnek:

$(x+\frac{1}{x})^2$ özdeşliğinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

Ezber yöntem ile eşiti bulunur.

$$(1.\text{terim}+2.\text{terim})^2=(1.\text{terim})^2+2.(1.\text{terim}).(2.\text{terim})+(2.\text{terim})^2$$

1.terim $\longrightarrow$ +x

2.terim $\longrightarrow$ $+\frac{1}{x}$

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2.x.\frac{1}{x}+(+\frac{1}{x})^2$$
$$=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

2) İKİ TERİMİN FARKININ KARESİ ÖZDEŞLİĞİ

İki terimin toplamının karesi alınırken;

1) Birinci terimin karesi alınır.
2) Birinci terim ile ikinci terimin çarpımının eksi iki katı alınır.
3) İkinci terimin karesi alınır.

ve bu üç ifade toplanır.

$$(1.\text{terim}+2.\text{terim})^2=(1.\text{terim})^2-2.(1.\text{terim}).(2.\text{terim})+(2.\text{terim})^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2.a.b+b^2$$

Ezber yöntem ile eşiti bulunur.

$(1.\text{terim}+2.\text{terim})^2=(1.\text{terim})^2-2.(1.\text{terim}).(2.\text{terim})+(2.\text{terim})^2$

1.terim $\longrightarrow$ +x

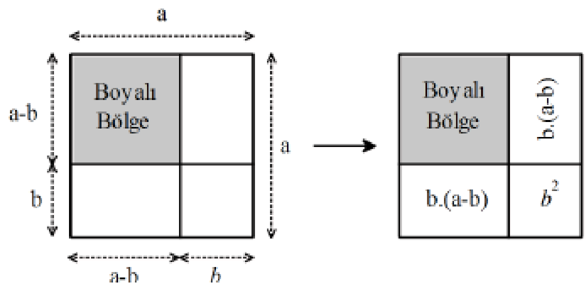
2.terim $\longrightarrow$ -5

$(x-5)^2 = x^2 -2.x.5 +(-5)^2$

$= x^2 -10x +25$

İki Terimin Farkının Karesi Özdeşliği Modeli:

Aşağıda verilen boyalı bölgenin alanı , şeklin tüm alanından boyalı olmayan bölgelerin alanının çıkarılması ile bulunur.



Boyalı alan = Şeklin tüm alanı - boyasız bölge alanı
Boyalı alan = a^2 - (b.(a-b) + b.(a-b) + b^2)
Boyalı alan = a^2 - (ab-b^2+ ab-b^2+b^2)
Boyalı alan = a^2 - (2ab-b^2)
Boyalı alan = a^2 - 2ab +b^2)

Örnek:

$(4x-3)^2$ özdeşliğinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

Ezber yöntem ile eşiti bulunur.

$(1.\text{terim}-2.\text{terim})^2=(1.\text{terim})^2-2.(1.\text{terim}).(2.\text{terim})+(2.\text{terim})^2$

1.terim $\longrightarrow$ +4x

2.terim $\longrightarrow$ -3

$(4x-3)^2 = (4x)^2 -2.4x.3 +(-3)^2$

$= 16x^2 -24x +9$

3) İKİ KARE FARKI ÖZDEŞLİĞİ

İki terimin kareleri farkı alınırken;

1) Karesi verilen terimlerin karekökleri alınır.
2) Bulunan kareköklerin farkları ile toplamlarının çarpımları yazılır.

Diğer bir ifadeyle karesi verilen sayıların tabanlarının toplamları ile farkları çarpım durumunda yazılır.

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \sqrt{a^2}\\ \downarrow\\ a}}{a^2} - \underset{\substack{\downarrow\\ \sqrt{b^2}\\ \downarrow\\ b}}{b^2} = (a-b).(a+b)$$

Örnekler:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{x^2} - \underset{\substack{\downarrow\\ y}}{y^2} = (x-y).(x+y)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ a}}{a^2} - \underset{\substack{\downarrow\\ 3}}{3^2} = (a-3).(a+3)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 112}}{112^2} - \underset{\substack{\downarrow\\ 110}}{110^2} = (112-110).(112+110)$$

$= 2.222$

$= 444$

$$4a^2-25=\underset{\substack{\downarrow\\ 2a}}{(2a)^2}-\underset{\substack{\downarrow\\ 5}}{5^2}$$

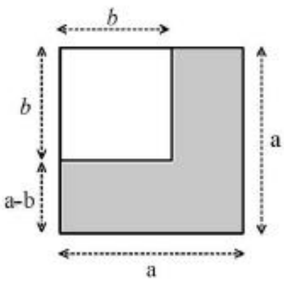
$=(2a-5).(2a+5)$

$$9a^2-4b^2=\underset{\substack{\downarrow\\ 3a}}{(3a)^2}-\underset{\substack{\downarrow\\ 2b}}{(2b)^2}$$

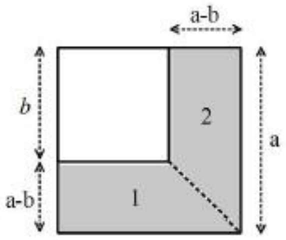
$=(3a-2b).(3a+2b)$

İki Kare Farkı Özdeşliği Modeli:

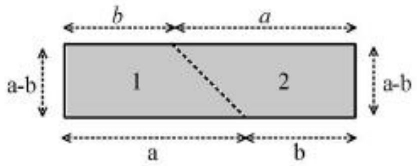
Aşağıda verilen boyalı bölgenin alanı , şeklin tüm alanından boyalı olmayan bölgenin alanının çıkarılması ile bulunur.



Şekil 1



Şekil 2



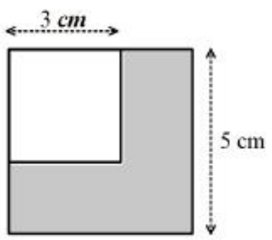
Şekil 3

2. şekilde oluşan 1 ve 2 nolu yamuklar , eğri kenarları üst üste gelecek şekilde birleştirildiğinde 3. şekildeki dikdörtgen oluşmaktadır.

3. şekildeki dikdörtgenin alanı (a-b) . (a+b) şeklinde hesap edilir.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)}$$

Örnek:



Yandaki karelerin bir kenar uzunluğu 5 cm ve 3 cm'dir.

Buna göre boyalı bölgenin alanı kaçtır?

Boyalı alan = Şeklin tüm alanı - boyasız bölge alanı
Boyalı alan = 5^2 - 3^2
Boyalı alan = (5- 3).(5+3)
Boyalı alan = 2 . 8
Boyalı alan = 16 cm²

8.5.4 ÇARPANLARINA AYIRMA

Bir sayıyı iki veya daha fazla sayının çarpımı biçiminde görstermeye <u>çarpanlarına ayırma</u> denir.

Çarpımdaki her bir sayıya ise <u>çarpan</u> denir.

A) Ortak Çarpan Parantezine Alma:

İki veya daha fazla terim ortak çarpan parantezine alınırken ;

1) Her terimdeki katsayıların EBOB'u ile ortak harflerin en küçük üssü ortak çarpan olarak parantez dışında yazılır.

2) Terimlerdeki ortak çarpanların dışında kalan çarpanlar ise parantez içine yazılır.

Örnekler:

a) 2x+6 = **2**.x +**2**.3
= **2**.(x+3)

b) 8x+6 = **2**.4.x +**2**.3
= **2**.(4x+3)

ı) 3.**(x+y)** +4.**(x+y)** = **(x+y)**.(3+4)
= **(x+y)**.7

i) **(2x+3)**.(x-1) +**(2x+3)**.(x+1) = **(2x+3)**.(x-1+x+1)
= **(2x+3)**.(2x)

NOT:

Bir cebirsel ifade (-) parantezine alındığında parantez içinde kalan tüm terimlerin işareti değişir.

B) Gruplandırarak Ortak Çarpan Parantezine Alma:

Cebirsel ifadenin her teriminde ortak çarpan yoksa ;

1) Terimler 2'şer 2'şer , 3'er 3'er veya daha fazla sayıda terimden oluşan gruplara ayrılır.

2) Bu gruplar ortak çarpan parantezine alınır.

3) Yeni oluşan terimler tekrar ortak çarpan parantezine alınır.

Örnekler:

a) ax +bx+ay +by = **x**.(a+b)+**y**.(a+b)

= (a+b).(x+y)

2.yol:

ax +bx+ay +by = **a**.(x+y)+**b**.(x+y)

= (x+y).(a+b)

C) Tam Kare Şeklindeki İfadeleri Çarpanlarına Ayırma :

ax^2+bx+c gibi 2.dereceden 3 terimli ifadeler , birinci terimin karekökü ile üçüncü terimin karekökünün toplamı yada farkının karesine eşit ise tam kare ifadedir denir.

ax^2+bx+c gibi 2. dereceden 3 terimli ifadenin tam kare belirtebilmesi için;

Birinci terimin karekökü ile üçüncü terimin karekökünün çarpımının 2 katı , ikinci (ortadaki) terime eşit olmalıdır.

Ortadaki terim +'lı ise;

$$\begin{array}{ccc} a^2 & +2ab & +b^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{a^2} & & \sqrt{b^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & b \end{array}$$

1.terimin karekökü olan a ile 3.terimin karekökü olan b'nin 2 katı olan 2ab sayısı ortadaki 2.terime eşit olduğundan $a^2+2ab+b^2$ ifadesi
tam kare bir ifadedir.Yani

$a^2+2ab+b^2$ = (a+b).(a+b)

= $(a+b)^2$

Ortadaki terim -'li ise;

$$\begin{array}{ccc} a^2 & -2ab & +b^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{a^2} & & \sqrt{b^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & b \end{array}$$

1.terimin karekökü olan a ile 3.terimin karekökü olan b'nin 2 katı olan 2ab sayısı ortadaki 2.terime eşit olduğundan a^2-$2ab+b^2$ ifadesi
tam kare bir ifadedir.Yani

$a^2-2ab+b^2$ = (a-b).(a-b)

= $(a-b)^2$

Örnekler:

a)

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & +8a & +16 & = & (a+4)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{a^2} & & \sqrt{16} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ a & & 4 & & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & -14a & +49 & = & (x-7)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{x^2} & & \sqrt{49} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ x & & 7 & & \end{array}$$

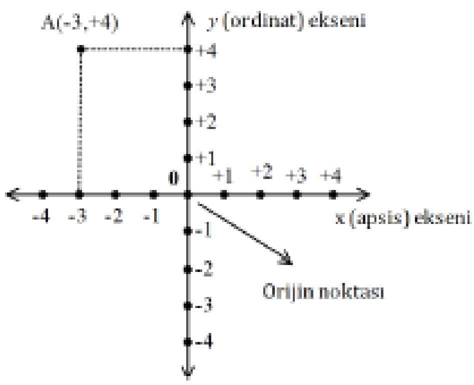
Derleyen:YUSUF KPL

8.8.1.B Koordinat Sistem Temel Elemanları

İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) noktasında birbiri ile dik kesişmesi sonucu dik koordinat sistemi oluşur.

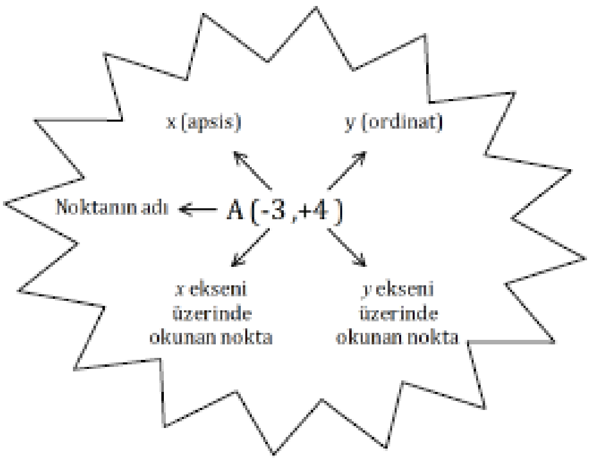
Bu sayı doğrularından yatay olanına x (apsis) ekseni , dikey olanına ise y (ordinat) ekseni denir.

Bu iki sayı doğrusunun (eksenin) kesiştiği noktaya orijin denir.



Bir noktanın konumunu bildiren (a,b) şeklindeki ikililere sıralı ikili denir.

Sıralı ikili denilmesinin nedeni 1.sıraya hep x (apsis)'in , 2. sıraya ise hep y (ordinat)'ın yazılmasıdır.



Bir noktanın koordinatını gösteren A(a,b) sıralı ikilisindeki ;

a değeri, A noktasından x eksenine doğru dikme çizildiğinde , x eksenini kestiği noktadır.

b değeri ise , A noktasından y eksenine dikme çizildiğinde , y eksenini kestiği noktadır.

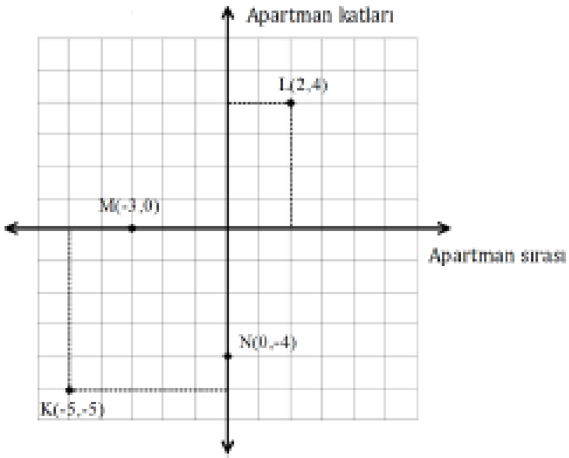
Pratik Yöntem:

x ekseni → Apartmanın sırası
y ekseni → Apartmanın katları

ise ,

(x,y) → (Apartman sırası , Apartmanın katı)

şeklinde düşünebiliriz.



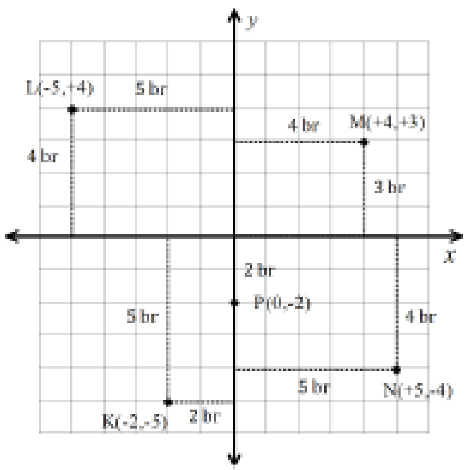
K (-5,-5) noktasında oturan bir kişi,
-5. apartmanın -5. katında oturuyordur.

L (+2,+4) noktasında oturan bir kişi ,
+2. apartmanın +4. katında oturuyordur.

M (-3,0) noktasında oturan bir kişi ,
-3. apartmanın 0. katında oturuyordur.

N (0,-4) noktasında oturan bir kişi ,
0. apartmanın -4. katında oturuyordur.

Noktanın Eksenlere Olan Uzaklığı:



Koordinat düzlem üzerindeki bir noktanın x eksenine olan uzaklığı ordinatının , y eksenine olan uzaklığı apsisinin mutlak değeri kadardır.

K(-2,-5) noktasının x eksenine olan uzaklığı $|-5|=5$ br ,

y eksenine olan uzaklığı $|-2|=2$ br'dir.

L(-5,+4) noktasının x eksenine olan uzaklığı $|+4|=4$ br ,

y eksenine olan uzaklığı $|-5|=5$ br'dir.

M(+4,+3) noktasının x eksenine olan uzaklığı $|+3|=3$ br ,

y eksenine olan uzaklığı $|+4|=4$ br'dir.

N(+5,-4) noktasının x eksenine olan uzaklığı $|-4|=4$ br ,

y eksenine olan uzaklığı $|+5|=5$ br'dir.

P(0,-2) noktasının x eksenine olan uzaklığı $|-2|=2$ br ,

y eksenine olan uzaklığı $|0|=0$ br'dir.

8.8.4 DOĞRUSAL İLİŞKİLER

x ve y birer değişken olmak üzere, ax+by+c=0 şeklindeki denklemlere **doğrusal denklem** denir.

Bu ifadedeki c sayısına sabit sayı , a ve b sayılarına katsayı adı verilir. a ve b sayıları aynı anda 0 (sıfır) değerini alamaz.

Başka bir değişkene bağlı olmadan artan yada azalan değişkenlere **bağımsız değişken** denir. Etkisini ölçmek için değiştirdiğimiz değişkendir.Etkileyen değişken de denir.

Başka bir değişkene bağlı olarak değişen değişkenlere **bağımlı değişken** denir. Değiştirilen bağımsız değişkene bağlı olarak değişen değişkendir.Etkilenen değişken de denir.

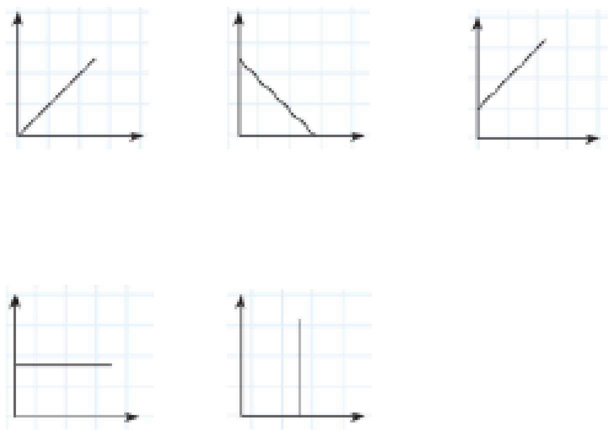
Bağımsız değişken → ETKİLEYEN

Bağımlı değişken → ETKİLENEN

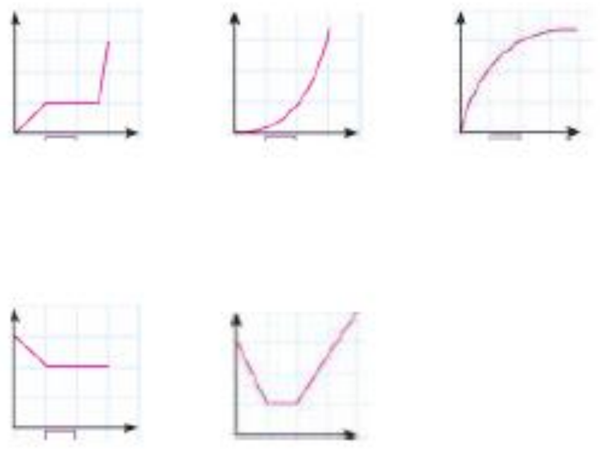
Eşit aralıklarda sabit değişim oranına sahip olan ilişkiye **doğrusal ilişki** denir.

İki değişken arasındaki doğrusal ilişki , denklem kurarak , tablo kullanarak veya grafik oluşturularak gösterilebilir..

Bağımsız değişkenin ardışık her değeri için , bağımlı değişken aynı miktarda artıyor yada azalıyorsa bu iki değişken arasında doğrusal ilişki vardır .



Yukarıdaki grafikler doğrusal (düz) çizgilerden oluştuğu için doğrusal denklem grafiğidir.



Yukarıdaki grafikler doğrusal (düz) çizgilerden oluşmadığı için doğrusal ilişkili denklem grafiği değildir.

NOT:
Verilen çokluklardan hangisinin bağımsız değişken, hangisinin bağımlı değişken olduğunu bulmamız denklemi oluşturmada işimizi kolaylaştırır.

Örnek:

Alınan ekmek (x)	1	2	3	4
Ödenen para (y)	1,25	2,50	3,75	5,00

Bir fırından alınan her 1 ekmek için aynı miktarda para ödendiğinden , alınan ekmek ile ödenen para arasında doğrusal ilişki vardır.

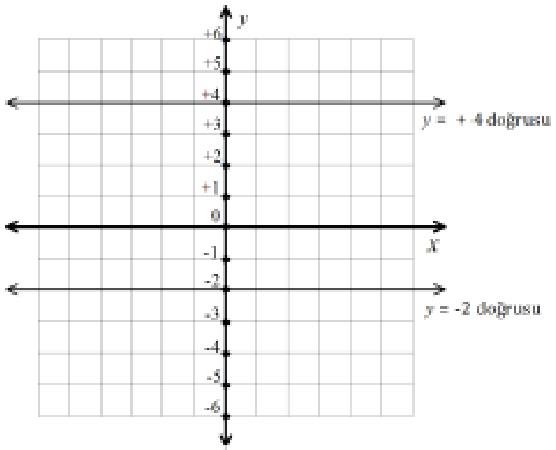
Alınan ekmek ile ödenen para arasındaki doğrusal denklem $y = \frac{5}{2}x$'dir.

8.8.2 DOĞRUSAL DENKLEM GRAFİKLERİ

8.8.2.A Eksenlere Paralel Doğrusal Denklem Grafikleri

1) x eksenine paralel doğru grafikleri

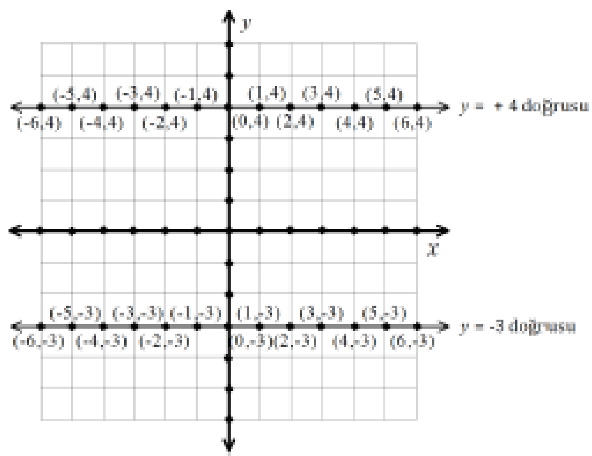
Denklemi y=b şeklinde olan doğrular y eksenine paralel , x eksenine dik doğrulardır.



x eksenine paralel , y eksenini -2 noktasından kesen doğruya y=-2 doğrusu denir.

x eksenine paralel , y eksenini +4 noktasından kesen doğruya y=+4 doğrusu denir.

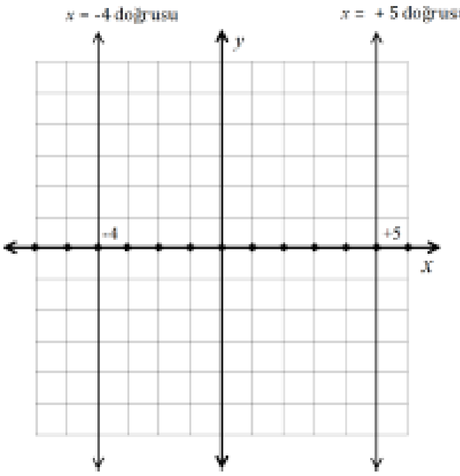
y eksenine paralel doğruların üzerindeki noktaların , y (ordinat) 'ları hep aynı olduğu için doğrular o noktanın y (ordinat) değeri ile isimlendirilir.



y=+4 doğrusu üzerindeki noktaların ordinatları +4'tür.
y=-3 doğrusu üzerindeki noktaların ordinatları -3'tür.

2) y eksenine paralel doğru grafikleri

Denklemi x=a şeklinde olan doğrular x eksenine paralel , y eksenine dik doğrulardır.



y eksenine paralel , x eksenini -4 noktasından kesen doğruya x=-4 doğrusu denir.

y eksenine paralel , x eksenini +5 noktasından kesen doğruya x=+5 doğrusu denir.

8.8.2.B Orijinden Geçen Doğrusal Denklem Grafikleri

y=ax şeklinde sabit terimi olmayan doğrusal denklemlerin grafiği orijinden geçer.

Bu doğru grafiklerini çizmek için ,iki noktadan yalnız bir doğru geçer mantığıyla, doğrusal denklemler kullanılarak <u>en az</u> iki noktanın koordinatını hesaplanır.

Bunun için doğrusal denklemde x'e değerler verilip, y değerleri bulunarak , doğrusal denklem grafiğinin üzerinden geçtiği noktalar bulunmuş olur.

Örnek:

y=2x doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Orijinden geçen doğru grafiğini çizebilmek için ,

1. adım:

Doğru denkleminde x'e değerler verip, y değerlerini bulalım.

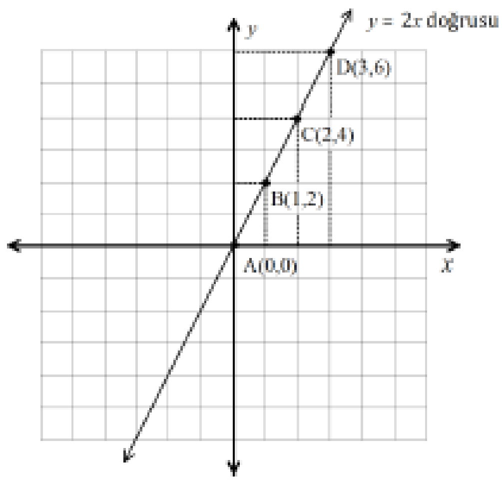
x= 0 için ,	x=1 için	x=2 için	x=3 için
y=2.x y=2.0 y=0	y=2.x y=2.1 y=2	y=2.x y=2.2 y=4	y=2.x y=2.3 y=6
A(0,0)	B(1,2)	C(2,4)	D(3,6)

2. adım:

Bulunan noktalardan herhangi ikisinin koordinat düzlem üzerinde yerleştirilmesi doğrusal denklem grafiğinin çizilmesi için yeterlidir.

3. adım:

A ve B noktaları üzerinden geçen doğru çizildiğinde , y=2x doğrusu çizilmiş olur. Buradan da görüldüğü gibi doğrunun diğer bulunan noktalar üzerinden de geçtiği görülür.



NOT:

Doğrusal denklemde x'e sıfır değeri verildiğinde, y değerini sıfır bulunuyorsa, yani (0,0) koordinatlı bir nokta elde ediliyorsa , doğrusal denklem grafiği orijinden geçer denir.

Çünkü doğrusal denklem grafiği x'e değerler verildiğinde bulunan y değerleri ile oluşan tüm (x,y) sıralı ikilerinin üzerinden geçer.

Bu durumun tam tersi de geçerlidir.Grafik üzerindeki noktaların koordinatlarındaki x ve y değerleri doğrusal denklemde yerlerine yazıldığında eşitlik sağlarlar.

8.8.2.C Eksenleri Kesen Doğrusal Denklem Grafikleri

$ax + by + c = 0$, $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$ şeklinde olan doğrusal denklem grafikleri x ve y eksenlerini farklı noktadan keser.Yani bu doğrular orijinden geçmezler.

Doğru grafiğini çizmek için , iki noktadan yalnız bir doğru geçer mantığıyla, doğrusal denklemler kullanılarak en az iki noktanın koordinatını hesaplanır.

Bunun için doğrusal denklemde x'e rastgele değerler verilip, y değerleri bulunarak , doğrusal denklem grafiğinin üzerinden geçtiği noktalar bulunmuş olur.

	x	y
A	-1	
B	0	
C	1	
D	2	

Bulunan iki noktanın koordinatı , koordinat düzlemde yerleştirilip , bu iki nokta üzerinden geçen doğru çizildiğinde ax+by+c=0 doğrusal denkleminin grafiği çizilmiş olur.

Eksenleri kestiği noktaları bulmak için ise doğrusal denklemde,

x'e sıfır değeri verildiğinde doğrunun y eksenini kestiği nokta, y'ye sıfır değeri verildiğinde doğrunun x eksenini kestiği nokta bulunur.

x'e 0 (sıfır) verilip , y değeri bulunur. → M(0,a)

y'ye 0 (sıfır) verilip , x değeri bulunur. → N(b,0)

	x	y
M	0	a
N	b	0

olmak üzere x ekseni ve y ekseni üzerindeki M ve N noktaları bulunur.

8.8.3 EĞİM

8.8.3.A Eğimin Tanımı

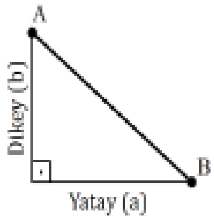
Düz bir yolda yürümek kolaydır.Fakat yokuşlu yollarda yürümek kolay değildir.Yokuşlu yollarda hem hızımız azalır hem de daha çabuk yoruluruz.Üstelik yorgunluğumuz yokuştan yokuşa göre de değişir. Yokuşu az olan yolda yürümek , yokuşu çok olan yolda yürümeye göre daha kolaydır.Bunun nedeni yolların dikliğinin farklı olmasıdır.Matematikte bu dikliğe eğim denir.

Yalnız matematikte değil günlük hayatta da eğimi kullanırız.

Örneğin şehirler arası yollarda seyahat ederken , yolların eğimini gösteren tabelalara rastlayabiliriz.

Bu tabelalar yolun eğiminin , yani dikey uzunluğunun yatay uzunluğuna oranının kaç olduğunu gösteren uyarıcı levhalardır.

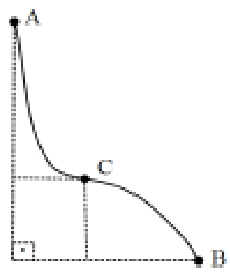
Bir AB yolunun eğimini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.



$$\text{Eğim } (m) = \frac{\text{Dikey uzunluk}}{\text{Yatay uzunluk}}$$

$$\text{Eğim } (m) = \frac{b}{a}$$

B noktasından yola çıkan bir aracın C noktasına kadar olan yolun eğimini ve C noktasından A noktasına kadar olan eğimi dikey uzunluk bölü yatay uzunluk şeklinde hesaplayabiliriz.

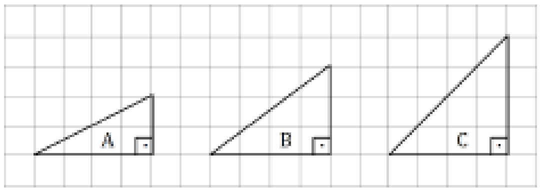


Eğim % ile de gösterilir.

Derleyen:YUSUF KPL

Örnek:

Aşağıda aynı yatay uzunluklarına sahip üç yolun eğimlerini hesaplayınız.



Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3

$m_A = \frac{2}{4}$ $m_B = \frac{3}{4}$ $m_C = \frac{4}{4}$

Buradan,

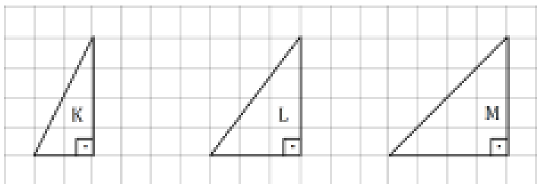
$m_1 < m_2 < m_3$

olduğundan şunu diyebiliriz.

Yatay uzunluk sabitken,düşey uzunluk artıkça eğimde artar.

Örnek:

Aşağıda aynı dikey uzunluklarına sahip üç yolun eğimlerini hesaplayınız.



Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3

$m_K = \frac{4}{2}$ $m_L = \frac{4}{3}$ $m_M = \frac{4}{4}$

Buradan,

$m_M < m_L < m_K$

olduğundan şunu diyebiliriz.

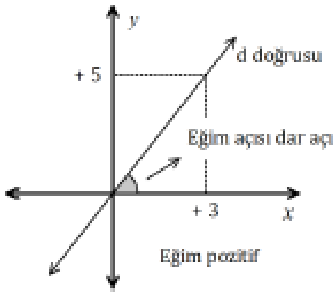
Düşey uzunluk sabitken,yatay uzunluk artıkça eğimde artar.

8.8.3.B Koordinat Düzleminde Doğrunun Eğimi

1) Doğruda eğim açısı,eğim işareti ve eğim hesabı:

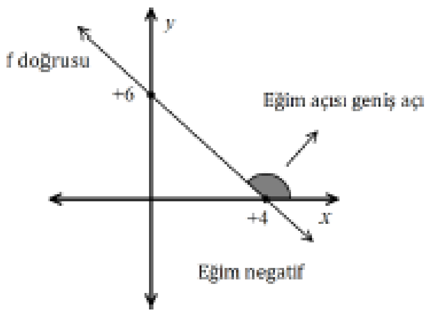
Bir doğrunun x ekseni ile saat yönünün tersinde yaptığı açıya eğim açısı denir.

Eğim açısı dar açı ise eğim (+) pozitif , geniş açı ise eğim (-) negatif olur.



$$\text{Eğim } (m_{doğru}) = (\text{Eğimin işareti}) \frac{\text{Dikey uzunluk}}{\text{Yatay uzunluk}}$$

$$m_d = +\frac{5}{3}$$



$$\text{Eğim } (m_{doğru}) = (\text{Eğimin işareti}) \frac{\text{Dikey uzunluk}}{\text{Yatay uzunluk}}$$

$$m_f = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

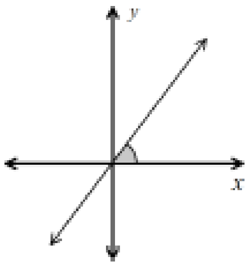
Doğrunun eğimini bulabilmek için hipotenüsü doğru üzerinde olan dik üçgenler oluşturup , "dikey uzunluk bölü yatay uzunluk" şeklinde eğimin büyüklüğü hesaplanır.

NOT: Günlük hayatla ilişkili modellemelerde eğimin dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı olduğu dikkate alınarak işareti üzerinde durulmaz.

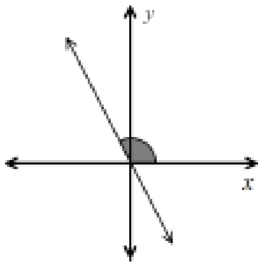
Eğimin İşareti Hakkında Genelleme:

Doğru grafiklerinin eğimlerinin işaretleri hakkında şu şekilde genelleme yapabiliriz.

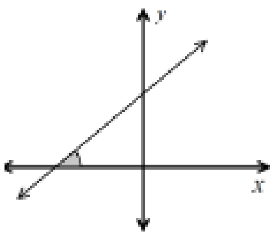
Sağa yatık olan doğruların eğimi + (pozitif) , sola yatık olan doğruların eğimi - (negatif) 'tir.



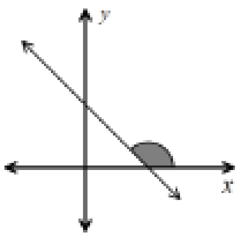
Eğim açısı dar açı olduğundan eğim (+) pozitiftir.Sağa yatık.



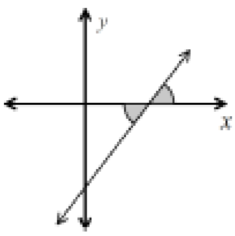
Eğim açısı geniş açı olduğundan eğim (-) negatiftir. Sola yatık.



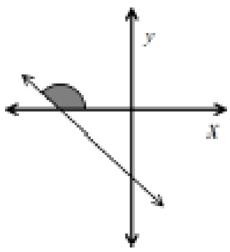
Eğim açısı dar açı olduğundan eğim (+) pozitiftir.Sağa yatık.



Eğim açısı geniş açı olduğundan eğim (-) negatiftir. Sola yatık.



Eğim açısı dar açı olduğundan eğim (+) pozitiftir.Sağa yatık.

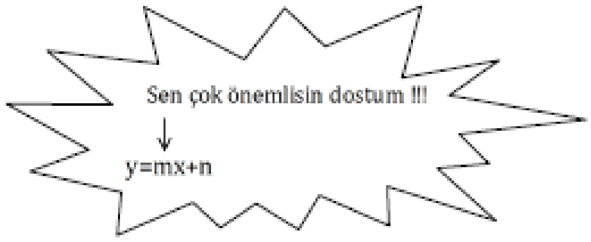


Eğim açısı geniş açı olduğundan eğim (-) negatiftir. Sola yatık.

8.8.3.C Doğrusal Denklemi Verilen Doğrunun Eğimi

Bir doğrunun doğrusal denklemi verildiğinde grafiği çizilmeden de eğimi bulunabilir.

Verilen doğrusal denklemde y yalnız bırakıldığında, yani y'yi x cinsinden yazdığımızda x'li terimin katsayısı doğrunun eğimi verir.



y=mx+n doğrusal denkleminde x'in katsayısı olan "m" doğrunun eğimini verir.

Örnekler:

y= 3x+1 doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan 3'tür.

y= -4x+3 doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan -4'tür.

y=-x-1 doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan -1'dir.

$$\begin{aligned} y+3x &= 6 \\ y &= -3x+6 \end{aligned}$$

doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan -3'tür.

$$\begin{aligned} 2y-x &= +4 \\ 2y &= +x+4 \\ y &= \frac{+x+4}{2} \\ y &= +\frac{x}{2}+\frac{4}{2} \end{aligned}$$

doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan $+\frac{1}{2}$ 'dir.

$$\begin{aligned} 6x-4y &= +3 \\ 6x-3 &= +4y \\ \frac{6x-3}{4} &= y \\ +\frac{6x}{4}-\frac{3}{4} &= y \end{aligned}$$

doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan $+\frac{6}{4}=+\frac{3}{2}$ 'dir.

8.8.4 EŞİTSİZLİKLER

Sayı , şekil , cebirsel ifade , ... vb. niceliklerin

< →Küçüktür.
≤ →Küçüktür veya eşittir.
> →Büyüktür.
≥ →Büyüktür veya eşittir.

sembolleri ile karşılaştırılmasına **eşitsizlik** denir.

Terazinin denge durumu eşitlik , denge olmaması durumu ise eşitsizlik belirtir.

5 > 3

HATIRLATMA : (Sembollerin anlamları)

1) < ve > sembollerin önüne konulan çizgi ile sembollerin anlamı karıştırmayız.

|< Küçük |> Büyük

2) Sembolleri açık ağıza benzetecek olursak , ağız yönü her zaman büyük sayıya doğrudur.Çünkü insan hep çok olanı tercih eder :)

$3 < 4$ $10 > 5$

EŞİTSİZLİKLERİN SAYI DOĞRUSUNDA GÖSTERİMİ

> veya < sembolü içeren eşitsizliklerde sınır noktasının içi boştur.Bu nokta eşitsizliğin belirttiği çözüm aralığına dahil değildir. Yani eşitlik çizgisi olmadığında sınır noktasının içi boş olacak.

○ ⟶ Bu sayı dahil değil (< , >)

Sınır Noktası

≤ veya ≥ sembolü içeren eşitsizliklerde sınır noktasının içi doludur.Bu nokta eşitsizliğin belirttiği çözüm aralığına dahildir.

● ⟶ Bu sayı dahil (≤ , ≥)

Sınır Noktası

x < 5 eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

+5'ten küçük olan sayılar sayı doğrusunda yukarıdaki gibi gösterilir. Sınır noktası olan +5'te eşitlik olmadığı için noktanın içi boş olarak gösterilmiştir.

x bir tamsayı ise ,

$x = \{+4, +3, +2, +1, 0, -1, ...\}$

x ≤ -2 eşitsizliğini sayı doğrusunda gösterelim.

-2 sayısına eşit veya -2'den küçük olan sayılar sayı doğrusunda yukarıdaki gibi gösterilir. Sınır noktası olan -2'de eşitlik olduğundan noktanın içi dolu olarak gösterilmiştir.

x bir tamsayı ise ,

$x = \{-2, -3, -4, -5, -6, -7, ...\}$

$x \geq -4$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösteriniz.

-4 sayısına eşit veya -4'ten büyük olan sayılar sayı doğrusunda yukarıdaki gibi gösterilir. Sınır noktası olan -4'te eşitlik olduğundan noktanın içi dolu olarak gösterilmiştir.

x bir tamsayı ise ,

$x = \{-4, -3, -2, -1, 0, +1, ...\}$

$0 < x < 5$ eşitsizliğini sayı doğrusunda gösteriniz.

0'dan büyük ve 5'ten küçük olan sayılar sayı doğrusunda yukarıdaki gibi gösterilir. Sınır noktaları olan 0 ve +5'te eşitlik olmadığı için noktaların içi boş olarak gösterilmiştir.

x bir tamsayı ise ,

$x = \{+1, +2, +3, +4\}$

EŞİTSİZLİK KURALLARI :

Eşitsizlikte aşağıdaki verilen kurallara dikkat edilmelidir.

1) Eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı (nicelik) eklenirse eşitsizlik bozulmaz.

2) Eşitsizliğin her iki yanından aynı sayı (nicelik) çıkarılırsa eşitsizlik bozulmaz.

3) Eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayı (nicelik) çarpılırsa eşitsizlik bozulmaz.

4) Eşitsizliğin her iki tarafı negatif sayı(nicelik) ile çarpılırsa eşitsizliğin yönü değişir.

5) Eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayıya (niceliğe) bölünürse eşitsizliğin yönü değişmez.

6) Eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif sayıya (niceliğe) bölünürse eşitsizliğin yönü değişir.

DİKKAT:

Eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif bir sayı ile çarpılırken yada bölünürkeneşitsizliğin yönü değişmezken,

eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif bir sayı ile çarpıldığında yada bölündüğünde eşitsizliğin yönü değişir.

BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜMÜ

a ve b gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax+b < 0$

$ax+b > 0$

$ax+b \leq 0$

$ax+b \geq 0$

olarak yazılan içinde birinci dereceden bir bilinmeyen bulunan eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Eşitsizliği çözmek değişkenin eşitsizliği bozmayan değerlerini bulmak demektir.Eşitsizlik çözümleri denklem çözümüne benzer yöntemlerle yapılır.Denklem çözümünde denklemin bir veya birkaç değeri olabiliyorken eşitsizlikte çözüm bir aralıktır.

Eşitsizlik ifadeleri içeren problemleri çözerken ve verilen problemlere uygun matematik cümleleri yazılarak çözüm adımları uygulanır.

Derleyen:YUSUF KPL

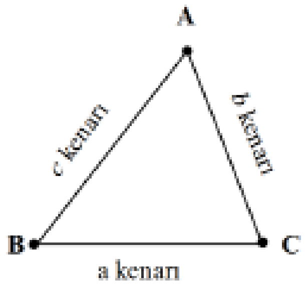
8.5.4 ÜÇGENİN TEMEL ELEMANLARI

8.5.4.A Yükseklik

Üçgenin bir köşesinden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına çizilen dik doğru parçalarına,o kenara ait yükseklik denir.Yükseklik "h" sembolü ile gösterilir.

A açısının karşısındaki kenar a ,
B açısının karşısındaki kenar b ,
C açısının karşısındaki kenar c ,

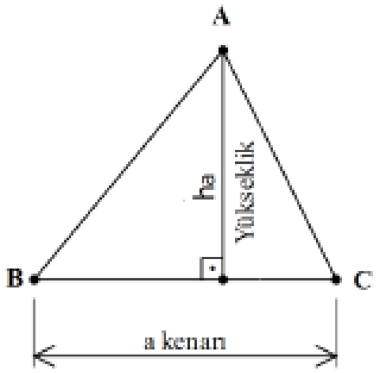
şeklinde küçük harflerle ifade edilir.



Buradan yola çıkarak;

a kenarına ait yükseklik h_a,
b kenarına ait yükseklik h_b,
c kenarına ait yükseklik h_c,

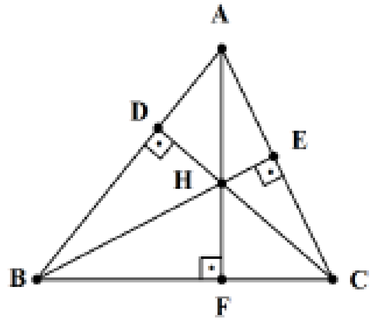
şeklinde ifade edilir.



NOT:

Yükseklik; üçgenin bir köşesinden karşı kenara çizilebilecek en kısa doğru parçası şeklinde de ifade edilebilir.

1) Dar Açılı Üçgende Yükseklik Çizimi:

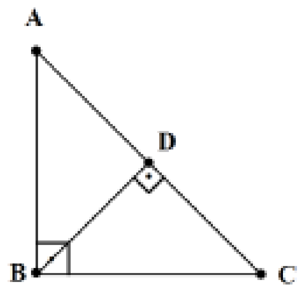


[BC] kenarına ait yükseklik [AF] 'dir.
[AC] kenarına ait yükseklik [BE] 'dir.
[AB] kenarına ait yükseklik [DC] 'dir.

NOT:

Görüldüğü üzere dar açılı üçgenlerde yükseklikler üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişirler.

2) Dik Açılı Üçgende Yükseklik Çizimi:



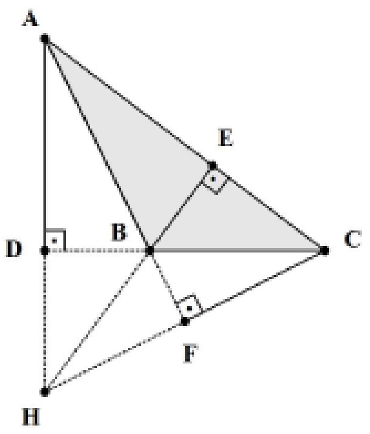
[BC] kenarına ait yükseklik [AB] 'dir.
[AC] kenarına ait yükseklik [BD] 'dir.
[AB] kenarına ait yükseklik [BC] 'dir.

NOT:

Görüldüğü üzere dik açılı üçgenlerde yükseklikler üçgenin dik olan köşesinde kesişirler.

Derleyen:YUSUF KPL

3) Geniş Açılı Üçgende Yükseklik Çizimi:



$[BC]$ kenarına ait yükseklik $[AD]$ 'dir.

$[AC]$ kenarına ait yükseklik $[BE]$ 'dir.

$[AB]$ kenarına ait yükseklik $[CF]$ 'dir.

NOT:

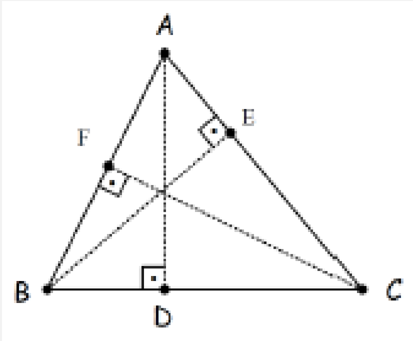
Görüldüğü üzere geniş açılı üçgenlerde yükseklikler üçgenin dış bölgesinde bir noktada kesişirler.

NOT:
Yükseklikler her zaman bir noktada kesişirler.Bu yüzden yükseklikler noktadaş doğrulardır.

HATIRLATMA:

ÜÇGENDE ALAN HESABI:

ABC çeşitkenar bir üçgen olmak üzere;



$$\text{Üçgen Alanı} = \frac{\text{Taban Uzunluğu.Yükseklik}}{2}$$

formülü ile bulunur.

ABC üçgeninin alanı;

* Taban BC kenarı kabul edilirse alan;

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{a \;.\; h_a}{2}$$

** Taban AC kenarı kabul edilirse alan;

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{b \;.\; h_b}{2}$$

*** Taban AB kenarı kabul edilirse alan;

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{c \;.\; h_c}{2}$$

şeklinde hesaplanır.

NOT:

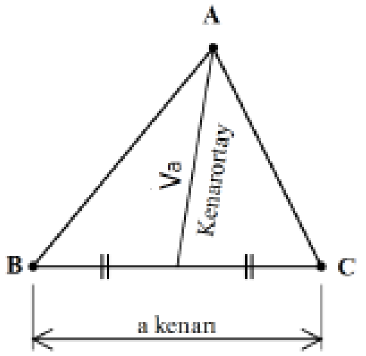
Bir çeşitkenar üçgende ;

$a < b < c$ ise

$h_c < h_b < h_a$ 'dır.

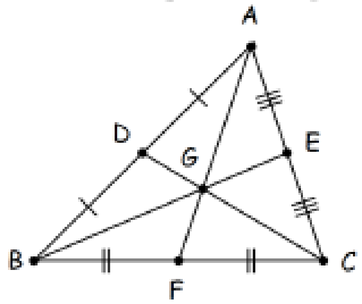
8.5.4.B Kenarortay

Bir üçgende,üçgenin bir köşesini karşısındaki kenarın orta noktası ile birleştiren doğru parçasına o kenara ait kenarortay denir.Kenarortay "V" sembolü ile gösterilir.



a kenarına ait kenarortay V_a,
b kenarına ait kenarortay V_b,
c kenarına ait kenarortay V_c,

şeklinde ifade edilir.



[AB] kenarına ait kenarortay [DC] 'dir.

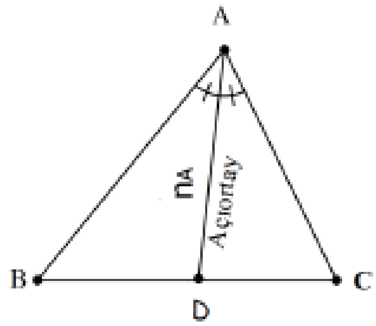
[AC] kenarına ait kenarortay [BE] 'dir.

[BC] kenarına ait kenarortay [AF] 'dir.

NOT:
Kenarortaylar her zaman üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişirler.Bu yüzden kenarortaylar noktadaş doğrulardır.

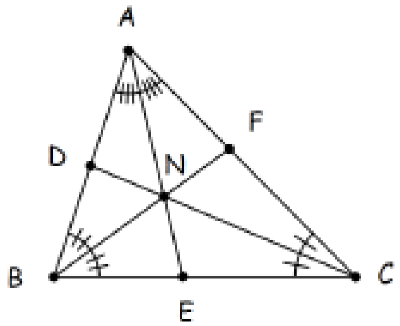
8.5.4.C Açıortay

Bir üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara çizilen ve bulunduğu köşedeki açıyı iki eş parçaya ayıran ışına veya doğru parçasına açıortay denir.



A açısına ait açıortay n_A,
B açısına ait açıortay n_B,
C açısına ait açıortay n_C

şeklinde ifade edilir.



A açısına ait açıortay [AE] 'dır.

B açısına ait açıortay [BF] 'dır.

C açısına ait açıortay [CD] 'dır.

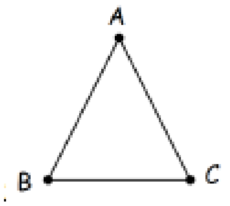
NOT:
Açıortaylar her zaman üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişirler.Bu yüzden açıortaylar noktadaş doğrulardır.

Derleyen:YUSUF KPL

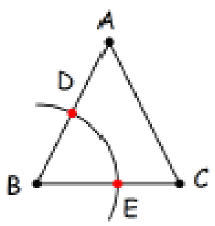
ETKİNLİK: (PERGEL YARDIMIYLA AÇIORTAY ÇİZİMİ)

1.Adım:

ABC üçgeni çizilir.

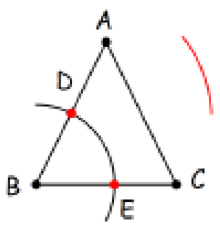


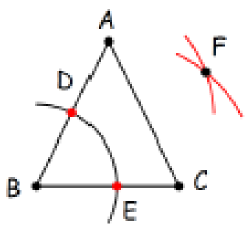
Pergelin sivri ucu açıortayı çizilecek köşeye konur ve kenarların her ikisini de kesecek şekilde çember yayı çizilir.



3.Adım:

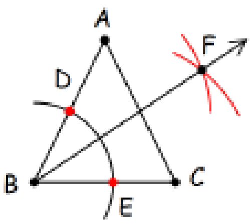
Pergel rastgele uzunlukta açılır, pergelin sivri ucu D noktasına konur ve B açısının karşısına çember yayı çizilir.Sonra aralık değiştirmeden pergelin sivri ucu E noktasına konur ve önce çizilen yayı kesecek şekilde çember yayı çizilir.





4.Adım:

Son olarak B köşesi ile yayların kesim noktası olan F noktası birleştirilir ve B açısına ait açıortay çizilmiş olur.

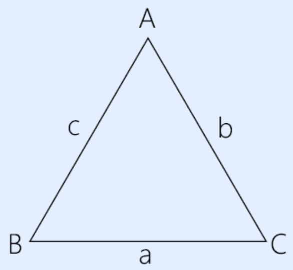


NOT:
KÖŞE + KÖŞE = KENARORTAY (V)
KENAR + KENAR = AÇIORTAY (N)
KÖŞE + KENAR = YÜKSEKLİK (h)

<u>AÇI+AÇI+AÇI (AAA) →ÇİZİLEMEZ</u>

ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ

Üçgende bir kenar uzunluğu; diğer kenar uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür. Buna **üçgen eşitsizliği** denir.



$|c - b| < a < c + b$

$|c - a| < b < c + a$

$|b - a| < c < b + a$

★Bu şartları sağlamayan üçgen çizilemez.

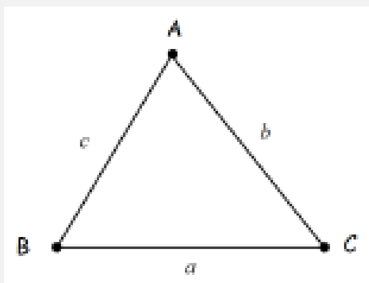
Örnek-1 Kenar uzunlukları; $a = 3$ cm, $b = 4$ cm ve $c = 6$ cm olan bir üçgenin çizilip çizilemeyeceğini bulalım.

Bu tarz sorularda, üçgenin her bir kenarı için üçgen eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakmalıyız.

$\|c - b\| < a < c + b$	$\|c - a\| < b < c + a$	$\|b - a\| < c < b + a$
$\|6 - 4\| < 3 < 6 + 4$ $2 < \mathbf{3} < 10$	$\|6 - 3\| < 4 < 6 + 3$ $3 < \mathbf{4} < 9$	$\|4 - 3\| < 6 < 4 + 3$ $1 < \mathbf{6} < 7$
★Eşitsizliklerin üçü de sağlandığına göre bu üçgeni çizebiliriz.		

8.5.5 ÜÇGENDE AÇI KENAR İLİŞKİSİ

1) Bir üçgende büyük açının gördüğü (karşısındaki) kenar uzun kenar , küçük açının gördüğü (karşısındaki) kenar kısa kenardır.

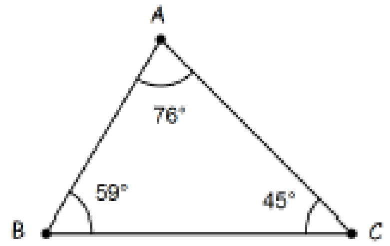


$s(\hat{A}) > s(\hat{B}) > s(\hat{C})$ **ise**

$a > b > c$ **olur.**

Derleyen:YUSUF KPL

Örnek:



Yukarıda verilen üçgenin kenar uzunluklarını en uzundan en kısaya doğru sıralayınız.

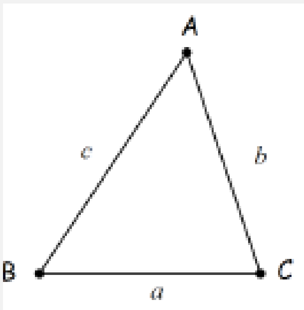
Çözüm:

Büyük açı karşısında uzun kenar,küçük açı karşısında kısa kenar bulunduğuna göre açılar büyükten küçüğe doğru sıralanırsa , kenarlar da uzundan kısaya sıralanmış olur.Yani

$76^0 > 59^0 > 45^0$ ise

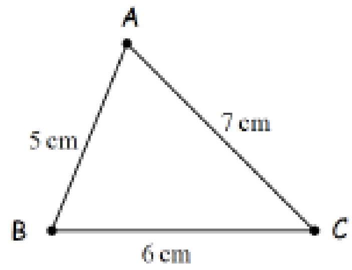
$|BC| > |AC| > |AB|$ şeklinde sıralanır.

2) İlk durumun tam tersi de doğrudur.Yani uzun kenarı gören açı büyük , kısa kenarı gören açı küçüktür.



$a > b > c$ **ise**

$s(\hat{A}) > s(\hat{B}) > s(\hat{C})$ **olur.**



Yukarıda verilen üçgenin açı ölçülerini en büyükten en küçüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

Uzun kenarı gören açı büyük , kısa kenarı gören açı küçük olduğuna göre kenar uzunlukları uzundan kısaya doğru sıralanırsa , kenarları gören açıların ölçüleri de büyükten küçüğe doğru sıralanmış olur.

7 cm > 6 cm > 5 cm ise

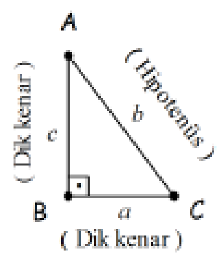
$s(\hat{B}) > s(\hat{A}) > s(\hat{C})$ şeklinde sıralanır.

NOT:

KENAR+KENAR+KENAR (KKK)= (Cetvel + Pergel)
KENAR+AÇI+KENAR(KAK)=(Cetvel + Açıölçer)
AÇI+KENAR+AÇI (AKA) =(Cetvel + Açıölçer)

8.5.8 PİSAGOR BAĞINTISI

Bir dik üçgende dik kenarlarının uzunluk ölçülerinin kareleri toplamı , hipotenüsün uzunluk ölçüsünün karesine eşittir.Bu bağıntıya pisagor bağıntısı denir.



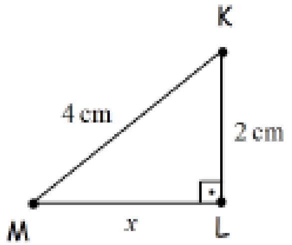
ABC dik üçgeninde a ve c dik kenarlar, b hipotenüstür. Buna göre pisagor bağıntısı uygulanırsa;

$$a^2 + c^2 = b^2$$

NOT: PİSAGOR BAĞINTISI SADECE DİK ÜÇGENLERDE UYGULANIR.

Derleyen:YUSUF KPL

Örnek:



Yukarıdaki KLM dik üçgeninde ML kenarının uzunluğu kaçtır?

Çözüm:

KLM dik üçgeninde pisagor bağıntısı uygulanırsa,

$$2^2 + x^2 = 4^2$$
$$4 \ + x^2 = 16$$
$$x^2 = 16 - 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{12}$$
$$x = 2\sqrt{3}$$

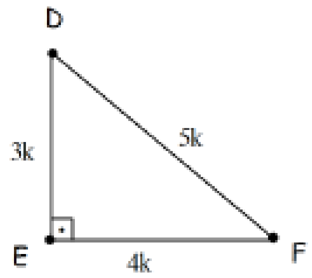
Pisagor bağıntısı sorularında 2 kenar uzunluğunun ölçüsü verilir, 3.kenar uzunluğunun ölçüsünü bulmamız istenir.

8.5.8.A ÖZEL ÜÇGENLER

A) Kenarlarına Göre Özel Üçgenler:

Özel üçgenler ; pisagor bağıntısı ile ilgili sorularda çok kullanılan üçgenlerdir. İşlem yapmadan verilmeyen kenarları kolayca bulmamıza yarar.

a) $3k - 4k - 5k$ özel üçgeni:

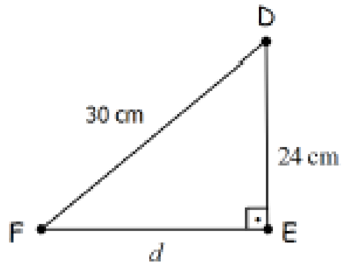


$$\boxed{(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2}$$

Dik kenarları 3 ve 4'ün aynı katı olan dik üçgenlerde ,hipotenüs 5'in aynı katıdır.

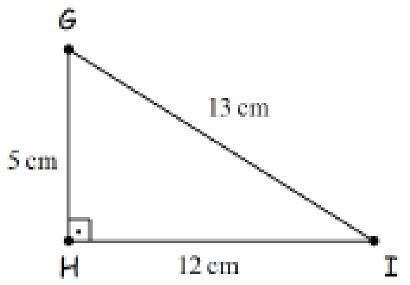
	Dik kenarlar		Hipotenüs
	3k	4k	5k
k=1	3	4	5
k=2	6	8	10
k=3	9	12	15
k=4	12	16	20
k=5	15	20	25

Örnek:



Yukarıdaki şekle göre $|FE| = d$ kaç santimetredir?

b) $5k-12k-13k$ özel üçgeni:

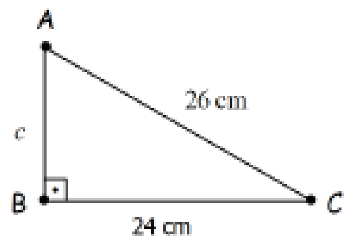


$\boxed{(5k)^2+(12k)^2=(13k)^2}$

Dik kenarları 5 ve 12'nin aynı katı olan dik üçgenlerde ,hipotenüs 13'ün aynı katıdır.

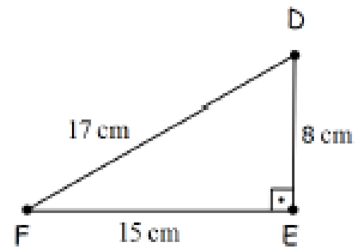
	Dik kenarlar		Hipotenüs
	5k	12k	13k
k=1	5	12	13
k=2	10	24	26
k=3	15	36	39

Örnek:



Yukarıdaki şekle göre $|AB|=c$ kaç santimetredir?

c) $8k-15k-17k$ üçgeni:



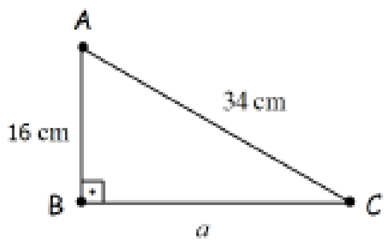
$\boxed{(8k)^2+(15k)^2=(17k)^2}$

Dik kenarları 8 ve 15'in aynı katı olan dik üçgenlerde ,hipotenüs 17'nin aynı katıdır

.

	Dik kenarlar		Hipotenüs
	8k	15k	17k
k=1	8	15	17
k=2	16	30	34
k=3	24	45	51

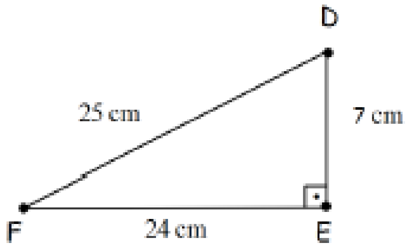
Örnek:



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre $|BC|=a$ kaç santimetredir?

Derleyen:YUSUF KPL

d) $7k - 24k - 25k$ özel üçgeni:

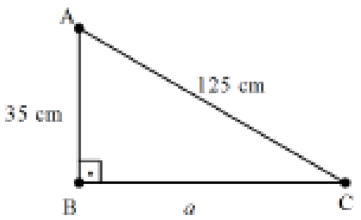


$$(7k)^2 + (24k)^2 = (25k)^2$$

Dik kenarları 7 ve 24'ün aynı katı olan dik üçgenlerde ,hipotenüs 25'in aynı katıdır.

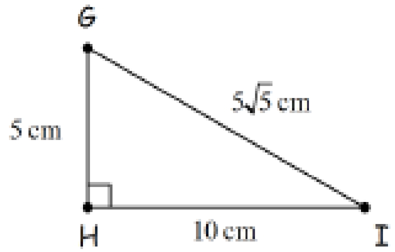
	Dik kenarlar		Hipotenüs
	7k	24k	25k
k=1	7	24	25
k=2	14	48	50
k=3	21	72	75

Örnek:



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre $|BC| = a$ kaç santimetredir?

e) $k - 2k - k\sqrt{5}$ özel üçgeni:

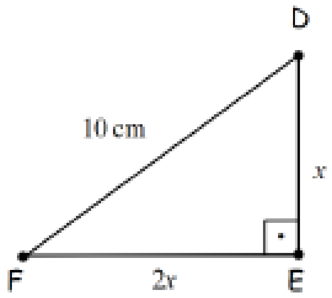


$$(k)^2 + (2k)^2 = (k\sqrt{5})^2$$

Dik kenarları 5 ve 12'nin aynı katı olan dik üçgenlerde ,hipotenüs 13'ün aynı katıdır.

	Dik kenarlar		Hipotenüs
	k	2k	$k\sqrt{5}$
k=1	1	2	$\sqrt{5}$
k=2	2	4	$2\sqrt{5}$
k=3	3	6	$3\sqrt{5}$

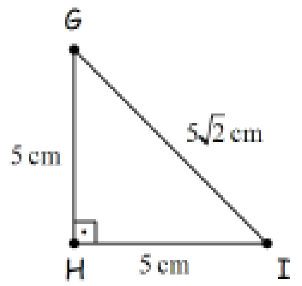
Örnek:



Yukarıda verilen dik üçgene göre x kaç cm'dir?

Derleyen:YUSUF KPL

f) $k - k - k\sqrt{2}$ özel üçgeni:

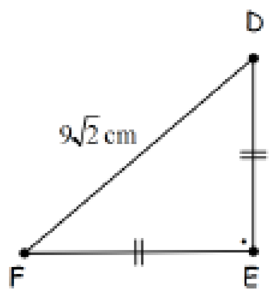


$$(k)^2 + (k)^2 = (k\sqrt{2})^2$$

Dik kenarları 5 ve 12'nin aynı katı olan dik üçgenlerde ,hipotenüs 13'ün aynı katıdır.

	Dik kenarlar		Hipotenüs
	k	k	$k\sqrt{2}$
k=1	1	1	$\sqrt{2}$
k=2	2	2	$2\sqrt{2}$
k=3	3	3	$3\sqrt{2}$

Örnek:



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre $|DE| + |FE|$ kaç santimetredir?

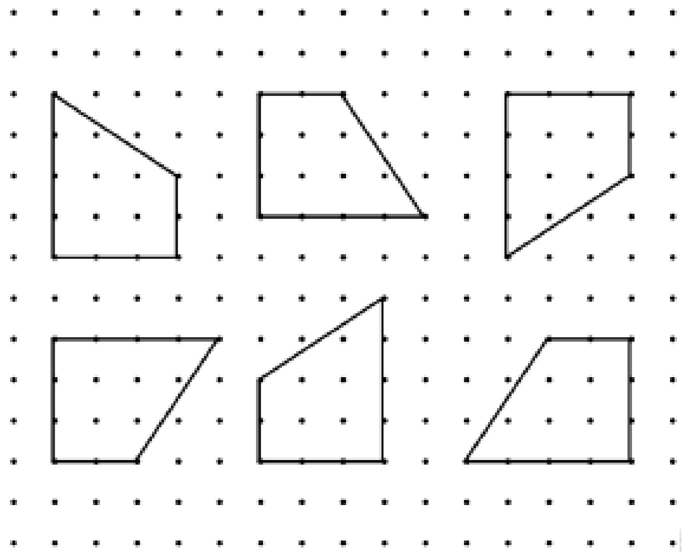
Çözüm:

EŞLİK

Bir şeklin yada nesnenin aynısı kendisinin eşidir.

Eşlik sembolü $\equiv$ ile gösterilir.

A ve B şekilleri eş ise $A \equiv B$ ile gösterilir ve "A eştir B" şeklinde okunur.



Yukarıdaki şekiller,bir şeklin sağa ve sola ötelenmesi ,yansıması veya döndürülmesi sonucu oluşan eş şekillerdir.

Eş şekiller birbirinin tıpkısının aynısı olan, üst üste koyduğumuzda birbirini tam kapatan (örten) şekillerdir.

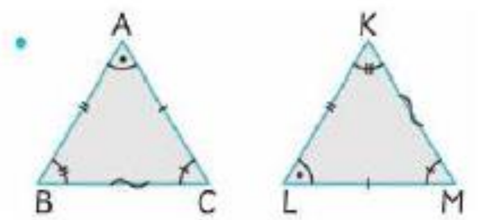
Eş şekillerin büyüklükleri aynıdır.

ÇOKGENLERDE EŞLİK:

Eğer iki çokgen eş ise,

* Karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir.
* Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir.
* Çevre uzunlukları birbirine eşittir.
* Alanları birbirine eşittir.

* Eş çokgenlerin karşılıklı kenarlarına ait yükseklikleri, kenarortayları, açıortayları, çevreleri birbirine eşittir.



Karşılıklı açıların ölçüleri; Karşılıklı kenar uzunlukları;

$s(\hat{A}) = s(\hat{L})$ $|AB| = |KL|$

$s(\hat{B}) = s(\hat{K})$ $|BC| = |KM|$

$s(\hat{C}) = s(\hat{M})$ $|AC| = |LM|$

olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{LKM}$ 'dir.

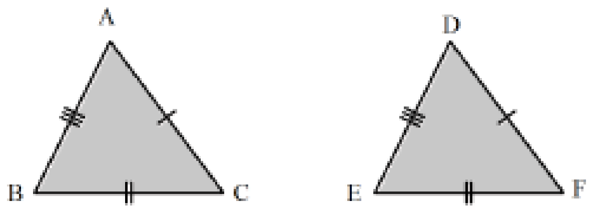
NOT:

Çokgenlerin eşliğini yazarken ortak açıyı gösteren harfler ve orantılı kenarlar aynı sırayla yazılmalıdır.

İKİ ÜÇGENİN EŞ OLDUĞU NASIL BELİRLENİR ?

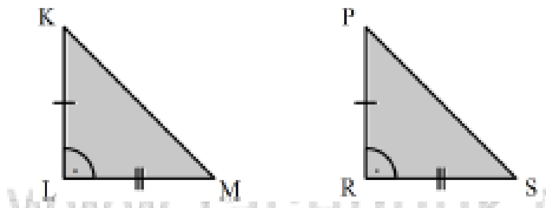
Eğer karşılaştırılan üçgenlerin;

- Üç kenar uzunluğu aynı ise,



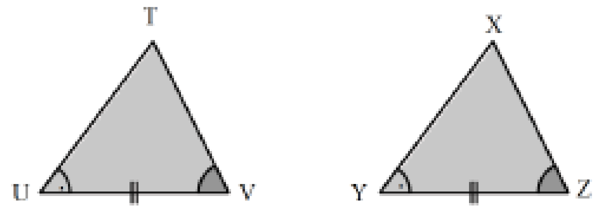
$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$

- Ardışık iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arası açıları aynı ise,



$\overset{\Delta}{KLM} \cong \overset{\Delta}{PRS}$

- Herhangi iki açısı ve bir kenar uzunluğu aynı ise,



$\overset{\Delta}{TUV} \cong \overset{\Delta}{XYZ}$

bu üçgenler eş üçgenlerdir.

!!! Bu özelliklerin üçgen çizimlerinde öğrendiğimiz üçgenin temel elemanları olduğuna dikkat ediniz.

Derleyen:YUSUF KPL

BENZERLİK

Bir şeklin ya da bir nesnenin belirli bir oranda büyültülmüşüne ya da küçültülmüşüne o şeklin **benzeri** denir.

Benzerlik sembolü ~ veya ≈ ile gösterilir.

A ve B birbirinin benzeri ise A~B veya A≈ B ile gösterilir ve "A benzerdir B" şeklinde okunur.

Bilgisayardaki bir resme bakmak için açtığımızda, resmi büyütüp küçültebiliriz.Resmi büyüttüğümüzde ve küçülttüğümüzde bilgisayarımız benzerlik ilkesine göre hareket eder; yani resimdeki nesnelerin bütün kısımları aynı oranda büyüyüp küçülür.

Yukarıdaki şekil Türk bayrağının belli bir oranda küçültülmüşü olan benzeridir.

ÇOKGENLERDE BENZERLİK

Eğer iki çokgen benzer ise,

* Karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir.

* Karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranı birbirine eşittir. Bu orana "benzerlik oranı" denir.

* Benzerlik oranı k ile gösterilir.

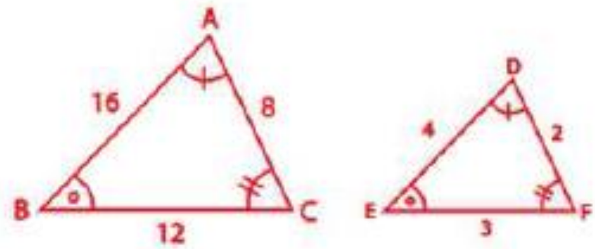
* Eş şekillerde benzerlik oranı 1'dir.

* Eş şekiller aynı zamanda benzer şekillerdir. Ancak benzer şekiller eş olmak zorunda değildir.

* Benzer çokgenlerin karşılıklı kenarları, yükseklikleri, kenarortayları, açıortayları, çevreleri oranı <u>benzerlik oranına</u> eşittir.

* Benzer çokgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

* Bütün düzgün çokgenler kendi türünde birbiri ile benzerdir.Örneğin tüm düzgün beşgenler birbiri ile benzerdir.



Karşılıklı eş açıların gördüğü kenarlar oranladığımızda;

$$\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|AC|}{|DF|}=\frac{16}{4}=\frac{12}{3}=\frac{8}{2}=4 \text{ (Benzerlik oranı)}$$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ 'dir.

NOT:

Çokgenlerin benzerliğini yazarken ortak açıyı gösteren harfler ve orantılı kenarlar aynı sırayla yazılmalıdır.

DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE *<u>ÖTELEME</u>*

X(Apsis) → **SAĞA** öteleme de **ARTAR,**
SOLA öteleme de **AZALIR.**

Y(Ordinat)→ **YUKARI** öteleme de **ARTAR,**
AŞAĞI öteleme de **AZALIR.**

DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE *<u>YANSIMA</u>*

<u>X Eksenine göre yansıma;</u>

X değişmez, Y'nin işareti değişir→ (x , y) → (x , -y)
(x , -y) → (x , y)

<u>Y Eksenine göre yansıma;</u>

Y değişmez, X'nin işareti değişir→ (x , y) → (-x , y)
(-x , y) → (x , y)

<u>Orijine göre yansıma;</u>

X ve Y işaret değiştirir →(x , y) → (-x, -y)

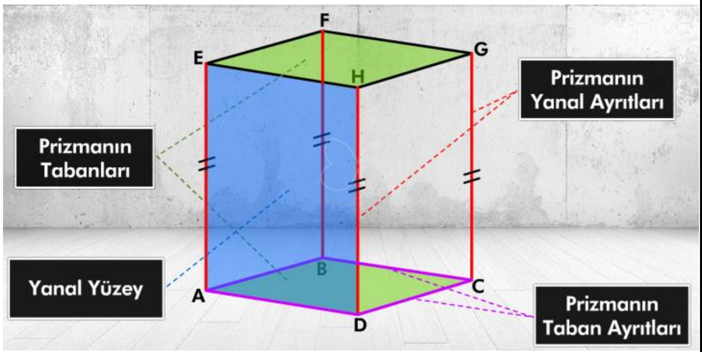
ÖTELEMELİ YANSIMA

Bir şeklin veya nesnenin bir doğru boyunca yansımasından sonra ötelenişi veya ötelenişinden sonra yansıması alınıyorsa ötelemeli yansıma hareketi vardır.

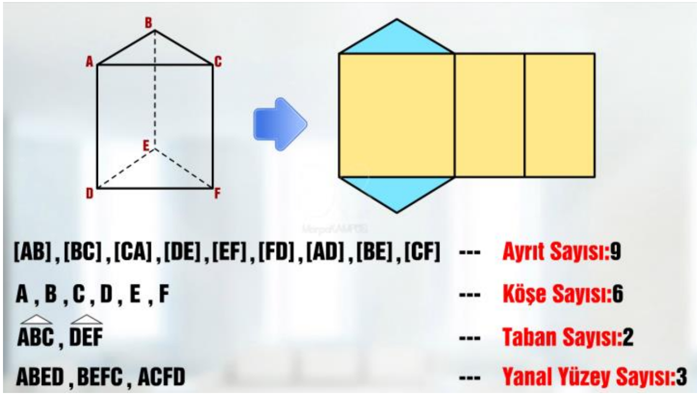
Derleyen:YUSUF KPL

DİK PRİZMALAR VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

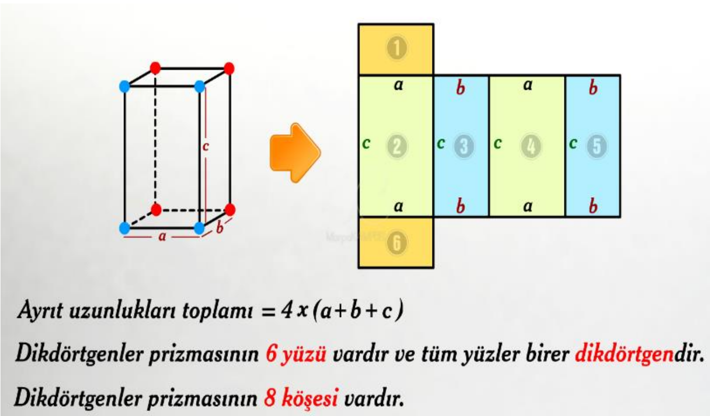
Prizmalar tabanlarına göre isimlendirilir.



ÜÇGEN PRİZMA

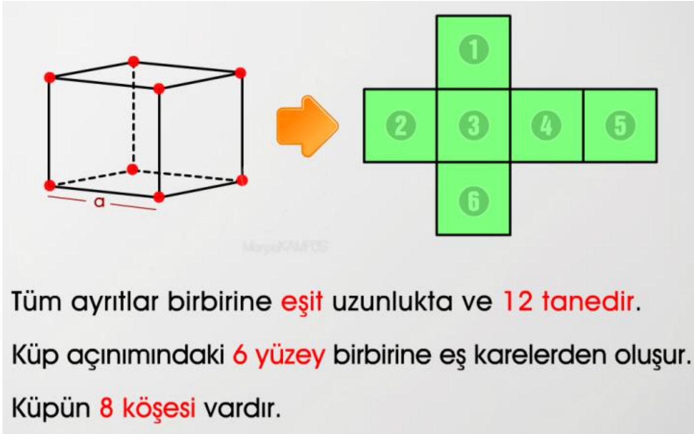


DİKDÖRTGEN PRİZMA



KARE DİK PRİZMA

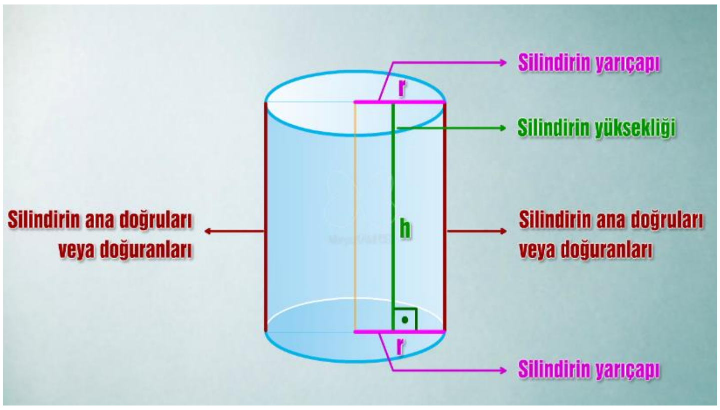
KÜP

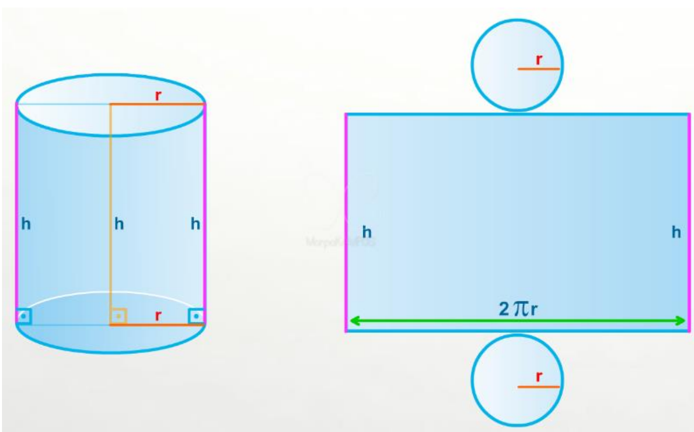


Prizmanın tabanındaki çokgenin kenar sayısına “n” denirse;

KENAR SAYISI	KÖŞE SAYISI	AYRIT SAYISI	YÜZEY SAYISI
n	2n	3n	n+2
5	10	15	7

DİK DAİRESEL SİLİNDİR



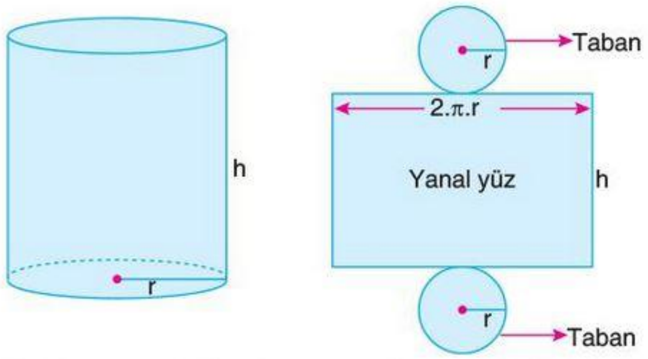


Derleyen:YUSUF KPL

SİLİNDİRİN YÜZEY ALANI

Çapı R ve yarıçapı 2r olan dairenin çevre uzunluğu

$$\pi.R = 2.\pi.r$$



Bir dik dairesel silindirin açınımı, iki eş daire ile bir dikdörtgensel bölgeden oluşmaktadır.

$$Yanal Alan = 2.\pi.r.h$$

$$Yüzey\ Alanı(Tüm\ Alan) = 2.\pi.r.(h+r)$$

$$veya$$

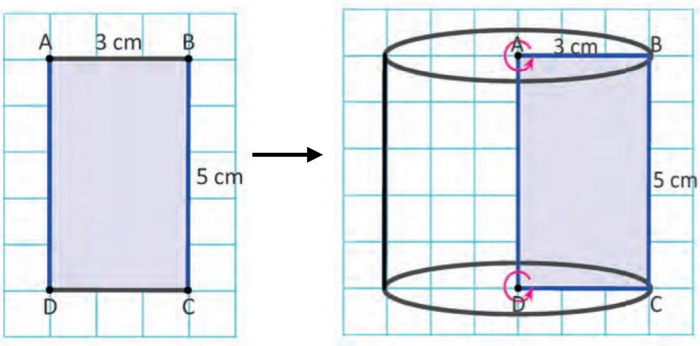
$$2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$$

NOT: π sayısının yaklaşık değerininverilmediği sorularda π 'nin sayısal değeri yerine "π" kullanılır.

NOT: Bir dikdörtgen uzun veya kısa kenarı etrafında 360º döndürülürse bir silindir oluşur.

Hangi kenarı etrafında döndürülürse o kenar yükseklik olur diğer kenar ise yarıçap olur.

Örnek:



SİLİNDİRİN HACMİ (V)

$$V = Taban\ Alanı.Yükseklik$$

$$V = \pi.r^2.h$$

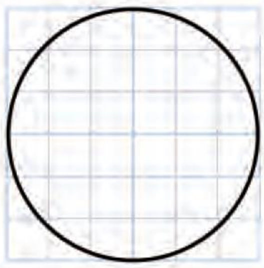
Örnek: Taban yarıçapı 4 cm, yüksekliği 5 cm olan silindirin hacmini bulalım. ($\pi = 3$)

$$V = \pi.r^2.h$$

$V = 3.4^2.5 = 3.16.5 = 240\ cm^3$

NOT: Dik dairesel silindirin hacmini bulmaya yönelik tahmin yaparken dik prizmaların hacimlerinden yararlanılır. Dairenin zeminde kapladığı alanı tahmin edip yükseklikle çarptığımızda tahmini hacmi buluruz.

Örnek: Aşağıda kareli zeminde tabanı verilen ve yüksekliği 10 br olan dik dairesel silindirin hacmini tahmin edelim.



16 tane tam kare, 20 tane de bölünmüş kare vardır.
Tahmini taban alanı 28 br^2
Tahmini hacim
V = Taban alanı · Yükseklik
V = 28 · 10 = 280 br^3 olur.