Problem -1

$n \in N^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n)$ olsun.

$f(n) \geq 0$ olacağı açıktır.

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n) \Rightarrow 1 + n = \left[1 + f(n)\right]^n$

Sağ tarafı Binom Teoremine göre açalım:

$$1 + n = 1 + n \cdot f(n) + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot \left[f(n)\right]^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow 1 + n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left[f(n)\right]^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[f(n)\right]^2 \leq \frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(0) \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^2 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n} = 1$ bulunur.

Bu sonucu problemimizin çözümünde kullanalım:

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

elde edilir.

Problem -2

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

1. yol

$n \in N^+$ olmak üzere,

$n \leq x \leq n+1$ olsun.

Her n değeri için,

$\sqrt[n]{n} > 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ olması,

en azından n'nin büyük değerleri için,

$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$

sıralamasını yapmamıza olanak verir.

$$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$

Buradaki, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = e^0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ bulunur.

3. yol (Dönüşüm ile)

$x = 2t$ dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to\infty} (2t)^{\left(\frac{1}{2t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} (2)^{\left(\frac{1}{2t}\right)} \cdot \left[\lim_{t\to\infty} t^{\left(\frac{1}{t}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 \cdot L^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$\Rightarrow L = \sqrt{L}$

$\Rightarrow L = 0$ veya $L = 1$ bulunur.

$x \geq 1 \Rightarrow x^{\left(\frac{1}{x}\right)} \geq 1$ olup $L = 1$ seçilir.

$\lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$ olur.

Problem -3

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim_{x\to 0^+} x^x$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım.

x, 0'a sağdan yaklaşırken

t, $+\infty$'a ıraksayacaktır.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\left(\frac{1}{t}\right)}} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} t^{\left(\frac{1}{t}\right)}}$$

Problem-2'nin sonucunu kullanarak;

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

elde edilir.

2. yol

$\lim_{x\to 0^+} x^x = L$ deyip $x = 2t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = L$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t\to 0^+} (2t)^{2t} = \lim_{t\to 0^+} \left(2^{2t} \cdot t^{2t}\right)$$

$$= \left(\lim_{t\to 0^+} 4^t\right) \cdot \left(\lim_{t\to 0^+} t^t\right)^2$$

$\Rightarrow L = 1 \cdot L^2$

$\Rightarrow L = 0$ veya $L = 1$ bulunur.

$f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x}$ fonksiyonu, $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ aralığında azalandır.

O halde;

$L = \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$ olmalıdır.

3. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Buradaki, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} x^x = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -4

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

Burada bir belirsizlik yoktur.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = (+\infty)\cdot(-\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

olur.

Problem -5

$x \in R^+$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1 + x\cdot \ln x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \ln\left(x^x\right)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \left[1 + \ln\left(x^x\right)\right] \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = 1 \cdot +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty \quad \text{bulunur.}$$

2. yol

(L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1 + x\cdot \ln x}{x}\right)$$

Burada, L'Hospital kuralını doğrudan uygulayamayız. Çünkü; belirsizlik, $\dfrac{0}{0}$ ya da $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçiminde değildir. Kesrin payında $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. Dolayısıyla; uzatmadan, çözümü "1. yol" daki gibi tamamlamak daha uygun olur.

Problem -6

$\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\cdot \ln\left(x^2 - 1\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x - 1 = t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\cdot \ln\left(x^2 - 1\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} t\cdot \ln\left(t^2 + 2t\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \ln\left[t^t \cdot (t+2)^t\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \ln t^t + \lim_{t\to 0^+} \ln (t+2)^t$$

$$= \ln\left(\lim_{t\to 0^+} t^t\right) + \ln\left(\lim_{t\to 0^+} (t+2)^t\right)$$

$$= 0 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{\frac{1}{x-1}}=L$$

Burada, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$L=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x\cdot(x-1)}{x+1}=0$$

Problem -7

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ diyelim:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2x^2};$$

$2\sin^2\frac{x}{2}=t$ dönüşümü yaparsak,

$x=2\cdot\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}$ olur.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L=L=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\frac{1}{t}\cdot\ln(1-t)}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{t}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}\cdot\lim_{t\to 0}\ln\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

Soldaki limit için $u=\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}$ dönüşümü yaparsak, $t=2\sin^2 u$ olur.

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2 u}{8\cdot u^2}\cdot\ln\lim_{t\to 0}\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(e^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow L=-\frac{1}{4}$$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{4x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=-\frac{1}{4}$$ bulunur.

Problem -8

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{\cos x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x - \frac{\pi}{2} = t$ diyelim.

$y = t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \Rightarrow \ln y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cdot \ln t$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(-\sin t \cdot \ln t \right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(\frac{-\sin t}{t} \cdot t \cdot \ln t \right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{-\sin t}{t} \cdot \lim\limits_{t \to 0^+} \ln t^t$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = -1 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} y = e^0 = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{\cos x} = 1$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$x - \frac{\pi}{2} = t$ diyelim.

$y = t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$

$\Rightarrow \ln y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cdot \ln t$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(-\sin t \cdot \ln t \right)$

Burada, $0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürelim:

$\lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(\frac{-\ln t}{\frac{1}{\sin t}} \right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(\frac{-\frac{1}{t}}{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}} \right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{\cos t} = 1 \cdot 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} y = e^0 = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{\cos x} = 1$ bulunur.

Problem -9

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot\ln t}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{t}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{1}{t-1}\cdot\ln t}$$
$$=2\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\ln(1+t-1)^{\frac{1}{t-1}}}$$
$$=2 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -10

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}_{1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$e^x-1=t$ dönüşümü yapalım:

$x=\ln(1+t)$ olur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=\frac{1}{\ln e}$$
$$=1 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -11

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot \ln t}$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{t}\cdot \lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{1}{t-1}\cdot \ln t}$$

$$= 2\cdot \lim_{t\to 1}\frac{1}{\ln(1+t-1)^{\frac{1}{t-1}}}$$

$= 2$ bulunur.

2. yol (L’Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -12

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\ln(x^2-1)}$ değerini bulunuz.

Çözüm

Bir belirsizlik yoktur. $\left(\dfrac{0^+}{-\infty}\right)$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\ln(x^2-1)} = 0$$

Problem -13

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln(x-1)+\ln(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\ln 2}{-\infty}}$$

$$= 1$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{2x}$$
$$= 1$$

Problem -14

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$1-\sqrt{x} = t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1-t)^2}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\cdot \ln(1-t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= -\frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}$$
$$= -\frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -15

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$e^{\tan x} - 1 = t$ dönüşümü yapalım.

$\tan x = \ln(1+t)$ olur.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{\tan x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= 1 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{\tan x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\tan x}\cdot(1+\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \left(e^{\tan x}\right)$$
$$= 1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -16

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}}_{1}$$

$e^{2x}-1=t$ dönüşümü yapalım.

$x=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+t)$ olur.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\frac{1}{2}\cdot\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=2 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot e^{2x}}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=2 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -17

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}}_{1}$$

$e^{x}=t$ dönüşümü yaparsak $x=\ln t$ olur.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{t^4-t^3}{\ln t}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{t^3}{\ln t^{\left(\frac{1}{t-1}\right)}}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{t^3}{\ln(1+t-1)^{\left(\frac{1}{t-1}\right)}}$$
$$=\frac{1}{\ln e}$$
$$=1 \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{4\cdot e^{4x}-3\cdot e^{3x}}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{\tan x}=1 \quad \text{bulunur.}$$

Problem -18

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+\cos \pi x}{1-x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+\cos \pi x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1+1+\cos \pi x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x+\cos \pi x}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-x^2} + \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x} + \lim_{x\to 1} \frac{2\cos^2 \frac{\pi}{2}x}{1-x^2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \lim_{x\to 1} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x^2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \lim_{x\to 1} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)\cdot(1+x)}$$

$$= \frac{-1}{2} + 2\cdot 1\cdot \frac{0\cdot \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+\cos \pi x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\pi\cdot \sin \pi x}{-2x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x+\cos \pi x}{1-x^2} = \frac{-1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -19

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{4x-\pi}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \cos\frac{\pi}{4}}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -20

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{6x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ eşitliğini kullanalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{6x^2\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{6x^2}\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{x^4}{16}$$

$=0$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)\cdot\sin x}{12\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{12}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$=0$ bulunur.

Problem -21

$\lim\limits_{x\to y}\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to y}\frac{\cos x-\cos y}{x-y}$$

$$=\lim_{x\to y}\frac{-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$=-\sin y$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

x'e göre türev alınır:

$$\lim_{x\to y}\frac{\cos x-\cos y}{x-y}=\lim_{x\to y}\frac{-\sin y}{1}$$

$=-\sin y$ bulunur.

Problem -22

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{x}+2}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}}^{L_1}+\overbrace{\lim_{x\to 0}(2)}^{2}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}(1)}_{1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}}$$

L_1 için, $e^x=t$ dönüşümü yapalım:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{t}}{\ln t}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot\ln t}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{t}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{1}{t-1}\cdot\ln t}$$

$$=2\cdot\lim_{t\to 1}\frac{1}{\ln(1+t-1)^{\frac{1}{t-1}}}$$

$=2$ olur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=\frac{2+2}{1+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=2$$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2x}{x+\sin x}=2$$ bulunur.

Problem -23

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x\cdot\sqrt{1+\cos x}}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{1+\cos x}\right)$$

$=-\sqrt{2}$ bulunur.

Problem -24

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin x}}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x\cdot\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\sqrt{1+\sin x}}{-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} (-2\cdot\sin x\cdot\sqrt{1+\sin x})$$

$$= -2\sqrt{2}$$

Problem -25

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left\{1-\left[1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{4\cdot x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 4\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$$

$$= \frac{3}{4}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{\sin 2x + x\cdot 2\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x}{2\cos x + \frac{x}{\sin x}\cdot 2\cos 2x}$$

$$= \frac{3}{4}$$ bulunur.

Problem -26

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+a}-\cos\sqrt{x}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+a}-\cos\sqrt{x}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{2}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left[-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}\right]\\
&=\lim_{x\to\infty}\left[-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\right]\\
&=\lim_{x\to\infty}\left[-2\sin\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\\
&=\ell\cdot 0\\
&=0
\end{aligned}$$

Problem -27

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x-\sin x}{x^3\cdot\cos x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\cdot\cos x}\\
&=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\cdot\cos x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\cos x}\\
&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Problem -28

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\cdot\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}}{2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\cdot\left|\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|}{2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2}}\\
&=\sqrt{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Problem -29

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ değerini bulununuz.

Çözüm

1. yol

$e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{t\to 1}\frac{t - \frac{1}{t} - 2\ln t}{(\ln t)^3} = L$$

Bir de $\sqrt{t} = u$ dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{t\to 1}\frac{t - \frac{1}{t} - 2\ln t}{(\ln t)^3}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{u\to 1}\frac{u^2 - \frac{1}{u^2} - 4\ln u}{8\cdot(\ln u)^3}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{u\to 1}\frac{u^2 - \frac{1}{u^2} - 2u + \frac{2}{u} + 2u - \frac{2}{u} - 4\ln u}{8\cdot(\ln u)^3}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{u\to 1}\frac{\left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u} - 2\right)}{8\cdot(\ln u)^3} + \frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 1}\frac{u - \frac{1}{u} - 2\ln u}{(\ln u)^3}$$

$$\Rightarrow L = \frac{(u+1)\cdot(u-1)^3}{8\cdot u^2\cdot(\ln u)^3} + \frac{1}{4}\cdot L$$

$$\Rightarrow L = \frac{u+1}{8\cdot u^2\cdot\left[\ln(1+u-1)^{\frac{1}{u-1}}\right]^3} + \frac{1}{4}\cdot L$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot L$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{3} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -30

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - 3\sin\frac{x}{3} + 4\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - 3\sin\frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

Eşitliğin soluna L deyip sağındaki ilk terimde de $x = 3t$ dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x - 3\sin\frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t\to 0}\frac{3t - 3\sin t}{27\cdot t^3} + \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{3}}{27\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{9}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{9}\cdot L + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{6} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=L$ deyip $x=2t$ dönüşümü yapalım:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{2t-\sin 2t}{8t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{2t-2\sin t\cdot\cos t}{8t^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t+\sin t-\sin t\cdot\cos t}{4t^3}$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cdot(1-\cos t)}{4t^3}$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot L+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cdot 2\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}{4t^3}$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot L+\frac{1}{8}$$

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ bulunur.

3. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

$=\dfrac{1}{6}$ bulunur.

Problem -31

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}}_{L_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}}_{L_2}$$

Problem-29'da $L_1=\dfrac{1}{3}$ ve Problem-30'da $L_2=6$ olduğunu bulmuştuk.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=L_1\cdot L_2$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2$ olur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

$=2$ olur.

Problem -32

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2-x^2}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sin^2 x-x^2}$$

Eşitliğin sağındaki ilk terimde $x=2t$ dönüşümü yapıp işlemin dağılma özelliğini uygulayalım:

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{t}-e^{-t}\right)^2-4t^2}{16\cdot t^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sin^2 x-x^2}$$

$$\Rightarrow L=\overbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^{-t}-2t}{t^3}}^{L_1}\cdot\overbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^{-t}+2t}{16\cdot t}}^{L_2}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-x}}^{L_3}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+x}}^{L_4}$$

Problem-29'dan $L_1=\dfrac{1}{3}$,

Problem-22'den $L_2=\dfrac{1}{4}$,

Problem-30'dan $L_3=-6$ olduğu görülür.

$$L_4=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\dfrac{\sin x}{x}}\right)=\frac{1}{2}\text{'dir.}$$

$$L=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-6)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\ \text{bulunur.}$$

2. yol

(L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2\sin x\cdot\cos x-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}$$

$$=-\frac{1}{4}\ \text{bulunur.}$$

Problem -33

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x=2t$ dönüşümü yapalım:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2t^2-\cos 2t}{16t^4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-\sin^2 t}{8t^4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{(t-\sin t)\cdot(t+\sin t)}{8t^4}$$

Burada; paydayı $t^2\cdot t^2$ diye ayırmak belirsizlikleri gidermez.
$t^3\cdot t$ biçiminde ayıralım.

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t-t)\cdot(\sin t+t)}{8t^4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+t}{8t}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\cdot\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{8t}+\lim_{t\to 0}\frac{t}{8t}\right]$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\quad\text{bulunur.}$$

Problem-30'dan $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t-t}{t^3}=-\dfrac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L=-\frac{1}{24}\quad\text{olur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{24x}$$

$$=-\frac{1}{24}\quad\text{bulunur.}$$

Problem -34

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-1\right)$$

$$=-1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\right)$$

Burada L'Hospital Kuralını hemen uygulamak işlemleri uzatır.
Parantez içini parçalayalım:

$$L=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x+\sin x}{\sin x}\right)$$
$$=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{x+\sin x}{\sin x}\right)$$
$$=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{3x^2}\right)\cdot1\cdot2$$
$$=-1+2\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{6\cdot x}\right)$$
$$=-\frac{2}{3}\quad \text{bulunur.}$$

2. yol

$$L=\lim_{x\to0}\left(\cot^2x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}-1\right)$$
$$=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\cdot\sin^2x}\right)$$

Parantez içini 1. yoldaki gibi parçalayalım:

$$L=-1+\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x+\sin x}{\sin x}\right);$$
$$L=-1+\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)}_{L_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x+\sin x}{\sin x}\right)}_{2}$$

Problem-29'dan $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L=-\frac{2}{3}\quad \text{olur.}$$

Problem -35

$$\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\quad \text{değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to1}\frac{x-1+1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}+\lim_{x\to1}\frac{-\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=-\frac{2}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{2\sin\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right]\cdot\cos\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$\Rightarrow L=-\frac{2}{\pi}\quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\quad \text{bulunur.}$$

Problem -36

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}\quad \text{değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos 2x}{x^3}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+x-x\cdot\cos 2x}{x^3}$$

$$\Rightarrow L=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}_{L_1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cdot\cos 2x}{x^3}}_{L_2}$$

Problem-29'dan $L_1=-\frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cdot\cos 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2$$

olup $L=\frac{11}{6}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x+2x\cdot\sin 2x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+4\cdot\sin 2x+4x\cdot\cos 2x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+12\cdot\cos 2x-8x\cdot\sin 2x}{6}$$

$$=\frac{11}{6}\quad \text{bulunur.}$$

Problem -37

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\quad \text{değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=L$$

$$\Rightarrow L=1+\underbrace{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)}_{L_1}$$

$x=t^2$ dönüşümü yapalım:

$$L_1=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2\cdot\ln t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2\cdot\ln t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{2\left(t^2-1\right)}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{\ln t}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot L_1$$

$$\Rightarrow L_1=-\frac{1}{2}\quad \text{olur.}$$

$L=1+L_1\Rightarrow L=\frac{1}{2}$ elde edilir.

2. yol (Fatih Sağlam)

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=L$ deyip

$x=\frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım:

$$L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}-\frac{1}{\ln\frac{1}{t}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\ln t}\right)$$

$$=-\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{\ln t}\right)$$

$$=1-\lim_{t\to 1}\left(1+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{\ln t}\right)$$

$$=1-\lim_{t\to 1}\left(\frac{t}{t-1}-\frac{1}{\ln t}\right)$$

$\Rightarrow L=1-L$

$\Rightarrow L=\frac{1}{2}$ olur.

3. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$=1+\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$$

$$=1+\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$$

Eşitliğin sağında $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=1+\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$

$$=1+\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$=\frac{1}{2}$ bulunur.

Problem -38

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\ln 3}{\ln x}-1}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\ln 3-\ln x}{(x-3)\cdot\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(3-x)}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{\ln x}$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(3-x)}}_{L_1}$$

$\frac{x}{3}=1+t$ dönüşümü yapalım:

$$L_1=\lim_{x\to 3}\frac{\ln\frac{x}{3}}{(3-x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{-3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-1}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

$L=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{-1}{3}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{-1}{\ln 27}$ bulunur.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\ln 3}{\ln x}-1}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\frac{-1}{x}\cdot\ln 3}{\ln^2 x}}{1}$$
$$=\frac{-1}{\ln 27}\quad\text{bulunur.}$$

Problem -39

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}\quad\text{değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{8}\right)\right]$$

$\frac{x^2-1}{8}=1+t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{8}\right)\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{9+8t}-3}\cdot\ln(1+t)\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\sqrt{9+8t}-3}\cdot\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t\left(\sqrt{9+8t}+3\right)}{8t}\cdot\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]$$
$$=\frac{3}{4}\quad\text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1}$$
$$=\frac{3}{4}\quad\text{bulunur.}$$

Problem -40

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}\quad\text{değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{x-3}}_{L_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}}_{L_2}$$

Problem-37'den $L_1=\frac{-1}{\ln 27}$,

Problem-38'den $L_2=\frac{4}{3}$ olduğu görülür.

$L=-\frac{4}{9\cdot\ln 3}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log_x 3-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\ln 3}{\ln x}-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\frac{-1}{x}\cdot\ln 3}{\ln^2 x}}{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$=-\frac{4}{9\cdot\ln 3}\quad \text{bulunur.}$$

Problem -41

$a\neq k\cdot\pi$ ve $k\in Z$ olmak üzere,

$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$y=\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\Rightarrow \ln y=\frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(\ln y)=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)\right]$$

$\frac{\sin x}{\sin a}=1+t$ dönüşümü yapılırsa;

$x=\operatorname{Arcsin}\left[(1+t)\cdot\sin a\right]$ olur.

$$\lim_{x\to a}(\ln y)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{\operatorname{Arcsin}\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}\cdot\ln(1+t)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t}{\operatorname{Arcsin}\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}\cdot\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}$$

$$=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{Arcsin}\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}}_{L}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}_{1}$$

L ifadesinde, t yerine x türünden değerini geri koyalım:

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{Arcsin}\left[(1+t)\cdot\sin a\right]-a}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\sin a}-1}{x-a}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\cdot\sin a}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{2\cdot\frac{x-a}{2}\cdot\sin a}$$

$$\Rightarrow L=\cot a\quad \text{bulunur.}$$

$\lim_{x\to a}(\ln y)=\cot a\ \Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^{\cot a}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y=\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(\ln y)=\lim_{x\to a}\frac{\ln(\sin x)-\ln(\sin a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln y=\cot a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^{\cot a}\quad \text{elde edilir.}$$

Problem -42

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$y = x^{\sin x}$

$\Rightarrow \ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right)$

$\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x \cdot \ln x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x) \cdot \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x) \cdot \dfrac{x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x^{x}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln y) = 1 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(y) = e^{0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right) = 1$ bulunur.

Not

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x} = 1$ olduğu, **Problem-3**'te ispatlanmıştı.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$y = x^{\sin x}$

$\Rightarrow \ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right)$

$\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x \qquad (x > 0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x \cdot \ln x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}\right) \qquad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-\sin x \cdot \sin x}{x \cdot \cos x}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-\sin x}{x}\right) \cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^{0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right) = 1$ bulunur.

Problem -43

$\lim_{x\to\pi^+} (\cot x)^{\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = (\cot x)^{\sin x}$$
$$\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln(\cot x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} \ln y = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\ln|\cos x| - \ln|\sin x|}{\frac{1}{\sin x}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} \ln y = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\ln(-\cos x) - \ln(-\sin x)}{\frac{1}{\sin x}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital Kuralını uygulayabiliriz.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} \ln y = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{(\sin x)^2}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} \ln y = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} \ln y = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} y = e^0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+} (\cot x)^{\sin x} = 1$$

2. yol (Dönüşüm ile)

$x = \pi + t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to\pi^+} (\cot x)^{\sin x}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} [\cot(\pi + t)]^{\sin(\pi+t)}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} [\cot(t)]^{-\sin(t)}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} [\cos(t)]^{-\sin(t)} \cdot \lim_{t\to 0^+} [\sin(t)]^{\sin(t)}$$
$$= 1 \cdot \lim_{t\to 0^+} [\sin(t)]^{\sin(t)}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} [\sin(t)]^{\sin(t)}$$

$\sin t = u$ dönüşümü yapalım:

$\lim_{t\to 0^+} (\sin t)^{\sin t} = \lim_{u\to 0^+} u^u = 1$ bulunur.

Not

$\lim_{u\to 0^+} u^u = 1$ olduğu, **Problem-3**'te ispatlanmıştı.

Problem -44

$$\lim_{x\to 2}\left[(3-x)^{\tan\frac{\pi x}{4}}\right]$$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y=(3-x)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\tan\frac{\pi x}{4}\cdot\ln(3-x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}(\ln y)=\lim_{x\to 2}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\lim_{x\to 2}\left[\frac{\ln(3-x)}{\cos\frac{\pi x}{4}}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}(\ln y)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\ln(3-x)}{\cos\frac{\pi x}{4}}\right]$$

$\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital Kuralını uygulayabiliriz:

$$\lim_{x\to 2}(\ln y)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\ln(3-x)}{\cos\frac{\pi x}{4}}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}(\ln y)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\ln(3-x)}{\cos\frac{\pi x}{4}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\frac{-1}{3-x}}{\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\sin\frac{\pi x}{4}\right)}\right]=\frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}(y)=e^{\frac{4}{\pi}}$$ bulunur.

2. yol (Dönüşüm ile)

$x=t+2$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 2}\left[(3-x)^{\tan\frac{\pi x}{4}}\right]=\lim_{t\to 0}\left[(1-t)^{\tan\frac{\pi(t+2)}{4}}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1-t)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot t\right)}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1-t)^{-\cot\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)}\right]$$

$$y=(1-t)^{-\cot\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)}$$

$$\Rightarrow \ln y=-\cot\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)\cdot\ln(1-t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}(\ln y)=\lim_{t\to 0}\left[-\cot\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)\cdot\frac{t}{t}\cdot\ln(1-t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)\right]$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right)}\right]$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\left[\ln(1-t)\right]^{\frac{1}{t}}$$

$$=(-1)\cdot\frac{4}{\pi}\cdot(-1)=\frac{4}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 2}\left[(3-x)^{\tan\frac{\pi x}{4}}\right]=e^{\frac{4}{\pi}}$$ bulunur.

Problem -45

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(x^2)} - e^{(x^3)}}{x^3 - \sin(x^2)}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - e^{(x^3)}}{x^3 - \sin(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[e^{(x^2)} \cdot \frac{1 - e^{(x^3 - x^2)}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^3 - \sin(x^2)} \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \left[e^{(x^2)} \right]}_{L_1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \left[\frac{1 - e^{(x^3 - x^2)}}{x^2} \right]}_{L_2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \left[\frac{x^2}{x^3 - \sin(x^2)} \right]}_{L_3}$$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \left[e^{(x^2)} \right] = e^0 = 1$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{(x^3 - x^2)}}{x^2}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{(x^3 - x^2)}}{x^3 - x^2}}_{L_4} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2}}_{L_5}$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3 - \sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}}$$

$$= -1$$

$$L_4 = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1 - e^{(x^3 - x^2)}}{x^3 - x^2} \right] = \lim_{t\to 0} \left[\frac{t}{\ln(1 - t)} \right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{\ln(1 - t)^{\left(\frac{1}{t}\right)}} \right] = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = -1$$

$$L_5 = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} (x - 1) = -1$$

Bulduğumuz değerleri yerlerine koyarsak;

$$L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = L_1 \cdot L_4 \cdot L_5 \cdot L_3$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$= -1 \quad \text{bulunur.}$$