

MATEMATİK

PROJE GELİŞTİRME PROGRAMI

PROJE ÖRNEKLERİ KİTABI

- ❖ Proje Hazırlama
 - Tübitak Ortaöğretim Araştırma Proje Yarışması
 - Salih Zeki Matematik Araştırma Proje Yarışması
- ❖ Ortaöğretim Proje Örnekleri
 - Bu Benim Eserim Proje Örnekleri
 - e-Twinning Proje Örneği
 - Diğer Proje Örnekleri

PROJE



ÖNSÖZ

Bu çalışma, Milli Eğitim Bakanlığı Özel Eğitim ve Rehberlik Genel Müdürlüğü Özel Yeteneklerin Geliştirilmesi Daire Başkanlığınca yürütülmüştür. Çalışmanın amacı, Bilim ve Sanat Merkezlerinde uygulanacak çerçeve planının oluşturulması, mevcut bilgi birikiminin ürünü olan örnek etkinliklerin derlenerek yazılı hale getirilmesi ve bu sayede kalıcı, erişilebilir ve paylaşıma açık olmalarını sağlamaktır. Bu çalışma etkinliklerin uygulayıcıları olan sizleri kısıtlamaktan ziyade, örnek teşkil etmesi ve rehber olması için bir araya getirilmiştir.

10 Nisan 2015’de Antalya’da başlayan ve 22 Temmuz 2017 Marmaris’te tamamlanan bu süreç boyunca toplam 9 çalıştay ile etkinlik kitapları yazılmış ve revize edilerek son halini almıştır. Bu süreçte matematik komisyon üyelerince pek çok yeni etkinlik hazırlanmış ve bu etkinliklere kitapta yer verilmiştir. Ayrıca, Bilim ve Sanat Merkezleri matematik öğretmenlerince gönderilen etkinlikler komisyon üyeleri tarafından, özgünlük ve BİLSEM mantığına uygunluk açısından değerlendirilmiş, BİLSEM program basamaklarına göre gruplandırılmıştır. Bu sayede tüm BİLSEM matematik öğretmenlerinin oluşturulacak etkinlik kitabında yer alarak sürece dâhil olması hedeflenmiştir. Yapılan çalıştaylarda etkinlikler zenginleştirilerek düzenlenmiş, ortak bir formatta hazır hale getirilmiştir.

Tüm program basamakları matematik komisyonu üyelerince modüler yapıda kurgulanmış, mevcut tüm etkinliklerin tasnif işlemi gerçekleştirilmiştir. Etkinlik kitapları DESTEK, BYF, ÖYG ve PROJE olmak üzere 4 kitap halinde hazırlanmış olup, BYF kitabı konu bütünlüğüne göre 3 ana alt başlıkta fasiküllendirilmiştir. Proje kitabında ise ulusal ve uluslararası yarışmalarda başarı elde etmiş örneklerle yer verilmiştir.

Tüm etkinliklerin sonuna değerlendirme aracı konmamıştır. Kitaptaki bazı etkinlikler için hazırlanan değerlendirme araçları, bütün kitapların sonuna örnek olarak yerleştirilmiştir. Meslektaşlarımızdan beklentimiz, değerlendirme araçları olmayan etkinlikler için uygun olanı seçmeleri ve gerekli maddeleri kendilerinin oluşturmalarıdır. Kitaplarda yer alan sorular için çözüm kitabı oluşturma fikri, kabul görmemiştir. Bu konuda BİLSEM öğretmenlerinin araştırmacı yapısı göz önünde bulundurularak, çözümlere ulaşabileceği düşünülmüştür.

Her ne kadar bu etkinlikler öğrencilerin yaş ve sınıf seviyeleri dikkate alınarak gruplandırılssa da, özel eğitimin amacı gereği her bir etkinlik öğrenci ve grupların hazır bulunuşluk, bireysel yetenek, ihtiyaç ve özelliklerine göre farklı programlardan seçilip farklılaştırılıp zenginleştirilebilir. Tüm yıl boyunca bu etkinliklerin tamamının uygulanma zorunluluğu olmayıp, mevcut etkinliklerden yıllık plan oluşturulabilir. Ancak kitaptaki etkinlikler haricinde dersinizde uyguladığınız etkinlikler mevcut ise, bu etkinlikleri ‘bilsem modülünde’ paylaşmanız gerekmektedir.

Bu çalışmanın amacı BİLSEM’lerde esnek bir modelden vazgeçerek özel eğitim felsefesine aykırı tek tip eğitim değil, sadece var olan bilgi birikiminin paylaşılması yolu ile yeni ufuklar açılmasına vesile olmaktır. Olması gereken etkinlikte birlik değil, uygulamada birlik fikridir.

Bu eserin ortaya çıkmasında katkı sunan: başta Bakanımız İsmet YILMAZ, Genel Müdürümüz Celil GÜNGÖR, Daire Başkanımız Oktay KILIÇ, Uzmanlarımız Hasan AKDENİZ ve Derya GÖĞSÜ olmak üzere Bakanlık bürokrat ve uzmanlarına, ilköğretim ve lise matematik koordinatörlerimize, komisyon üyelerine, çalışmalarda yer alan akademisyenlere ve çalışmaya etkinlik göndererek katkı sunan BİLSEM matematik öğretmenlerine şükranlarımızı sunarız.

Matematik Komisyonu

Çalıştay ve Katılımcıları

İsim Soyisim	Görev Yeri - Görevi	Antalya Çalıştayı - Nisan 2015	Mersin Çalıştayı - Mayıs 2015	Afyon Çalıştayı - Haziran 2015	Antalya Çalıştayı - Mart 2016	Manavgat Çalıştayı - Nisan 2016	Sincan Çalıştayı - Mayıs 2016	Manavgat Çalıştayı - Ağustos 2016	Çeşme Çalıştayı Mayıs-2017	Marmaris Çalıştayı Temmuz-2017
Sait ATLI	Diyarbakır Bilsem İlköğretim Matematik	X	X		X	X		X	X	X
Dr.Başak KÖK	İstanbul Bilsem Lise Matematik				X	X		X	X	X
Duygu ALYEŞİL KABAKÇI	Kocaeli İzmit Bilsem İlköğretim Matematik					X		X	X	X
Uğur KELEŞ	Yalova Atatürk Bilsem Lise Matematik				X	X		X	X	X
Gökhan KARAASLAN	Burdur Bilsem Lise Matematik					X		X		X
Ahmet ÖZLER	Konya Bilsem İlköğretim Matematik		X	X	X	X	X	X		
Ali FUAT URHAN	Eskişehir Bilsem Lise Matematik	X	X	X	X	X		X		X
Barış ARSLAN	Konya Bilsem Lise Matematik		X	X	X	X	X	X	X	
Mustafa AKAY	Erzurum Remzi Sakaoğlu Bilsem İlköğretim Matematik					X			X	X
Arzu TÜYBEK	Konya Selçuklu Bilsem İlköğretim Matematik					X		X		
Bengi KANAT ÇOŞKUN	Manisa Bilsem Lise Matematik					X		X	X	
Meryem ÇILDIR	Balıkesir Bilsem İlköğretim Matematik								X	
Yalçın SANDALCI	Rize Fatma Nuri Erkan İlköğretim Matematik								X	
Ayşe ŞİMŞEK	Burdur Bilsem İlköğretim Matematik								X	X
Leyla TABARU KALEM	İzmir Sıdika Akdemir Bilsem İlköğretim Matematik	X				X				
Murat CEYLAN	Yozgat Yozgat Bilsem Lise Matematik					X				
Ayperi NESLIHAN GÖK	Manisa Salihli Bilsem İlköğretim Matematik	X				X				
Zeynep DENİZ KOÇAL	İzmir Sıdika Akdemir Bilsem Lise Matematik					X				
Dr.Burcu DURMAZ	Antalya Bilsem Lise Matematik	X	X	X						
Hilal KARAPAZAR	Eskişehir Emine-Emir Şahbaz Bilsem Lise Matematik		X	X						
Yrd. Doç. Savaş AKGÜL	Dumlupınar Üniversitesi Eğitim Fakültesi			X						
Serkan ARSLAN	Niğde Bilsem Akşemseddin Lise Matematik	X	X							
Dr. Ali İHSAN BORAN	Malatya Bilsem Lise Matematik Öğretmen		X							
İlker KOZA	Kahramanmaraş Bilsem Lise Matematik		X							
Kamil YILMAZ	Kırşehir Yusuf Demir Bilsem İlköğretim Matematik		X							
Derya ATMACA	İlköğretim Matematik	X								
Hakan KORKMAZ	Kars Fahrettin Kırzioğlu Bilsem Lise Matematik	X								
Hicret KAYA	Sivas Bilsem İlköğretim Lise Matematik	X								
Mehmet Ziya ÇETİN	Çorum Bilsem Lise Matematik	X								
Merve DOKGÖZ	Erzincan Bilsem İlköğretim Matematik	X								
Muhammed Sabir ONUR	Bingöl Bilsem Lise Matematik	X								
Murat Fazıl AKKOÇ	Kütahya Bilsem Lise Matematik	X								
Özlem Uysal GÖKCÜ	Balıkesir Bilsem İlköğretim Matematik	X								

İÇİNDEKİLER TABLOSU

PROJE HAZIRLAMA AŞAMALARI.....	1
SALİH ZEKİ MATEMATİK ARAŞTIRMA PROJELERİ BİLGİ METNİ	2
TÜBİTAK PROJE HAZIRLAMA DÖKÜMANLARI.....	5
PROJE REHBERİ.....	6
PROJE PLANI.....	18
PROJE ÖZET	19
PROJE RAPORU.....	20
ÖRNEK PROJE	24
ORTAÖĞRETİM PROJE ÖRNEKLERİ	33
PARÇALA BİRLEŞTİR ÜÇGEN YAP	34
IZGARA PROBLEMLERİ.....	42
FNP FM ŞARTININ ARAŞTIRILMASI	67
ÜÇGENLER VE ÜÇGENSEL SAYILAR.....	90
ÜÇ BOYUTLU AÇI	106
KARE, NOKTA, KARE	121
ÜÇGEN, KARE, KÜP VE GEOMETRİK DİZİLER.....	132
$n \times n$ BOYUTUNDA HER SAT. VE SÜT. TOPLAMI SABİT OLAN 0-1 MAT. SAYISI.....	173
İKİ FARKLI BİÇİMDE SAYMA.....	192
İLKÖĞRETİM PROJE ÖRNEKLERİ.....	209
BU BENİM ESERİM PROJE ÖRNEKLERİ	210
123D SAYMA METODU	220
ASAL EKLERSEM KARE OLUR MU?	221
KARE SAYILARI SEKİZE BÖLDÜK.....	226
ÖRÜNTÜLERİ GENELLEME YÖNTEMLERİ	230
LANE ÇAZ PAL SAYILARI.....	233
İZO ÜÇGEN ÖNERİSİ	237
TOPLAMSAL SAYILAR	240
ARDIŞIK KENARLI KARELERİN ÜÇGENLERİNİN İNCELENMESİ	245
ETWINNING.....	246
DİĞER PROJE ÖRNEKLERİ	260
SELÇUKLU VE İSLAM SÜSLEME SANATINDA DÜZLEMSEL SİMETRİ GRUPLARI	260
POZİTİF BÖLENLERİN SIRRI	268
SIFIRSIZ FAKTÖRİYEL.....	271
DÜZLEMDEKİ EŞ KARELER VE SAYMA YÖNTEMLERİ.....	275
ARDIŞIK SAYILARIN KUVVETLERİ TOPLAMINA FARKLI BİR BAKIŞ	283
EPRSA ŞİFRELEME	287
KUVVET HESAPLARINA FARKLI BİR YAKLAŞIM.....	290

Proje Hazırlama Aşamaları

- ❖ Salih Zeki Matematik Araştırma Proje Yarışması
- ❖ Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Proje Yarışması
 - Proje Rehberi
 - Proje Planı Şablonu
 - Proje Özeti Şablonuna
 - Proje Raporu Şablonuna
 - Proje Rehberi Matematik Proje Örneği

**SALİH ZEKİ
MATEMATİK
ARAŞTIRMA
PROJELERİ**

PROJE HAZIRLAMA REHBERİ

MATEMATİK ARAŞTIRMASI NASIL YAPILMALI?

Matematik araştırması yaparken öncelikle bir problem bulunmalıdır. Bulunan problemin neden ilginç olduğuna ilişkin verilerin olması, bu verilerin araştırmayı yapan öğrenciler tarafından iyi kavranmış olması projeyi anlamlı kılacaktır. Matematik projesi bir problemi çözemese de, o probleme odaklanmalı, problemin anlaşılmasına veya çözülmesine yönelik yöntemler, en azından hesaplar sunabilmelidir. Yeni yöntem sunabilmek bir projeyi standartların oldukça ötesine taşıyacaktır, ancak var olan bir yöntemin probleme uygulanması ve yeni bir hesap yapılması da projeyi derinleştirecektir. Özellikle, bambaşka bir amaç için üretilmiş bir yöntemin eldeki somut problem ile ilgili bir hesapta kullanılması fikri ve bu tür hesapların yapılması projeyi iyileştirecektir.

Sürecin başında problemin tamamına ilişkin bir şeyler söylemek genelde zordur. Bunun yerine problemi durumlara ayırmak ve bu durumların birinde veya birkaçında problemi çözmeye çalışmak, hesaplar yapmak ilk uygulanması gereken stratejidir. Örneğin, herhangi bir üçgen için ortaya atılan bir iddianın öncelikle ikizkenar veya eşkenar üçgenlerde kanıtlanmasına çalışılması öğretici olabilir.

Belirli sayıda örnek yapıp, bu örneklerden bir genellemeye varıldığında, bu genellemenin kanıtlanması ihmal edilmemelidir. Örnekleriniz ne kadar çok olsa da, iddianızı matematiksel olarak kanıtlamadığınız müddetçe, bu örnekler ortaya atılan iddiaya destek olmaktan öteye gitmez.

Bilinen bir matematiksel gerçeği başka bir yöntemle kanıtlamak veya çözümünü bilinen bir problemi yeni bir yöntemle çözmek her zaman ilginç değildir. Yeni kanıt veya çözüm daha basit ve daha kolay anlaşılır olmalıdır. Çok karmaşık yöntemler kullanarak elde ettiğiniz bir sonuç, bilinen basit bir matematiksel gerçekten kolaylıkla çıkarılabiliyor ise kullandığınız karmaşık yöntemler ve teoremin bir anlamı olmayacaktır.

Projeniz birden fazla küçük probleme çözüm sunan bir çalışma ise, ancak bütün bu problemlere yönelik ortak bir çözüm yöntemi öneriyorsa anlamlı olacaktır.

Projede neyi ne kadar yaptığınızı açıkça ifade etmek, yaptığınızdan daha fazlasının doğruluğunu iddia etmemek önemlidir. Problem ile ilgili çözülememiş, ama üzerinde uğraşmış noktalar da projenin bir parçası olarak değerlendirilebilir.

Probleme ilişkin literatür eksiksiz sunulmalıdır. Neyin literatürde olduğu, hangi katkının projeyi yapan öğrenciler tarafından yapıldığı açık bir biçimde ifade edilmelidir.

Matematik Projelerinin hazırlanabileceği bazı konu başlıkları:

1. **Sayılar Teorisi:** asal sayılar ve özellikleri, bölünebilme, modüler aritmetik, kriptoloji
2. **Fonksiyon Teorisi**
3. **Geometri ve Trigonometri,** Doğru, Üçgen, Dörtgen, Çember ve aralarındakigeometrik bağlantılar, Düzlem ve Uzay geometrisi, Altın oran, Fraktallar
4. **Eşitsizlikler,**

5. **Matematiksel modelleme** ve matematiğin gerçek yaşamdaki uygulamaları, değişim oranları, matematiksel tıp, matematiksel biyoloji, finans matematiği
6. **Olasılık ve kombinatorik**, saymanın temel prensibi, çizge kuramı, Pascal Üçgeni
7. **Matematik Tarihi.**

PROJE RAPORU

Hazırlayacağınız matematik proje raporu aşağıdaki bölümlerden oluşacaktır:

1. **Projenin Adı**
Projenin adı projeniz hakkında fikir verir nitelikte olmalıdır.
2. **Giriş ve Projenin Amacı**
Giriş bölümünde seçtiğiniz konuyu veya problemi tanıtabilir, konunuzu seçerken sizi nelerin motive ettiğini açıklayabilir ve projeniz ile varmak istediğiniz hedefi kısaca özetleyebilirsiniz.
3. **Ana Bölüm**
Projenizin tüm gelişimi bu bölümde yer almalıdır. Yazdıklarınızın matematiksel olarak tutarlı ve kolay takip edilir olmasına dikkat ediniz.
4. **Sonuçlar ve Tartışma**
Bu bölümde proje çalışmanız ile vardığınız sonuçları özetlemeli, hedefledikleriniz ile sonuçları karşılaştırmalısınız. Son olarak, eksik kalan noktalara dikkat çekebilir veya bir başka araştırmanın konusu olabilecek yeni sorular ortaya atabilirsiniz.
5. **Yararlanılan Kaynaklar**
Her bilimsel çalışmada olduğu gibi bu bölümde projenizi hazırlarken kullandığınız kaynakları eksiksiz olarak belirtmelisiniz.

PROJE ÖZETİ

Proje özetinizi projeniz hakkında doğru bir fikir verecek şekilde hazırlamalısınız. Proje özeti 250 kelimeyi aşmamalıdır. Proje Raporu ve Proje Özeti – Arial- yazı tipiyle -12 punto- ile yazılmalıdır.

SERĞİ

Matematik projeleri, üniversitelerin matematik bölümü öğretim üyeleri ile oluşturulacak seçici kurul tarafından değerlendirilecek ve ön elemeyi geçirecektir. Ön elemeyi geçen projeler sergilenmek üzere okulumuza davet edilecektir. Üç gün sürecek sergi ve projelerin sunulması sonucunda seçici kurul tarafından dereceye giren projeler belirlenecektir.

Sergilenmeye değer bulunan projeler için okulumuzda 120cmX160cm boyutunda panolar ayrılacaktır. Öğrenciler, projelerini anlattıkları bu boyuttaki posterler ile sergiye katılmalıdırlar. Öğrencilerin sergi sırasında proje raporunu da yanlarında bulundurmaları gerekmektedir. Sunum aşamasında ihtiyaç duyulan teknik destek verilecek olup yarışmacılar gerekli sunum gereçlerini beraberinde getireceklerdir.

TÜBİTAK

Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması

- ❖ Proje Rehberi
- ❖ Proje Planı Şablonu
- ❖ Proje Özeti Şablonuna
- ❖ Proje Raporu Şablonuna
- ❖ Proje Rehberi Matematik Proje
Örneği



TÜBİTAK

**47. ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİ
ARAŞTIRMA PROJELERİ YARIŞMASI
2016**

PROJE REHBERİ

BİLİM VE BİLİMSEL ARAŞTIRMA

Bilimsel araştırmaların amacı; yaşadığımız dünya hatta evren hakkında sorduğumuz sorulara cevap bulmaktır. Burada en önemli şeylerden biri hiç şüphesiz soru sormaktır. Soru sormak için ise gözlem yapmak gerekir. Yapılan gözlemler, bir problemin tespitini ya da bir olgunun neden-sonuç ilişkisinin sorgulanmasını sağlar. Dikkatimizi çeken şeyler de bizim **bilimsel gözlem** (deney ve ölçümler) yapmamıza ve bunun sonucunda **bilimsel açıklamalar** (hipotez, teori, kanun ve model) üretmemize yol açabilir.

Bilimsel gözlemler, soruların tanımlanabilmesi ve/veya/açıklanabilmesi için toplanan verilerden anlam çıkarabilmenizi sağlar. Örneğin, her seferinde sulamayı unuttuğunuz çiçeklerin solduğunu gördüğünüzde; “sulanmayan çiçeklerin solabileceği” şeklinde bir açıklama yapabilirsiniz. **Deneyin** amacı incelenen bir olayla ilgili veriler elde etmektir. Bu amaçla yapılabilecek en basit işlem gözlem yapmaktır. Deney sonunda soruların cevabını oluştururken, bir taraftan veri toplar diğer taraftan da veriler arasında olası ilişkiler kurarak kanıtlar/deliller bulabiliriz. Örneğin, çiçeklerin kaç gün sulanmadığında solduğunu merak ederseniz; bunun cevabını bulabilmek için farklı sürelerde susuz bırakılan çiçekleri karşılaştırabilirsiniz. Tabi ki, laboratuvarında yapılan deneyler dışında da gözlemler yaparız. Örneğin, karasineklerin kanat uzunluğunu merak ediyorsak kanatları ölçeriz. Böylece karasineklerin kanatlarının uzunluğu hakkında bilgi toplamış oluruz. Ölçümler, uzunluk, kütle, hacim, sıcaklık ve zaman gibi sayısal değerler (nicel değerler) verir. Bu değerler bize sorumuzun cevabını açıklamada kanıt oluşturabilir.

Bilimsel düşünceler/açıklamalar, bilimsel gözlemlerden elde ettiğimiz bulguları bir arada düşünüp aralarında anlamlı bir ilişki kurarak (ilişkisiz olduğunu da iddia edebiliriz) ürettiğimiz düşüncelerdir/açıklamalardır. Bu fikirler, bize sorduğumuz sorulara aradığımız cevapları vermede yardımcı olur. **Teori**, birçok gözlemin bir arada değerlendirilmesi sonunda yapılan açıklamaların arka planıdır. Yani kısaca yapılan açıklamaların sebebidir. Örneğin, Schleiden ve Schwann kendilerinden yaklaşık iki yüzyıl önce Robert Hooke ve Leeuwenhoek gibi bilim insanlarının hücre ile ilgili gözlemlerini tümevarım yöntemiyle bir genelleme yaparak Hücre Teorisi’nin (bütün canlılar hücrelerden oluşmuştur) temelini atmışlardır. Teoriler yeni gözlemlerle desteklenebilir ya da desteklenmeyebilir. Teoriler desteklenmediğinde ise kısmen ya da tamamen değiştirilirler. Zannedildiği gibi (kavram yanılgısı) teoriler yeteri kadar kanıtlarla desteklendiğinde kanunlara dönüşmezler. Üç yüz yıl sonra bile çürütülen/zayıflatılan teoriler vardır. **Kanun** ise, belirli koşullar altında gerçekleşen doğa olaylarının açıklanması ve bundan hareketle yapılan genellemelerdir. Örneğin, ‘Kütlenin Korunumu Yasası’ (Kimyasal reaksiyona giren maddelerin toplam kütlesi, reaksiyon sonucunda oluşan ürünlerin toplam kütlesine eşittir). Tıpkı teoriler gibi kanunlar da gözlem ve denemeler ile test edilmeye devam edilirler. Kanunlar genellenmiş bir açıklama olduklarından bugün, yarın veya daha sonraki bir zamanda genellemeye aykırı bir durumun ortaya çıkma ihtimali her zaman bulunmaktadır. Bilimsel modeller, sorularımızı cevaplarken yaptığımız açıklamaları ve çıkarımları destekleyen basit aynı zamanda somut tasarımlardır. Animasyonlar, simülasyonlar, matematik denklemleri, çizimler, üç boyutlu maketler modellere örnek olarak verilebilir. En iyi bilinen modellere “DNA Modeli”, “Atom Modeli” ve “Hücre Zarı Modelini” verebiliriz. Modeller, yeni bilgiler ve bilimsel düşünceler ortaya çıktıkça değişebilir.

Bilimsel araştırmalarda aşağıdaki işlemler yapılsa da, bunlar her zaman belirli bir sırada uygulanmaz. Örneğin bilimsel araştırma bir soruyla başlasa da, araştırma sürecinin ilerleyen zamanlarında da soru sorulmaya devam edilebilir.

- Soru sormak,
- Araştırma yapmak ve hipotez kurmak,
- Hipotezi test etmek (gözlem ve deney tasarlamak),
- Analiz yapmak ve sonuç çıkarmak,
- Sonuçları tartışmak,
- Yeni sorular sorarak yeni araştırmalar planlamak.

BİLİMSEL SORU SORMA

Bilimsel araştırmalar her zaman bir soru ile başlar. Örneğin, yapraklar neden sararır? Karın altından çiçeklerini

çıkartan bir kardelen görüp onunla ilgili bilgi toplarken okuduğunuz bilgiler sizin bir soru sormanıza neden olabilir. Köpekleri çok seven biri olarak onları kenelerden uzak tutmanın yollarını arayacak sorular sorabilirsiniz. Burada önemli olan sorunuzun mümkün olduğu kadar basit, açık ve sınırlı olmasıdır. Örneğin, kardelenin soğanlı bir bitki olduğunu, soğanlı bitkilerin süs bitkisi olarak kullanıldığını, soğanlarında alkaloidler içerdiğini, alkaloidlerin de ilaç yapımında kullanıldığını, soğanlarının doğadan toplanmasının yasak olduğunu, bir soğanın 3-5 yılda çiçek açabilecek boyuta ulaştığını öğrendiniz. Dolayısıyla ekonomik yönden değerli ve önemli bir bitki olduğunu düşündünüz. Sorunuz; kardeleni nasıl çoğaltırım? ise çoğaltma yöntemlerini; kardeleni *in vitro* koşullarda nasıl çoğaltabilirim? ise soğanlarda *in vitro* üretim tekniklerini; kardelenin *in vitro* üretiminde büyüme düzenleyicilerinin etkisi nedir? ise başka bir konuyu araştırırsınız. Sonunda kardelenin soğan yapraklarından *in vitro* koşullarda hızlı çoğaltımı için BAP ve NAA büyüme düzenleyicilerinin etkisi ne olur? şeklinde sorunun kapsamı daraltılabilir. Yani sorular araştırmaya yön verir. Aynı konuyla ilgili farklı birçok soru sorulabilir. Bu soruların cevabı sürecinde de çok farklı araştırmalar yapılarak farklı bilgilere ulaşılabilir. Burada sorunuzu, dolayısıyla araştırmanızı ne kadar sınırlandırırsanız bilgi, zaman, para ve işgücü bakımından o kadar üstesinden gelebilirsiniz. Her araştırma soru sorma ile başlıyor olsa da soruların kalitesi son derece önemlidir. Test edilebilir yani araştırılabilir ya da araştırmaya değer soru sormak önemlidir.

ARAŞTIRMA YAPMAK VE HİPOTEZ KURMAK

İlgilendiğiniz konu ile ilgili detaylı bir araştırma yapmalısınız. Bunun için öğretmeninizden size rehberlik etmesini isteyebilirsiniz. Araştırma konunuz hakkında daha önce neler yapılmış, sizin yapmayı düşündüğünüz deneyler yapılmış mı? Sonuçları ne olmuş? Bunları öğrendiğinizde özgün bir deney planlayabilirsiniz. Daha önce yapılan araştırmalarla sizin planladığınız araştırmanın benzer ve farklı yanlarını bilmeniz araştırmanızın özgünlüğünü ortaya koymanızda yardımcı olur.

Sorunuzun tahmini cevabını hipotez cümlesi haline getirmelisiniz. Fakat hipotez bir tahmin değildir. Tahmin veriye dayalı olmayan açıklama iken, hipotez az ya da çok veriye dayalı açıklamadır. Bir konuyla ilgili kurulan güçlü hipotezlerin en önemli özelliği çok sayıda veriden çıkarılmış olmasıdır. Hipotezlerin en önemli özelliği test edilebilir olmasıdır. Her deneyin açık (yazılı) veya saklı (zihinde) bir hipotezi vardır. Hipotezler gözlem ve deneylerle denetlenir. İki tip hipotez cümlesi kurabiliriz. Örneğin, 'BAP ve NAA büyüme düzenleyicilerinin birlikte kullanılması kardelenin soğan yapraklarında *in vitro* hızlı çoğaltımı arttırmamıştır' hipotezi, **sıfır hipotez** olarak adlandırılır. Yani sıfır hipotezi uygulamalar arasında bir fark olmadığını iddia eder. Bu iddiayı ortaya atabilmek için daha önceki bazı veriler veya deneyimler kullanılabilir. Aksi bir durum ortaya konmadığı sürece hipotez geçerli olarak kabul edilir. Bir de sıfır hipotezin tersini söyleyen hipotez vardır buna da **alternatif hipotez** denir. Örneğin, 'BAP ve NAA büyüme düzenleyicilerinin birlikte kullanılması kardelenin soğan yapraklarında *in vitro* hızlı çoğaltımı arttırmıştır.'

Hipotezi Test Etmek (gözlem ve deney tasarlamak)

Tasarladığınız deney ya da gözlem yalnızca hipotezinize cevap verecek şekilde planlanmalıdır. Öncelikle deneyde kullanılacak değişkenlerin belirlenmesi gerekir. Bir deneyde değiştirebildiğimiz ya da kontrol altında tutabildiğimiz faktörlere **değişken** denir. Örneğin, kardelen bitkisi ile yapılan deneyde; değişkenler bitki büyüme düzenleyicilerin (BAP ve NAA) birlikte, farklı dozlarda kullanılmalarıdır. Yani deneyin sonucunu etkileyen uygulamalar değişkenleri oluşturur.

Bilimsel araştırmalarda üç tip değişken vardır;

- 1- Bağımsız değişken; bilimsel bir çalışmada deneyin sonucuna etki edebilen yani sebep olan değişkendir. Örneğin, sıcaklığın çözünürlüğe etkisi araştırılıyorsa, sıcaklık burada bağımsız değişkendir. Farklı sıcaklıklar denenir.
- 2- Bağımlı değişken; bilimsel bir çalışmada bağımsız değişkenden etkilenen yani sebep olan değişkendir. Örneğin, sıcaklıktan etkilenerek değişen çözünürlük miktarı. Sıcaklık arttıkça çözünürlük artar. Bağımlı değişken burada çözünürlüktür.
- 3- Kontrol değişken (kontrol grubu); araştırma sırasında kontrol edebildiğimiz sabit tutulan faktör.

Bir deneyi planlarken kontrol grubunun oluşturulması zorunluluktur. Değişkenlerin deneyin sonucunu etkileyip etkilemediği ve nasıl etkilediği ancak kontrol grubu ile karşılaştırılarak yapılabilir.

Deneylerden elde edilen verilerin hata payını azaltmak için tekrarlar yapılır. Bir deneyde alınan bir ölçüm en az üç kez tekrarlanır ve ortalaması alınır. Böylece, elde edilen verideki hata payı en aza indirgenir ve bu yolla verilerin güvenilirliği sağlanır.

Analiz Yapmak ve Sonuç Çıkarmak

Deney ve gözlem sonunda elde ettiğiniz tüm bilgiler **veri** olarak adlandırılır. Örneğin ölçüm aldığınız tüm boy uzunlukları (ortalama: 2,3 cm), saydığınız sürgünler (ortalama: 5 adet), gözlem sonuçları (renk değişimi, gaz çıkışı vb.) elde ettiğiniz verilerdir.

Verilerin düzenli bir şekilde tablolarda gösterilmesi, grafik haline getirilmesi, fotoğraflanması onları aralarında ve kontrole göre karşılaştırmaya ve anlamlandırmaya yardımcı olur. Böylece bu verilerden bir sonuç çıkarılabilir. Sunum sırasında aynı verilere ait hem tablo hem grafik verilmez, bunlardan hangisi sonucu en iyi ifade ediyorsa o tercih edilir.

Elde edilen matematiksel verilerden sonuç çıkarabilmek için veriler istatistiksel işlemlerden geçirilir. Örneğin, rakamların ortalaması, yüzdesi, frekansı alınır. Hatta ortalamaların karşılaştırıldığı istatistiksel analizler (t-testi, X^2 testi, varyans analizi, Duncan testi gibi) yapılır. Bunun için matematik öğretmeninizden size rehberlik etmesini isteyebilirsiniz. Tüm bunların amacı verileri anlamlandırırken hata payını en aza indirmektir. Böylece araştırmanın sonucuna olan güvenilirlik artar.

Gözlemlerden elde edilen kanıtlara dayalı yapılan açıklamalar araştırmanın sonucudur. Örneğin, 'Kardelen bitkisinin soğan yapraklarından *in vitro* hızlı çoğaltımı için 4 mg/l BAP ve 0,5 mg/l NAA büyüme düzenleyicilerinin birlikte kullanıldığı durumda en fazla sürgün sayısı (5 adet) elde edilmiştir' cümlesi araştırmanın sonuç cümlesidir. Elbette bunun yanında başka yan sonuçlara da ulaşılmış olabilir. Örneğin, büyüme düzenleyicilerinin tek başına kullanıldığında olumsuz etkileri ya da birinin azalıp diğerinin arttığı konsantrasyonlardaki değişimler de araştırmanın sonuçlarındandır.

Çıkarım, elde edilen veriler ve geçmiş deneyimler, sahip olunan bilgi düzeyi hatta yaşanan toplum değerleri (kültür), hayal gücü gibi pek çok faktörün birlikte etkilediği araştırmacının sonuçları yorumlamasıdır. İşte burada önemli bir noktayı gözden kaçırmamak gerekir. Aynı deneyi yapan bilim insanları aynı sonuçlara ulaştıkları halde farklı çıkarımlar yapabilirler. Farklı gözlem ve deneyleri yapan bilim insanları da aynı çıkarımları yapabilir. Çünkü, aynı sonuca ulaşmak için birden fazla bilimsel yöntem vardır. Bu nedenle araştırmaların sonuçları bilim dünyasının tartışmasına açıktır.

SONUÇLARI TARTIŞMAK

Gözlemler ve deneylerden elde edilen sonuçların başka araştırmacıların benzer araştırmalarda elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırılması önemlidir. Sonuçlarınız başka araştırmacıların sonuçları ile uyumlu ise araştırmanıza destek sağlamış olursunuz. Aynı zamanda, birbirini destekleyen araştırmalar daha genel sonuçlara ulaşılmasını sağlayabilir. Ters durumda yani araştırma sonuçlarınız başka araştırma sonuçlarından farklılık gösteriyorsa bunun nedenleri konusunda yeni tahminlerde bulunup, bu konuda yeni araştırmaların yapılma gerekliliğini vurgulayabilirsiniz. İkinci bir ihtimal ise araştırmanın herhangi bir yerinde hata yapılmış olmasıdır ki, böyle durumlarda araştırma planı ve uygulama yeniden gözden geçirilmelidir.

YENİ SORULAR SORARAK YENİ ARAŞTIRMALAR PLANLAMAK

Her araştırmanın sonunda araştırmacı yeni sorular sorar. Örneğin; Kardelen bitkisinin soğanının iç yaprakları ile dış yaprakları arasında *in vitro* hızlı çoğaltımda bir fark olur mu?

Kardelen bitkisinin soğan yapraklarından *in vitro* da hızlı çoğaltım için başka hangi büyüme düzenleyicileri etkili olur?

Kardelen bitkisinin yaprak sapı *in vitro* da hızlı çoğaltım için daha uygun olabilir mi?

Yeni sorular yeni araştırmaların planlanmasını sağlar. Araştırmacı araştırmasının sonunda bu yeni fikirleri öneri olarak sunar.

PROJE ÖZETİ NASIL YAZILIR?

Proje yapan her öğrenci araştırma özeti yazmalıdır. Özet kısa ve anlaşılır olmalıdır. Özeti tamamı 150-250 kelime arasında olmalıdır. Özeti okuyan, proje hakkında doğru bir fikre sahip olabilmelidir. Projenin ayrıntılarından, yorumlardan ve kaynaklardan özetle bahsedilmez. Ancak her birinden birkaç cümle ile bahsetmek şartı ile projenin amacı, kullanılan yöntem veya yöntemler, yapılan gözlem ve elde edilen bulgular (birincil olanlar), sonuçlar (birincil olanlar), ve öneriler başlıklarına değinilmelidir. **İdeal olan başlarken taslak bir özet oluşturup, çalışma bittiğinde proje raporunun içeriğine uygun bir şekilde özeti güncellemektir.**

ÖRNEK PROJE ÖZETİ

Proje Başlığı:

VİTİS ROTUNDİFOLİA MEYVELERİNİN KABUK VE ÇEKİRDEKLERİNİN UV-C'YE KARŞI KORUYUCU ETKİLERİNİN ARAŞTIRILMASI

UV-C ışınlarının oldukça zararlı etkileri bulunmaktadır. UV ışınlarından korunmak amacıyla üzüm kabuğu ve çekirdek özütlerinin mikroorganizmalar ile muamele edilerek koruyucu etkilerinin araştırılması amaçlanmıştır. Bu süreç sonucunda mikroorganizmaların üzüm kabuğu ve çekirdeği özütleri sayesinde UV' ye karşı korunum sağlanırsa, ayrıca kozmetik alanında da farklı bir alternatif alanı oluşturacaktır.

Mikroorganizmalar üzerine etki eden UV ışınlarının zararlı etkilerinin önüne geçmek amacıyla yapılan çalışmada; çalışma süresince Candida parapsilosis mikroorganizması kullanılmıştır. Candida parapsilosis mikroorganizması nutrient ve malt yeast sıvı besiyerlerine 2000g alınarak ekim yapıldı ve üzüm kabuğu ve çekirdek özütlerinden 1mg/1000g ve 0,5mg/1000g olmak üzere iki konsantrasyon kullanılarak besiyeri üzerine eklenmiştir. Candida parapsilosis test mikroorganizması 28 OC' de bir gün inkübasyona bırakılmıştır. Besiyerlerine ekim yapıldıktan sonra 30' ar dakika arayla 12 saat boyunca spektrofotometrik ölçümler alınarak standart büyüme eğrileri oluşturulmuştur.

Çalışma sonucunda, ölçülen spektrofotometrik ölçümler parabolik olarak artmış ve Candida parapsilosis mikroorganizmasının UV-C ışınlarına karşı koruyucu özelliği üzüm çekirdek özütünün sağladığı belirlenmiştir. Hem 10 dakikalık hem de 20 dakikalık UV ışınlarına maruz bırakılarak her iki deney grubunda da korunum sağlanmıştır.

Yapılan çalışmada üzüm çekirdeği özütünün UV - C ışınlarına karşı koruyucu özelliğinin olduğu tespit edilmiştir. Üzüm kabuğu özütü bulunan popülasyonlarda kontrol grubuyla benzer değerler göstermiş olup bu yüzden asıl koruyucu özelliğin üzüm çekirdeğinde olduğu tespit dılmıştır. Ayrıca üzüm çekirdeği popülasyon üzerinde üremeyi hızlandırıcı etkisinin olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vitis rotundifolia, UV-C, kabuk, çekirdek, koruyucu etki

BİLİMSEL ARAŞTIRMA PLANI NASIL YAZILIR?

Bilimsel araştırma, gözlemlenen bir olay veya düşünülen bir konu hakkında soru sormayla başlar. Bu konuda yapılan çalışmaların araştırılması (alanyazın taraması) ile devam eder; bilimsel olarak nitelenen bir yöntem ile elde edilen bir cevapla son bulur. Bu süreç başından sonuna kadar önceden planlanmalıdır. Planlama bir anlamda amaca ulaşmak için yapılacakların belirlenmesi ve sıralanmasıdır.

Bilimsel araştırma planı aşağıda verilen unsurlardan oluşur:

Å **Araştırma Konusu:** Araştırılacak olan konu bütün unsurları ile birlikte ayrıntılı olarak tanımlanır. Araştırma konusunun sınırları, cevabı aranan soruyu içerecek şekilde doğru olarak tanımlanmalıdır. Araştırma konusu genel olmamalı cevabı aranan soru ile sınırlı olmalıdır.

Å **Hipotez geliştirilmesi veya mühendislik hedefinin belirlenmesi:** Hipotez bir anlamda sorulan soruya

verilen bir cevap veya kestirimdir. Hipotezin bilimsel olabilmesi için doğruluğu veya yanlışlığı yapılacak araştırmayla sınırlanabilir olmalıdır. Eğer araştırma mühendislik içeriyorsa ulaşılmaya istenen hedefler kesin olarak belirlenmelidir.

Å Kullanılacak yöntem ve süreçlerin tanımı

- 1) **Süreçler:** Veri toplanmasında yapılacak işlemler veya veri elde etmek için tasarımılanan deney düzeneği tanıtılmalıdır.
- 2) **Veri analizi:** Araştırma sorusuna cevap teşkil edecek veya hipotezi doğrulayacak olan gözlem veya deney sonucu elde edilen verinin analiz edilmesinde kullanılan süreçler ve istatistiksel yöntemler açıklanmalıdır.
- 3) **Kaynaklar:** Alanyazın taraması neticesinde elde edilen ve araştırmada kullanılan bilgilerin kaynaklarına yapılan atıflardan oluşmalıdır.

Örnek Proje Planı

1. Amaç ve Kapsam: Tarihî koruma bilincinin oluşturulmaması, zamanın ve doğanın olumsuz etkilerinden dolayı kaybolmakta olan kültür mirasımız Silifke tarihî evleri üzerine bir araştırma yapılacaktır. Tarihî evlerin mimari özellikleri ele alınıp bu evlerdeki kültürel zenginlik ortaya çıkarılacaktır. Mimari yapının korunması ve gelecek kuşaklara aktarılması, temel amacımızdır.

2. Yöntem ve Gereçler: Alanyazın taraması kapsamında konu ile alakalı kitaplar, makaleler, tezler taranacaktır. Ardından bilgi toplamak amacıyla Silifke Müze Müdürlüğüne, İlçe Kültür Müdürlüğüne, Mimarlar Odasına ve Silifke Belediyesine gidilecektir. Mimarlar Odasından bu tarihî evlerin bulunduğu köy ve mahalle adları alınıp, muhtarlarla ve yöre halkıyla görüşülüp saha keşif gezileri yapılarak bu evler tespit edilip mimari özellikleri hakkında bilgi edinilecektir.

3. Kaynaklar: Proje çalışması kapsamında İzzet, Arslan, (1988), Silifke Tarihi, Adana, Doğan, Demirci, (2011),Isparta Evleri, Isparta, Silifke Belediyesi 30.Sokak üç yapı Restorasyonu ve cephe Sağıklaştırma projeleri Rölove, Restütisyon, Restorasyon Raporu,(2012) ,Ankara, Ahmet, Uçar, (2009),Temettuat Defterlerine Göre 19.y.y 'da Silifke, İstanbul, Candan Ülkü, , (Kasım 2005-Nisan 2006),''Silifke'de Panayot'un Evleri,Arkitekt Dergisi, sayı ;500 Candan ,Ülkü, (Kasım 2005-Nisan 2006),Bazı Örnekleriyle Silifke Evlerinde Ahşap Tavanlar, Silifke Müzesi Konferansları, Ayhan, Yalçın, (Kasım 2001)' ' Temettuat Defterine göre Silifke , yararlanacağımız kaynaklardır.

4. İş-Zaman Tablosu

İşin tanımı	Aylar									
	NİSAN	MAYIS	HAZİRAN	TEMMUZ	AĞUSTOS	EYLÜL	EKİM	KASIM	ARALIK	OCAK
LİTERATÜR TARAMASI	x	x	x	x	x	x				
VERİ TOPLANMASI	x	x	x	x	x	x	x	x		
ARAZİ ÇALIŞMASI				x		x	x	x	x	
PROJE RAPORU YAZIMI									x	x

PROJE RAPORU NASIL YAZILMALIDIR?

Gözlemlerin ve ölçüm sonuçlarının yazılarak kaydedilmesi ve bunların korunması bilimsel çalışmaların önemli bir kısmını oluşturur. Bilimsel çalışmaların bir başka önemli kısmı ise yapılan çalışmaların ve elde edilen sonuçların

yayınlanmasıdır. Yalnızca bu yolla elde edilen bilgiler başkalarına iletilebilir ve gelecek için korunup saklanabilir.

Yaptığınız proje çalışmasının en önemli aşamalarından birini onunla ilgili olarak yazacağınız proje raporu oluşturur. Proje raporunda gereksiz uzatmalar ve tekrarlar olmamalıdır. Raporunuzun olabildiğince kısa ve öz olması gerekir. Çalışmalarınız ile ilgili ne fazla ne de eksik bir şey yazmamaya gayret ediniz ve gerek yazım gerekse içerik olarak raporunuzun hazırlanmasına çok özen gösteriniz. Yaptığınız çalışmanın raporunuz aracılığı ile değerlendirileceğini her zaman aklınızda bulundurunuz.

Proje raporunuz bilimsel bir çalışmanın ürünüdür. Bu rapor bir problemi ortaya koyarak, problemin çözümü için gerekli ve geçerli verilerin neler olduğunu ileri sürüp tartışabilir veya problemi ortaya koyduktan sonra onun çözümü için izlenen yolu ve elde edilen verilerin değerlendirilmesi ile ulaşılan sonuçları ortaya çıkartabilir. Rapor başka araştırmacıların ulaştıkları sonuçlar ile ilgili fikirleri de içerebilir. Proje raporu başkaları tarafından ulaşılan sonuçların geçerliliğini, çelişkilerini ve başarısızlıklarını ortaya koyup yapılması gereken yeni çalışmaları önerebilir.

Proje raporunuzu mutlaka aşağıdaki sıraya göre yazınız. Bu sıralamaya, proje raporlarının standart olması için kesinlikle uyunuz. Bu standart yazım, proje çalışmanızın sağlıklı olarak değerlendirilmesinde ve gerektiğinde raporunuzun özetlenerek veya olduğu gibi kitap haline getirilmesinde hem size hem de raporunuzu okuyanlara büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

Proje raporunuzu şu sırada yazınız:

Proje Adı

Projenize tek bir cümle şeklinde; kısa ve öz olarak (mümkünse 12 kelimeyi geçmeyen); okuyana proje çalışması hakkında fikir verecek bir isim veriniz. İdeal olan başlarken taslak bir başlık oluşturup, çalışma bittiğinde proje raporunun içeriğine uygun bir şekilde başlığı güncellemektir.

İçindekiler

Projenizin ana başlık ve alt başlıklarının birbirine nasıl bağlı olduğunun gösterildiği belli bir düzende sıralanan ve bu başlıkların proje raporu içindeki sayfa numaralarını gösteren bir liste oluşturunuz.

1.Giriş

Bu bölüm; alanyazın taramasından sonra araştırmanın amacı, problem ve alt problemler, hipotezler ve alt hipotezler, varsayımlar (sayıltılar), sınırlılıklar, tanımlar alt başlıklarına yer verilecek olan bölümdür.

Burada alanyazın araştırması yaparken ve çalışmanızı desteklemek üzere alıntı yaparken proje çalışmanızın konusu ile ilgili başkalarının yaptığı çalışmalardan söz ediniz. Sizin çalışmanızın öteki benzer çalışmalardan ayrılan yönlerini belirtiniz. Bu çalışmayı, alanyazındaki hangi boşluğu doldurmak için yaptığınızı ve alanyazında yer alan benzer çalışmalardan neyi nasıl farklı yapacağınızı açıklayınız. Benzer çalışmalardan nasıl yararlandığınızı ve sizin çalışmanızın neleri hedeflediğini açıklayınız. Bu kısımda mutlaka bu şablonun sonunda belirtilen kurallara göre (Öncelikle proje rehberinde kendi branşınızda verilen örnek projedeki kurallara göre) kaynakça gösterimi yapınız. Alıntılarda intihal ya da aşırma yapmayınız. **Çalıntı cümleler içeren bir proje raporu veya kendisi çalıntı olan bir proje, internet üzerinden çalışan “intihal yazılım programları” ile tespit edilmektedir. Bu şekilde olan projeler tespit edilerek reddedilecek, proje sahibi öğrenci ve danışmanı bundan sonraki TÜBİTAK etkinliklerinden men edilerek bu durum okullarına yazı ile bildirilecektir.**

2. Yöntem

Bu bölümde aşağıdaki kısımlara ve alt başlıklara yer veriniz:

- Çalışmanın metodu veya araştırma deseni,
- Çalışma grubunuz, evreniniz, örneklemeniz (çalışmanızda kişilerden veri toplamışsanız), çalışma sahanız, yeriniz ve bunların özellikleri,
- Veri toplama araçlarınızın neler olduğu, onları siz geliştirdiyseniz bunu nasıl yaptığınızı ve veri toplama sürecinizi,
- Gözlemlerinizi, saha çalışmalarınızı ve bunları nasıl gerçekleştirdiğiniz, verileri nasıl analiz ettiğiniz ve bunun için hangi araç ya da yazılımları kullandığınızı,

- Deney düzenekleri, malzemeleri ve deneysel süreçleri (deneysel bir çalışma ise)

Deneysel çalışmalarda deney düzeneği, verilerin nasıl toplandığı açıkça anlatılmalıdır. Deney düzeneğindeki önemli ölçüm cihazlarının (ne olduğu, ölçüm aralığı, duyarlılığı vb.) kimyasal ve biyolojik malzemenin temel özellikleri belirtilmelidir. Örneğin bir voltmetre kullanılıyorsa bunun ölçme aralığı 2-220 V, 3,5 basamak göstergeli, iç impedansı 10 Mohm olan bir voltmetre olarak belirtilmesi, ya da optik özellikleri incelenen bir cam levhanın 25 mmx10 mmx1 mm boyutlarında, görünür bölgedeki ışığı geçiren bir cam plaka şeklinde tanımlanması uygun olacaktır.

- Deneylerin nerede, kimler tarafından yapıldığı, ne kadar sürdüğü ve kaç kez hangi koşullar altında tekrarlandığı gibi bilgilerin açık, öz ve anlaşılır bir şekilde verilmesi gerekir. Bu kısımda çalışılan laboratuvarın özellikleri de belirtilmelidir.
- Kullanılan analiz ve hesaplamalar bu bölümde verilmelidir.

3. Bulgular

Bu bölümde aşağıdaki kısımlara yer veriniz:

- Çalışmanızda topladığınız verilere ait bulguları açıkça belirtiniz.
- Belirttiğiniz bulguların amaçlarınızla örtüşmesine özen gösteriniz.
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. yollarla bulgularınızı olabildiğince nesnel ve yorum yapmadan sununuz.
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. ifadeleri mutlaka numaralandırıp her birini isimlendiriniz (bkz. Kendi branşınızdaki örnekler)
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. ifadelere yazdığınız metin içerisinden mutlaka atıfta bulununuz.
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. ifadelere metin içersinden atıf yaparken “aşağıdaki, yandaki, yukarıdaki vb.” ifadelerden **kaçınınız**. Bunun yerine “Tablo 2’de görüldüğü üzere.....” gibi daha açık ifadeler kullanınız.

4. Sonuç ve Tartışma

Proje raporunuzun en önemli kısımlarından birisi bu bölümdür. Proje çalışmanız ile elde ettiğiniz sonuçları bu kısımda yazınız.

- Sonuçlarınızı maddeler halinde yazabilirsiniz.
- Sonuçlarınız sayısal değerler, bazı matematiksel eşitlikler veya sözlü ifadeler olabilir. Geçerlilik sınırlarını belirterek sonuçlarınızı tartışınız.
- Sonuçları tartışırken alanyazında yer alan diğer çalışmalarla, sizin çalışmalarınızın benzer ve farklı sonuçlarını birlikte belirtiniz ve diğer çalışmalara atıfta bulununuz.
- Sonuçlarınızı olumsuz olarak etkileyen nedenler varsa açıklayınız. Bu kısmı yazmadan önce mutlaka çalışmanızın amacını tekrar gözden geçirerek amacınıza ne kadar ulaştığınızı belirtiniz.

5. Öneriler

- Bu kısımda teorik veya uygulama alanında “sadece sizin yaptığınız çalışmadaki bulgulara dayalı olarak” ne tür öneriler sunabilirsiniz?
- Konuyla ilgili önerilerinizi bu kısımda yazarak konuya ilgi duyup benzer çalışmalar yapacak olanlara yol gösteriniz.

Kaynakça

Bu kısmı oluştururken aslolan proje rehberinde yer alan kendi branşınızdaki örnek projenin kaynakça kısmındaki şablonu kullanmaktır. Orada belirtilmeyen ya da yer verilmeyen türdeki kaynaklardan alıntı yapmanız durumunda bu şablondaki alıntı biçimini kullanabilirsiniz.

Proje çalışmanız ile ilgili olarak başvurduğunuz yazılı kaynakları, eğer rapor içerisinde numara vererek atıfta bulunduysanız numara sırasına göre, yazar soyadına göre atıfta bulunduysanız alfabetik sıraya uygun olarak, yazar soyadına göre dizerek veriniz. **Metin içinde atıfta bulunmadığınız bir kaynağı buradaki listeye asla eklemeyiniz.**

Sadece gerçekten okunan kaynaklardan alıntı yapılmalıdır. Okunan bir kaynağın içerisinde geçen başka kaynaklar, kaynaklar bölümünde gösterilmemelidir. Eğer bu kaynakların mutlaka belirtilmesi gerekiyorsa, okunan kaynaktan aşağıdaki gibi alıntı yapılır. Kaynaklar listesinde de sadece okunan kaynak verilir. Örnek:

“Kent (Aktaran: Artvinli, 2009) yaptığı çalışmada iyi bir öğretmen olabilmenin aynı zamanda iyi bir “öğrenen”

olarak kalabilmekte saklı olduğunu, ancak insanların yeni bir şey öğrenme konusunda istekli ve hazır durumda kalmalarının zor olduğunu, bu nedenle sürekli “öğreten” durumundaki öğretmenlerden hizmet içi eğitimi önemseyenlerin sayısının önemli olduğu tespitini yapmaktadır”.

Birden fazla esere atıfta bulunuluyor ise kaynaklar alfabetik sıra ile verilmeli ve her kaynak arasına noktalı virgöl konulmalıdır. Örneğin; (Alim, 2003; Kaya, 2011; Özlü, 2013; Zerrin, 2015). Bir kaynağı mutlaka aşağıdaki örneklerle uygun olarak yazınız.

“Kaynakça” başlığa altında kaynakların gösterilmesi

Bu başlık altında kaynaklar alfabetik sıra içinde verilmelidir. Kaynakların “Kaynakça” başlığı altında gösterimi sırasında aşağıdaki biçime uyulmalıdır:

1-Eğer kaynak gösterme kongre/konferans bildirisiinden yapılmış ise:

Çağlar, E. (1998). Erkek hentbolcularda kendini fiziksel algılama ve kaygı düzeyi. 5. Uluslararası Spor Bilimleri Kongresi. 5-7 Kasım, Ankara.

2- Eğer kaynak gösterme “sürelî yayınlardan” (Dergilerde basılmış makaleler) yapılmış ise:

Karatay, H. (2015). Eleştirel Düşünme ve Okuma Alışkanlığı Becerilerinin Geliştirilmesi İçin Edebiyat Halkası: Kitap Eleştirisi Modeli, *Millî Eğitim Dergisi*, 44 (208), 6-17.

3- Eğer kaynak gösterme basılı “kitaplardan” yapılmış ise:

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metotlarına Giriş: Nitel, Nicel ve Eleştirel Kuram Metodolojileri*, Anı Yayıncılık, Ankara

4- Eğer kaynak gösterme “lisansüstü tezlerden” yapılmış ise:

Kaya, N. (2012). 1923-2008 Türkiye’de Coğrafya Öğretimi: Program, Ders Kitapları ve Öğretmen Eğitimi Boyutu (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

5- Eğer kaynak gösterme “kurumsal rapor veya yayınlardan” yapılmış ise:

Türkiye Sağlık Bakanlığı. (2014). *Türkiye Sağlık İstatistikleri Yıllığı 2013*. Sentez Matbaacılık ve Yayıncılık, Ankara
DİE (Devlet İstatistik Enstitüsü). (1995). *Türkiye İstatistik Yıllığı 1994*. DİE Matbaası, Ankara

6- Eğer kaynak gösterme “internet sitesindeki online yayınlardan” yapılmış ise:

Yazarın soyadı, Yazarın adının baş harfi. (Yayınlanma veya güncellenme yılı). *Başlık*. Cilt, Sayı, Sayfa no, Alınma tarihi, internet adresi

Kaya, N. (2015). Coğrafya Eğitiminde Aktif Öğrenme ve Öğrenci Merkezli Yaklaşım Tarihten İki Örnek, *Millî Eğitim Dergisi*, 44 (205), 150-169, Erişim tarihi: 12.10. 2015,
http://dhgm.meb.gov.tr/yayimlar/dergiler/Milli_Egitim_Dergisi/205.pdf

TÜBİTAK (2015). 46. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması Proje Rehberi 2015, Erişim tarihi: 12.11.2015, http://www.tubitak.gov.tr/sites/default/files/2204_proje_kitapcik.pdf

7- Eğer kaynak gösterme bir “ansiklopediden” yapılmış ise:

Akün, Ö. F. (1992). Divan edebiyatı. *Diyanet Vakfı İslâm Ansiklopedisi* (398-422). İstanbul: Türkiye Diyanet Vakfı.

8- Kişisel görüşmeden alıntı (amaçlı mülakatlar değil):

Kişisel görüşmeler metinde belirtilmeli fakat kaynakçada yer almamalıdır. (Demiral, H., kişisel görüşme, Eylül 2015).

9- Eğer kaynak gösterme bir “editörlü kitaptan” yapılmış ise:

Kitap içindeki bölüm yazarının, Soyadı, Adının ilk harfi (Yayın Yılı). Bölüm başlığı, kitabın başlığı, editör(ler): ad, soyad, yayınevi, sayfalar.

Artvinli, E.; Martinha, C. (2014). Coğrafya Müfredatında CBS: Türkiye ve Portekiz’in Karşılaştırılması, Avrupa’da Yenilikçi Coğrafi Öğrenme: 21. Yüzyıl için Yeni Zorluklar. Editörler: Rafael de Miguel González ve Karl Donert, Cambridge Scholars Publishing, 121-140.

10- Eğer kaynak gösterme “Gazete Makaleleri ve haberlerinden” yapılmış ise:

Yazarı Belli Gazete Makalesi veya Haberi:

Yazarın soyadı, Yazarın adının baş harfi. (Tam yayın tarihi-gün/ay/yıl). Makalenin adı. *Gazetenin Adı*. Sayfa aralığı, ülke. (internetten alındı ise ilave olarak)Erişim tarihi, web sitesi tam linki.

Yazarı Belli Olmayan Gazete Makalesi veya Haberi:

Makale veya haberin başlığı. (Tam yayın tarihi-gün/ay/yıl). *Gazetenin adı*, sayfa numarası, Ülke. (internetten alındı ise ilave olarak) Erişim tarihi, web sitesi tam linki.

11-Tek yazarlı kaynak gösterimi

Karademir, E. (2009). Fizikte kullanılan özel deney tasarımlarının uygulanması. *Ulusal Fizik Eğitimi Dergisi*, 5 (2), 171-189.

12-Çok yazarlı kaynak gösterimi

Karademir, E., Durmaz, A.; İleri, N. (2008). Cam yapıların dayanıklılık ölçümlerinin belirlenmesi. *Fizikte Özel Konular Dergisi*, 17 (3), 98-113.

Ekler

Ana metin içerisinde yer almaları halinde konuyu dağıtan veya çok uzun metinlerden oluşan, çeşitli araştırma bulgularına dayalı çok uzun tablolar, rakamlardan oluşan seriler veya bir işe ait genişletilmiş tablolar vb. EKLER bölümünde verilebilir. Ayrıca araştırmayı yapmak için alınan yasal izinler, yazışmalar, gerekirse e-posta örnekleri de burada gösterilmelidir. Bu tür eklerin her biri için uygun bir başlık seçilerek bunlar metin içerisinde geçiş sıralarına göre "Ek 1., Ek 2., Ek 3.,..." şeklinde, her biri ayrı bir sayfadan başlayacak şekilde yer almalıdır.

Proje özeti, planı ve raporunuza adınız, danışmanınızın adı, okulunuz, okul logosu, filigranı gibi projeyi kimin yazdığını ortaya çıkaracak bilgileri yazmak yasaktır ve projenin reddedilmesine yol açar.

PROJE SERGİSİ İÇİN BAZI YARARLI HATIRLATMALAR

Sergiye katılacak her öğrenciye projelerini sergilemek için gerekli alan sağlanacaktır. Serginin ana amacı yarışmacı öğrencilerin çalışmalarını sergiyi gezenlere anlatmasını sağlamaktır.

Proje çalışmanız ile ilgili fotoğraf, şekil, grafik ve yazıları sergiyi gezenlerin kolayca görüp izleyeceği şekilde ve büyüklükte pano üzerine yerleştirin. Yanınızda yapışkan bant, kalın yazan renkli kalem ve boş kağıtlar bulundurun. Sergi sırasında pano üzerine bazı eklemeler yapmayı isteyebilirsiniz. Panoyu düzenlerken her türlü özeni gösterin. Genel görünüşün sergiyi gezenler üzerinde etkili olacağını unutmayın.

Proje çalışmanızda kullandığınız düzeneği, alet ve cihazlarla yaptığınız uygulama modelini masa üzerinde sergileyiniz. Çalışan bir model üzerinde araştırmanızı görmek sergiyi gezenleri çok olumlu olarak etkileyecektir.

PROJE SEÇİMİ, İŞLENİŞİ VE SUNUMU İLE İLGİLİ ÖZET BİLGİLER

Değerli genç araştırmacılar, proje çalışması için sizi ilgilendiren ve motive eden bir konu seçin (konu orijinal, yeni ve en önemlisi size ait bir fikir olmalıdır).

Biraz merak, araştırma, uzmanlardan bilgi, kritik düşünce, yaratıcılık ve azim ekleyin.

Her zaman kazanamayabilir veya sonuç alamayabilirsiniz. Tabii ki hayal kırıklığı ve başarısızlık riski de vardır. Eğer bu başarısızlığa neyin neden olmuş olabileceği sorusunu sorup buna yanıt ararsanız bazen istediğiniz sonuca da ulaşabilirsiniz.

Burada önemli olan kazanmak değil, yeni ve çözülmemiş bir soruna el atmış ve onun çözümü için önerilerde bulunmuş olmanızdır.

Unutmayınız ki kimi zaman çok umut veren bir proje başarısızlıkla sonuçlanabileceği gibi, bazen de hiçbir sonuca ulaşmayacağı veya gerçekçi olmadığı düşünülen bir proje hiç öngörülmemiş olan başarılı sonuçlara ulaşılabilir.

Projeyi Çalışmasına Başlarken:

- 3 3 Konuyu seçin;
- 3 3 Konuyu inceleyin, araştırın;
- 3 3 Kendi araştıracağınız konuya karar verin;

- 3 3 Bir zaman çizelgesi hazırlayın;
- 3 3 Deneyleri planlayın;
- 3 3 Yardımcı öğretmeniniz ve danışmanınızla konuşun, tartışın ve fikirlerinizi alın;
- 3 3 Deneyleri yapın projeyi tamamlayın;
- 3 3 Sonuçları inceleyin ve tartışın.

Proje raporunun yazımında dikkate alınması gerekenler:

- 3 3 Proje başlığı,
- 3 3 İçindekiler,
- 3 3 Giriş,
- 3 3 Yöntem,
- 3 3 Bulgular,
- 3 3 Sonuç ve tartışma,
- 3 3 Öneriler

ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİ ARAŞTIRMA PROJELERİ YARIŞMASI İLE İLGİLİ JÜRİ DEĞERLENDİRME ÖLÇÜTLERİ

Jüriler, 'Ön değerlendirme (Proje planı ve rapor değerlendirme) sırasında aşağıda belirtilen ölçütlere uygun olarak (Bilgisayar ve Matematik projelerinde alana uygun bazı değişiklikler mevcuttur) değerlendirmelerini gerçekleştirmekte ve 1-5 ölçeği kullanılarak puanlama yapmaktadırlar. Bu ölçekte 1-yetersiz, 2-iyi değil, 3-orta, 4-iyi, 5-çok iyiye karşılık gelmektedir. Aynı alandaki projeler aldıkları puana göre sistem tarafından otomatik olarak sıralanmaktadır. O alana ayrılan kontenjan kadar proje aldığı puan dikkate alınarak bölge sergisine çağrılmaktadır. Bu nedenle projenizi tamamlamadan önce aşağıdaki ölçütleri dikkate alarak tekrar gözden geçiriniz. **Kopya olduğu belirlenen projeler değerlendirmeye alınmadan yarışma dışı bırakılmaktadır.**

Jüriler, 'Sergi Değerlendirmesi sırasında aşağıda belirtilen ölçütlere uygun olarak değerlendirmelerini gerçekleştirmektedirler. Özgünlük ve yaratıcılık ile kullanılan bilimsel yöntem her alan için en yüksek puanlanan ölçütleri oluşturmaktadır. Değerlendirme 100 puan üzerinden yapılmaktadır. Her jüri üyesi değerlendirmeyi ayrı yapmakta ve ortalama puan elde edilmektedir. Bu nedenle projenizi tamamlamadan önce aşağıdaki ölçütleri dikkate alarak tekrar gözden geçiriniz. **Tüm değerlendirmelerde jüri kararı kesindir.**

ÖZGÜNLÜK VE YARATICILIK:

- a) Proje, çözüme kavuşturulmak istenilen konuda yaratıcılık ve özgünlük taşıyor mu?
- b) Yaklaşım, çözüme yönelik mi?
- c) Verinin analizi ve yorumu özgün mü?
- d) Malzeme nasıl kullanılmış?

BİLİMSEL YÖNTEM:

Veri toplamada kullanılan örneklem (gözlem-ölçme-deneme)

1. Problem açık ve kesin olarak belirtilmiş mi?
2. Problem, bilimsel kurallar çerçevesinde sistematik bir anlam içermekte mi?
3. Çözüme ulaşmak için yöntemsel bir plan var mı?
4. Değişiklikler açıkça belirlenmiş ve tanımlanmış mı?
5. Eğer proje takip gerektiriyorsa, öğrenci/öğrenciler bu gerekliliğin farkında mı ve bu takibi doğru bir şekilde yapmışlar mı?
6. Sonucu destekleyecek yeterli veri var mı?

TUTARLILIK VE KATKI:

Proje sahibi öğrenci/öğrenciler, projenin geliştirilmesi sürecinde neden-sonuç ilişkisi kurarak projeye katkıda bulunmuşlar mı ve amaç-sonuç arasında tutarlılık var mı?

1. Yapılan araştırmaya bağlı bir proje gerçekleştirilebilmiş mi?
2. Projenin tamamlanması sürecinde gerçekleşen amaç ile ilk niyet arasında uyum var mı?
3. Sonuçlar, deneysel olarak ispatlanmış mı?

ÖZÜMSEME VE HÂKİMİYET:

- Proje sahibi öğrenci/öğrencilerin, sunum ile ilgili değerlendirme ölçütleri
 1. Proje, açıkça tartışılmış, amaç-prosedür ve sonuçları yeterli düzeyde açıklanmış mı? Bu noktada projenin temel amacından sapan ezberlenmiş sözler olup olmadığına dikkat edilmelidir.
 2. Projenin önemli noktaları sistematik bir şekilde sunuldu mu?
 3. Veri ne anlaşılabilirlikte sunuldu?
 4. Sonuçlar ne anlaşılabilirlikte sunuldu?
 5. Sunum ne açıklıkta yapıldı? Sunum sırasında herhangi bir hileye başvuruldu mu?
 6. Projenin hazırlanışında diğer kişi ve kurumlardan (rehber öğretmen, **laboratuvar**, üniversite.. vb.) ne ölçüde yardım alınmış?

UYGULANABİLİRLİK:

- Alanyazına yeni bir yöntem, metot kazandırıyor mu? / Gerçek hayatta kullanılabilir bir sonuç ortaya koyuyor mu?

KAYNAK TARAMASI:

Projenin amacına yönelik alanyazın taraması

1. Proje sahibi öğrenci/öğrenciler, yaptıkları araştırma ile ilgili bilimsel alanyazına hâkim mi?
2. Öğrenci/öğrenciler, kaynakları Proje Raporu içinde kullanmışlar mı?
3. Öğrenci/öğrenciler, kaynakları proje ile ilişkilendirmişler mi?

SONUÇ VE AÇIKLIK:

- Proje, sonuçlandırılmış ve verilere bağlı olarak açık bir şekilde izah edilmiş mi?

TÜBİTAK değerlendirme ölçütleri üzerinde değişiklik yapabilir.

PROJE PLANI

(Dikkat: Proje planınızı yazarken bu şablonu kullanabilirsiniz. Başlıkların altındaki açıklamaları okuduktan sonra onları silerek başlıkların altına kendi proje çalışmanıza ait planlamaları yazabilirsiniz).

Proje Başlığı:

1. Amaç ve Kapsam: Tarihî koruma bilincinin oluşturulamaması, zamanın ve doğanın olumsuz etkilerinden dolayı kaybolmakta olan kültür mirasımız Silifke tarihî evleri üzerine bir araştırma yapılacaktır. Tarihî evlerin mimari özellikleri ele alınıp bu evlerdeki kültürel zenginlik ortaya çıkarılacaktır. Mimari yapının korunması ve gelecek kuşaklara aktarılması, temel amacımızdır.

2. Yöntem ve Gereçler: Alanyazın taraması kapsamında konu ile alakalı kitaplar, makaleler, tezler taranacaktır. Ardından bilgi toplamak amacıyla Silifke Müze Müdürlüğüne, İlçe Kültür Müdürlüğüne, Mimarlar Odasına ve Silifke Belediyesine gidilecektir. Mimarlar Odasından bu tarihî evlerin bulunduğu köy ve mahalle adları alınıp, muhtarlarla ve yöre halkıyla görüşülüp saha keşif gezileri yapılarak bu evler tespit edilip mimari özellikleri hakkında bilgi edinilecektir.

3. Kaynaklar: Proje çalışması kapsamında İzzet, Arslan, (1988), Silifke Tarihi, Adana , Doğan, Demirci, (2011),Isparta Evleri, Isparta, Silifke Belediyesi 30.Sokak üç yapı Restorasyonu ve cephe Sağıklaştırma projeleri Rölove, Restütisyon, Restorasyon Raporu,(2012) ,Ankara, Ahmet, Uçar, (2009),Temettuat Defterlerine Göre 19.y.y 'da Silifke, İstanbul ,Candan Ülkü, , (Kasım 2005-Nisan 2006),''Silifke'de Panayot'un Evleri,Arkitekt Dergisi, sayı ;500 Candan ,Ülkü, (Kasım 2005-Nisan 2006),Bazı Örnekleriyle Silifke Evlerinde Ahşap Tavanlar, Silifke Müzesi Konferansları, Ayhan, Yalçın, (Kasım 2001)' ' Temettuat Defterine göre Silifke , yararlanacağımız kaynaklardır.

4. İş-Zaman Tablosu

İşin tanımı	Aylar									
	NİSAN	MAYIS	HAZİRAN	TEMMUZ	AĞUSTOS	EYLÜL	EKİM	KASIM	ARALIK	OCAK
LİTERATÜR TARAMASI	x	x	x	x	x	x				
VERİ TOPLANMASI	x	x	x	x	x	x	x	x		
ARAZİ ÇALIŞMASI				x		x	x	x	x	
PROJE RAPORU YAZIMI									x	x

Proje Başlığı:**Özet:**

Buraya projenizin bir özetini yazınız. Çünkü proje çalışması yapan her öğrenci araştırma özeti yazmalıdır. Özet kısa ve anlaşılır olmalıdır. Özeti tamamı 150 kelimeden az, 250 kelimeden fazla olmamalıdır. Özeti okuyan, proje hakkında doğru bir fikre sahip olabilmelidir. Projenin ayrıntılarından, yorumlardan ve kaynaklardan özetle bahsedilmez. Ancak her birinden birkaç cümle ile bahsetmek şartı ile projenin amacı ve önemi, kullanılan yöntem veya yöntemler, yapılan gözlem ve elde edilen bulgular (birincil olanlar), sonuçlar (birincil olanlar) ve öneriler başlıklarına değinilmelidir. İdeal olan başlarken taslak bir özet oluşturup, çalışma bittiğinde proje raporunun içeriğine uygun bir şekilde özeti güncellemektir. Özeti bu şablona kopyalayarak 1-2 paragraflık 150-250 kelime arasında, Times New Roman karakterleriyle, 12 punto, her iki yana yaslı olarak yazabilirsiniz.

Anahtar kelimeler: Buraya proje çalışmanızı yansıtan ve özelden genele sıralanan 3-5 arasında anahtar kelime yazınız.

PROJE RAPORU

DİKKAT: Proje raporunuza kesinlikle “kapak sayfası” yapmayınız ve kişisel bilgilerinizi (adınız-soyadınız, okul adı, danışman adı, okul logosu ve filigranı dâhil) yerleştirmeyiniz. Oluşturacağınız proje raporu, Times New Roman karakterleriyle, 12 punto, sayfanın her yanından 2,5 cm boşluk bırakarak, tek satır aralığı ile iki yana yaslı olarak yazılmalıdır. Aşağıda yer alan bölümlerin yazılı kısımlarını çıkararak kendi metinlerinizi ekleyebilirsiniz (Raporunuzu yazarken bu “Dikkat” paragrafını silmeyi unutmayınız).

Proje Adı (Başlığı)

Projenize tek bir cümle şeklinde; kısa ve öz olarak; okuyana proje çalışması hakkında fikir verecek bir ad veriniz. Bu başlık mutlaka proje içeriğini yansıtacak şekilde olmalıdır.

İçindekiler

Projenizin ana başlık ve alt başlıklarının birbirine nasıl bağlı olduğunun gösterildiği belli bir düzende sıralanan ve bu başlıkların proje raporu içindeki sayfa numaralarını gösteren bir liste oluşturunuz.

1. Giriş

Bu bölümde; araştırmanın amacı, problem ve alt problemler, hipotezler ve alt hipotezler, varsayımlar (sayıltılar), sınırlılıklar, tanımlar alt başlıklarına yer verilmeli ve bunlar açıklanmalıdır.

Burada proje çalışmanızın konusu ile ilgili başkalarının yaptığı çalışmalardan söz ediniz. Sizin çalışmanızın öteki benzer çalışmalardan ayrılan yönlerini belirtiniz. Bu çalışmayı, literatürdeki hangi boşluğu doldurmak için yaptığınızı ve literatürde yer alan benzer çalışmalardan neyi nasıl farklı yapacağınızı açıklayınız. Benzer çalışmalardan nasıl yararlandığınızı ve sizin çalışmanızın neleri hedeflediğini açıklayınız. Bu kısımda mutlaka bu şablonun sonunda belirtilen kurallara göre (Öncelikle proje rehberinde kendi branşınızda verilen örnek projedeki kurallara göre) kaynakça gösterimi yapınız. Alıntılarda intihal ya da aşırma yapmayınız. **Çalıntı cümleler içeren bir proje raporu veya kendisi çalıntı olan bir proje, internet üzerinden çalışan “intihal yazılım programları” ile tespit edilmektedir. Bu şekilde olan projeler tespit edilerek reddedilecek, proje sahibi öğrenci ve danışmanı bundan sonraki TÜBİTAK etkinliklerinden men edilerek bu durum okullarına yazı ile bildirilecektir.**

2. Yöntem

Bu bölümde aşağıdaki kısımlara ve alt başlıklara yer veriniz:

- Çalışmanın metodu veya araştırma deseni,
- Çalışma grubunuz, evreniniz, örnekleminiz (çalışmanızda kişilerden veri toplamışsanız), çalışma sahanız, yeriniz ve bunların özellikleri,
- Veri toplama araçlarınızın neler olduğu, onları siz geliştirdiyseniz bunu nasıl yaptığınızı ve veri toplama süreciniz,
- Gözlemlerinizi, saha çalışmalarınızı ve bunları nasıl gerçekleştirdiğiniz, verileri nasıl analiz ettiğiniz ve bunun için hangi araç ya da yazılımları kullandığınızı,
- Deney düzenekleri, malzemeleri ve deneysel süreçleri (deneysel bir çalışma ise)

Deneysel çalışmalarda deney düzeneği, verilerin nasıl toplandığı açıkça anlatılmalıdır. Deney düzeneğindeki önemli ölçüm cihazlarının (ne olduğu, ölçüm aralığı, duyarlılığı vb.) kimyasal ve biyolojik malzemenin temel özellikleri belirtilmelidir. Örneğin bir voltmetre kullanılıyorsa bunun ölçme aralığı 2-220 V, 3,5 basamak göstergeli, iç impedansı 10 Mohm olan bir voltmetre

olarak belirtilmesi, ya da optik özellikleri incelenen bir cam levhanın 25 mmx10 mmx1 mm boyutlarında, görünür bölgedeki ışığı geçiren bir cam plaka şeklinde tanımlanması uygun olacaktır.

- Deneylerin nerede, kimler tarafından yapıldığı, ne kadar sürdüğü ve kaç kez hangi koşullar altında tekrarlandığı gibi bilgilerin açık, öz ve anlaşılır bir şekilde verilmesi gerekir. Bu kısımda çalışılan laboratuvarın özellikleri de belirtilmelidir.
- Kullanılan analiz ve hesaplamalar bu bölümde verilmelidir.

3. Bulgular

Bu bölümde aşağıdaki kısımlara yer veriniz:

- Çalışmanızda topladığınız verilere ait bulguları açıkça belirtiniz.
- Belirttiğiniz bulguların amaçlarınızla örtüşmesine özen gösteriniz.
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. yollarla bulgularınızı olabildiğince nesnel ve yorum yapmadan sununuz.
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. ifadeleri mutlaka numaralandırıp her birini isimlendiriniz (bkz. Kendi branşınızdaki örnekler)
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. ifadelere yazdığınız metin içerisinden mutlaka atıfta bulununuz.
- Tablo, şekil, resim, çizelge vb. ifadelere metin içersinden atıf yaparken “aşağıdaki, yandaki, yukarıdaki vb.” ifadelerden **kaçınınız.** Bunun yerine “Tablo 2’de görüldüğü üzere.....” gibi daha açık ifadeler kullanınız.

4. Sonuç ve Tartışma

Proje çalışmanız ile elde ettiğiniz sonuçları bu kısımda yazınız.

- Sonuçlarınızı maddeler halinde yazabilirsiniz.
- Sonuçlarınız sayısal değerler, bazı matematiksel eşitlikler veya sözlü ifadeler olabilir. Geçerlilik sınırlarını belirterek sonuçlarınızı tartışınız.
- Sonuçları tartışırken literatürde yer alan diğer çalışmalarla, sizin çalışmalarınızın benzer ve farklı sonuçlarını birlikte belirtiniz ve diğer çalışmalara atıfta bulununuz.
- Sonuçlarınızı olumsuz olarak etkileyen nedenler varsa açıklayınız. Bu kısmı yazmadan önce mutlaka çalışmanızın amacını tekrar gözden geçirerek amacınıza ne kadar ulaştığınızı belirtiniz.

5. Öneriler

- Bu kısımda teorik veya uygulama alanında “sadece sizin yaptığınız çalışmadaki bulgulara dayalı olarak” ne tür öneriler sunabilirsiniz?
- Konuyla ilgili önerilerinizi bu kısımda yazarak konuya ilgi duyup benzer çalışmalar yapacak olanlara yol gösteriniz.

Kaynakça

(Bu kısmı oluştururken aslolan proje rehberinde yer alan kendi branşınızdaki örnek projenin kaynakça kısmındaki şablonu kullanmaktır. Orada belirtilmeyen ya da yer verilmeyen türdeki kaynaklardan alıntı yapmanız durumunda bu şablondaki alıntı biçimini kullanabilirsiniz)

Bu kısımda proje çalışmanız ile ilgili olarak başvurduğunuz yazılı kaynakları, eğer rapor içerisinde numara vererek atıfta bulunduysanız numara sırasına göre, yazar soyadına göre atıfta bulunduysanız alfabetik sıraya uygun olarak, yazar soyadına göre dizerek veriniz. **Metin içinde atıfta bulunmadığınız bir kaynağı buradaki listeye asla eklemeyiniz.**

Sadece gerçekten okunan kaynaklardan alıntı yapılmalıdır. Okunan bir kaynağın içerisinde

geçen başka kaynaklar, kaynaklar bölümünde gösterilmemelidir. Eğer bu kaynakların mutlaka belirtilmesi gerekiyorsa, okunan kaynaktan aşağıdaki gibi alıntı yapılır. Kaynaklar listesinde de sadece okunan kaynak verilir. Örnek:

“Kent (Aktaran: Artvinli, 2009 ya da Akt. Çağlar, 2005) yaptığı çalışmada...”

Birden fazla esere atıfta bulunuluyor ise kaynaklar alfabetik sıra ile verilmeli ve her kaynak arasına noktalı virgül konulmalıdır. Örneğin; (Alim, 2003; Kaya, 2011; Özlü, 2013; Zerrin, 2015). Bir kaynağı mutlaka aşağıdaki örneklerle uygun olarak yazınız.

“Kaynakça” başlığa altında kaynakların gösterilmesi

Kaynaklar bölümünde kaynaklar alfabetik sıra içinde verilmelidir. Kaynakların “Kaynakça” başlığı altında gösterimi sırasında aşağıdaki biçime uyulmalıdır:

1-Eğer kaynak gösterme kongre/konferans bildirisinden yapılmış ise:

Çağlar, E. (1998). Erkek hentbolcularda kendini fiziksel algılama ve kaygı düzeyi. 5. Uluslararası Spor Bilimleri Kongresi. 5-7 Kasım, Ankara.

2- Eğer kaynak gösterme “sürelî yayınlardan” (Dergilerde basılmış makaleler) yapılmış ise:

Karatay, H. (2015). Eleştirel Düşünme ve Okuma Alışkanlığı Becerilerinin Geliştirilmesi İçin Edebiyat Halkası: Kitap Eleştirisi Modeli, *Millî Eğitim Dergisi*, 44 (208), 6-17.

3- Eğer kaynak gösterme basılı “kitaplardan” yapılmış ise:

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metotlarına Giriş: Nitel, Nicel ve Eleştirel Kuram Metodolojileri*, Anı Yayıncılık, Ankara

4- Eğer kaynak gösterme “lisansüstü tezlerden” yapılmış ise:

Kaya, N. (2012). 1923-2008 Türkiye’de Coğrafya Öğretimi: Program, Ders Kitapları ve Öğretmen Eğitimi Boyutu (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

5- Eğer kaynak gösterme “kurumsal rapor veya yayınlardan” yapılmış ise:

Türkiye Sağlık Bakanlığı. (2014). *Türkiye Sağlık İstatistikleri Yıllığı 2013*. Sentez Matbaacılık ve Yayıncılık, Ankara

DİE (Devlet İstatistik Enstitüsü). (1995). *Türkiye İstatistik Yıllığı 1994*. DİE Matbaası, Ankara

6- Eğer kaynak gösterme “internet sitesindeki online yayınlardan” yapılmış ise:

Yazarın soyadı, Yazarın adının baş harfî. (Yayınlanma veya güncellenme yılı). *Başlık*. Cilt, Sayı, Sayfa no, Alınma tarihi, internet adresi

Kaya, N. (2015). Coğrafya Eğitiminde Aktif Öğrenme ve Öğrenci Merkezli Yaklaşım Tarihten İki Örnek, *Millî Eğitim Dergisi*, 44 (205), 150-169, Erişim tarihi: 12.10. 2015, http://dhgm.meb.gov.tr/yayimlar/dergiler/Milli_Egitim_Dergisi/205.pdf

TÜBİTAK (2015). 46. Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması Proje Rehberi 2015, Erişim tarihi: 12.11.2015, http://www.tubitak.gov.tr/sites/default/files/2204_proje_kitapcik.pdf

7- Eğer kaynak gösterme bir “ansiklopediden” yapılmış ise:

Akün, Ö. F. (1992). Divan edebiyatı. *Diyanet Vakfı İslâm Ansiklopedisi* (398-422). İstanbul: Türkiye Diyanet Vakfı.

8- Kişisel görüşmeden alıntı (amaçlı mülakatlar değil):

Kişisel görüşmeler metinde belirtilmeli fakat kaynakçada yer almamalıdır. (Demiral, H., kişisel görüşme, Eylül 2015).

9- Eğer kaynak gösterme bir “editörlü kitaptan” yapılmış ise:

Kitap içindeki bölüm yazarının,

Soyadı, Adının ilk harfi (yıl). Bölüm başlığı, kitabın başlığı, editör(ler): ad, soyad, yayınevi, sayfalar.

Artvinli, E.; Martinha, C. (2014). Coğrafya Müfredatında CBS: Türkiye ve Portekiz’in Karşılaştırılması, Avrupa’da Yenilikçi Coğrafi Öğrenme: 21. Yüzyıl İçin Yeni Zorluklar. Editörler: Rafael de Miguel González ve Karl Donert, Cambridge Scholars Publishing, 121-140.

10- Eğer kaynak gösterme “Gazete Makaleleri ve haberlerinden” yapılmış ise:

Yazarı Belli Gazete Makalesi veya Haberi:

Yazarın soyadı, Yazarın adının baş harfi. (Tam yayın tarihi-gün/ay/yıl). Makalenin adı.

Gazetenin Adı. Sayfa aralığı, ülke. (internetten alındı ise ilave olarak)Erişim tarihi, web sitesi tam linki.

Yazarı Belli Olmayan Gazete Makalesi veya Haberi:

Makale veya haberin başlığı. (Tam yayın tarihi-gün/ay/yıl). *Gazetenin adı*, sayfa numarası, Ülke. (internetten alındı ise ilave olarak) Erişim tarihi, web sitesi tam linki.

11-Tek yazarlı kaynak gösterimi

Karademir, E. (2009). Fizikte kullanılan özel deney tasarımlarının uygulanması. *Ulusal Fizik Eğitimi Dergisi*, 5 (2), 171-189.

12-Çok yazarlı kaynak gösterimi

Karademir, E., Durmaz, A.; İleri, N. (2008). Cam yapıların dayanıklılık ölçümlerinin belirlenmesi. *Fizikte Özel Konular Dergisi*, 17 (3), 98-113.

Ekler

Ana metin içerisinde yer almaları halinde konuyu dağıtan veya çok uzun metinlerden oluşan, çeşitli araştırma bulgularına dayalı çok uzun tablolar, rakamlardan oluşan seriler veya bir işe ait genişletilmiş tablolar vb. EKLER bölümünde verilebilir. Ayrıca araştırmayı yapmak için alınan yasal izinler, yazışmalar, gerekirse e-posta örnekleri de burada gösterilmelidir. Bu tür eklerin her biri için uygun bir başlık seçilerek bunlar metin içerisinde geçiş sıralarına göre "Ek 1., Ek 2., Ek 3.,..." şeklinde, her biri ayrı bir sayfadan başlayacak şekilde yer almalıdır.

ÖRNEK MATEMATİK PROJESİ RAPORU

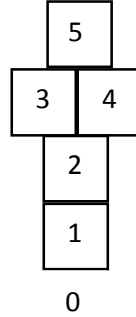
Proje Adı:

SEK SEK OYUNUNDAN SONLU GEOMETRİYE

1. Giriş

Matematik aksiyomatik sistemleri inceleyen bir bilimsel disiplin olarak tanımlanabilir (Olgun, 2003). Aksiyomlar, ispatı gerekmeyen veya doğruluğu kabul edilen önermeler olup aksiyom sistemi ise aksiyomlar topluluğunun bir mantık sistemiyle oluşturduğu yapıya denir. Aksiyom sistemleri, bazı aksiyomların gelişigüzel biraraya gelerek oluşturduğu bir topluluk değildir. Oluşturulan aksiyom sisteminin uyumluluk ve bağımsızlık özelliklerini sağlaması gerekir. Aksiyom sisteminden elde edilen model sonlu sayıda nokta ve doğrudan oluşuyorsa sonlu geometri olarak tanımlanır (Edward & Stephan, 2004). En yaygın bilinen sonlu geometri örnekleri Dört- nokta Geometrisi, Fano geometrisi ve Young geometrisidir. Bunlardan Young geometrisi ile Fano geometrisi beş aksiyomdan oluşup ilk dört aksiyomları aynı sadece beşinci aksiyomları farklı olduğu halde modelleri incelendiğinde birbirinden oldukça farklı iki geometri olduğu görülmektedir (Edward & Stephan, 2004). Örneğin Fano geometrisinde 7 nokta ve 7 doğru varken Young geometrisinde 12 doğru ve 9 nokta vardır. Sonlu geometrilerin sonlu sayıda nokta ve doğru içermesi ve aksiyomlar ile tanımlanması fikrinden yola çıkarak sonlu sayıda hareketle sınırlandırıldığı ve sonlu sayıda kare içerdiği için “sek sek oyununun kuralına bağlı aksiyom sistemleri geliştirilebilir mi?” sorusuna cevap aranmaya çalışılmıştır.

Sek sek oyunu, yere tebeşir ile birbirini izleyen kareler, çemberler ya da elipslerin çizilmesi ve numaralandırılmasıyla oynanan bir tür sokak oyunudur. Pek çok çeşidi bulunan bu oyunun bir türünde ise kural; 0 noktasında bulunan oyuncu, taşı attıktan sonra karelere isabet ederse taş atma sırası öbür oyuncuya geçer (bkzn. Şekil 1). Atış başarılıysa oyuncu tek ayağı üzerinde sekerken, oyuncu taşın bulunduğu karenin üstünden atlarken iki karenin yanyana olduğu 3 ve 4 numaralı karelere aynı anda birer ayağı ile her iki karenin içine basar, 5. karede her iki ayağı ile basarak oyunu bitirir. 3. ve 4. kareler yan yana oldukları için bu karelere taş gelince, yandaki kareye tek ayakla basılır. Bu çalışmada beş kareli Şekil 1 de verilen şablon ile çalışılacaktır.



Şekil 1. Sek sek oyunu şablonu

Literatürde farklı aksiyom sistemi örnekleri verilerek tutarlılığı ve bağımsızlığı incelenmiştir (Edward & Stephan, 2004; Olgun, 2003; Buekenhout, 1995). Burada ise bir oyunun kuralından elde edilen modellerden yola çıkarak aksiyom sistemlerinin oluşturulması açısından farklı bir yol izlenmiştir. Bu şekilde elde edilen bağımsız aksiyom sistemlerine karşılık gelen farklı sonlu geometri örnekleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

1.1. Amaç

Bu çalışmada sek sek oyunundaki oyunun kuralına bağlı olarak oluşan sonlu geometri örneklerini elde etmek ve bunların eş yapılı olanlarını belirlemek amaçlanmıştır. Bu amaçla oyunun kuralına bağlı olarak elde edilen modellere karşılık gelen aksiyom sistemlerinin özellikleri incelenmiştir.

2. Yöntem

2.1. Sek Sek oyunu ile Sonlu Geometrinin ilişkilendirilmesi

Bu çalışmada Şekil 1 de da verilen beş kareden oluşan oyun şablonu göz önüne alınmıştır. Bu model üzerinde sek sek oyununun kuralı doğrultusunda, örneğin taşın birinci kutuda olması durumunda oyuncu başlangıç noktası olan 0 dan başlayarak birinci kutunun üzerinden sekerek sırasıyla 2. kutuya, 3. ve 4. kutuya birlikte ve son olarak 5. kutuya atlayacaktır. Bu durum bir model olarak Şekil 2 de gösterilmiştir. Bu model de başlangıç noktası dâhil olmak üzere zıplanan kutular birer nokta, zıplama hareketiyle alınan yollar birer doğru olarak tanımlanabilir.

Taşın konumuna göre elde edilecek modelleri göz önüne alınarak aksiyo sistemleri oluşturulmuştur. Bu aksiyo sistemlerinin uyumlu ve bağımsız olduğu doğrudan ispat yöntemi ile gösterilmiştir. Elde edilen modeller ve aksiyo sistemleri karşılaştırılarak eş yapılı olanlar ispatlanmıştır. Modellerden ulaşılan aksiyo sistemlerinin birer sonlu geometri olduğu gösterilmiştir. Bu sonlu geometrilerin birer yaklaşık lineer uzay olduğu ispatlanmıştır.

3. Bulgular

3.1. Sonlu Geometri 1 için aksiyo sistemi

Taş 1 numaralı karede iken Model 1:

Oyunun kuralına bağlı olarak 0 numaradan başlanarak 1. kareden sekilerek 2. kareye atlanır. Daha sonra 3. ve 4. kareye aynı anda birer ayakla basılır. Son olarak 5. kareye iki ayakla birlikte atlanarak bitirilir. Bu kurala bağlı Şekil 2 deki model elde edilir.



Şekil 2. Taş 1. karede iken oyun için bir model 1

Şekil 2 de ki altı noktanın oluşturduğu noktalar kümesi N , zıplama hareketlerini gösteren yollar doğru olarak alındığında elde edilen beş doğru kümesi D ile gösterilecektir. Buna göre model 1, (N,D) ile gösterilecektir. Tablo 1 de model 1 in noktalar kümesinin ve doğrular kümesinin elemanları verilmiştir. Doğrular noktalardan oluştuğu için Tablo 1 de her bir doğru üzerindeki noktalar yardımıyla tanımlanmıştır.

Tablo 1. Model 1 den elde edilen nokta ve doğrular

Noktalar	Doğrular
$0,1,2,3,4,5$	$\{0,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$

Model 1 i sağlayan aşağıdaki aksiyo sistemi yazabiliriz.

Aksiyo sistemi 1:

A1) 6 nokta ve 5 doğru vardır.

A2) Bir noktadan en çok üç doğru geçer.

A3) Her doğru üzerinde iki nokta vardır.

A4) Farklı iki noktayı birleştiren en çok bir doğru vardır.

Uyumlu Aksiyom Sistemi: Aksiyom sistemini sağlayan bir (N,D) modeli bulunabiliyorsa uyumlu aksiyom sistemi aksi halde uyumsuz aksiyom sistemi denir(Batten,1986).

Teorem 1: Aksiyom sistemi 1 uyumludur.

İspat: Aksiyom sistemini sağlayan en az bir model varsa aksiyom sistemi uyumlu olduğundan bu sistem Şekil 2 deki modelden elde edildiği için uyumlu bir aksiyom sistemidir.

Bağımlı Aksiyom Sistemi: Bir aksiyom sisteminde aksiyomlardan biri diğer aksiyomlardan elde edilebiliyorsa bu aksiyom sistemine bağımlı aksiyom sistemi denir. Aksi halde bağımsız aksiyom sistemi denir (Batten, 1986).

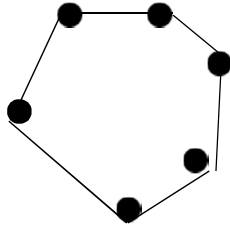
Teorem 2: Aksiyom sistemi 1 bağımsızdır.

İspat: Teoremin ispatı için her bir aksiyomun diğerlerinden bağımsız olduğunu göstermek gerekir.

Önce A1 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A2, A3, A4 aksiyomlarını sağlayan A1 aksiyomunu sağlamayan bir (N,D) modeli bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$D=\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{6,1\}\}$ alalım.



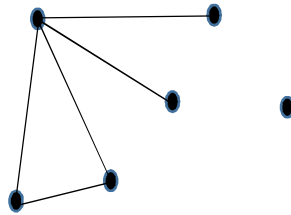
Şekil 3. A1 aksiyomunun bağımsızlığını gösteren model

Şekil 3 de $U=(N, D)$ modeli, A2, A3, A4 aksiyomlarını sağlar fakat model de 6 doğru olduğu için A1 aksiyomu sağlanmaz. O halde A1 aksiyomunun diğer aksiyomlardan bağımsızdır.

Şimdi A2 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A1, A3, A4 aksiyomlarını sağlayan A2 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$D=\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{4,5\}\}$ alalım.



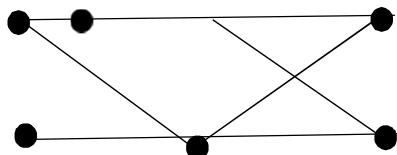
Şekil 4. A2 aksiyomunun bağımsızlığını gösteren model

Şekil 4 de $U=(N, D)$ modeli, A1, A3, A4 aksiyomlarını sağlar fakat model de 1 noktasından dört doğru geçtiği için A2 aksiyomu sağlanmaz. O halde A2 aksiyomunun diğer aksiyomlardan bağımsızdır.

A3 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A1, A2, A4 aksiyomlarını sağlayan A3 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$D=\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{4,5,6\}\}$ alalım.



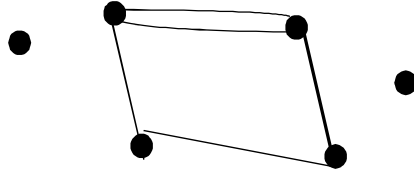
Şekil 5. A3 aksiyomunun bağımsızlığını gösteren model

Şekil 5 de $U=(N, D)$ modeli, A1, A2, A4 aksiyomlarını sağlar fakat model de üç noktalı doğrular olduğu için A3 aksiyomu sağlanmaz. O halde A3 aksiyomunun diğerlerinden bağımsızdır.

A4 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A1, A2, A3 aksiyomlarını sağlayan A4 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$D=\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,4\}, \{1,3\}, \{3,4\}$ alalım.



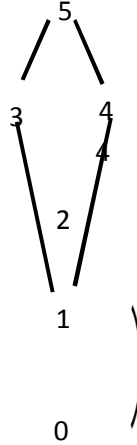
Şekil 6. A4 aksiyomunun bağımsızlığını gösteren model

Şekil 6 da $U=(N, D)$ modeli, A1, A2, A3 aksiyomlarını sağlar fakat model de iki noktayı birleştiren iki doğru olduğundan A4 aksiyomu sağlanmaz. O halde A4 aksiyomunun diğerlerinden bağımsızdır.

Dört adımda her bir aksiyom diğer aksiyomlardan bağımsız olduğu gösterildiğine göre aksiyom sistemi bağımsızdır.

Taş 2 numaralı karede iken Model 2:

Taş 2 numaralı karede iken oyunun kuralına bağlı olarak 0 numaradan başlanarak 1. kareye atlanırken 2. kareden sekilerek 3. ve 4. kareye aynı anda birer ayakla basılır. Son olarak 5. kareye iki ayakla birlikte atlanarak bitirilir. Bu kurala bağlı Şekil 7 deki model elde edilir.



Şekil 7. Taş 2. karede iken oyun için bir model

Şekil 7 de ki model 2 (N', D') ile gösterilsin. Tablo 2 de model 2 nin noktalar kümesinin ve doğrular kümesinin elemanları verilmiştir. Doğrular noktalardan oluştuğu için Tablo 2 de her bir doğru üzerindeki noktalar yardımıyla tanımlanmıştır.

Tablo 2. Model 2 den elde edilen nokta ve doğrular

Noktalar	Doğrular
0,1,2,3,4,5	{0,1}, {1,3}, {1,4}, {3,5}, {4,5}

Tablo 1 ve tablo 2 de nokta ve doğru sayılarının eşit olduğu görülmektedir.

İki Modelin İzomorfluğu(Eş Yapılı Olması):

Bir aksiom sisteminin iki modelinin noktaları ve doğrular kümesi belirli iken noktaları noktalara ve doğruları doğrulara dönüştüren bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa ve bu dönüşüm üzerinde bulunma bağıntısını koruyorsa bu iki model izomorftur(eş yapılıdır) denir (Batten ve Beutelspacher, 1993).

Teorem 3: Model 1 ve model 2 izomorftur.

İspat: model 1 in ve model 2 nin noktalar ve doğrular kümesi arasında aşağıdaki tabloda verilen f fonksiyonunu göz önüne alalım.

Tablo 3.

Model 1 ve model 2 nin noktaları ve doğruları arasında tanımlanan fonksiyon

$f: N=\{0,1,2,3,4,5\} \rightarrow N'=\{0,1,2,3,4,5\}$	$f: D=\{\{0,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\} \rightarrow D'=\{\{0,1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$
$f(0)=0, f(1)=2, f(2)=1$ $f(3)=3, f(4)=4$ ve $f(5)=5$	$f(\{0,2\})=\{0,1\}, f(\{2,3\})=\{1,3\}, f(\{2,4\})=\{1,4\},$ $f(\{3,5\})=\{3,5\}, f(\{4,5\})=\{4,5\}$

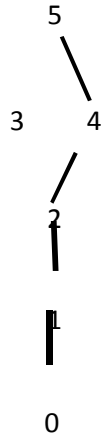
Model 1 in her P noktası ve her l doğrusu için f(P) ve f(l) model 2 de bir nokta ve bir doğrudur. f fonksiyonu birebir ve örtendir. Ayrıca Model 1 de P noktası l doğrusu üzerinde iken f(P) noktasıda f(l) doğrusu üzerindedir. f fonksiyonu üzerinde bulunmayı korur. O halde model 1 ve model 2 izomorftur (eş yapılıdır).

Sonuç 1: Taş 1 numaralı ve 2 numaralı karede iken elde edilen modeller aynı aksiom sistemi ile temsil edilir.

3.2. Sonlu Geometri 2 için aksiom sistemi

Taş 3 numaralı karede iken Model 3:

Taş 3 numaralı karede iken oyunun kuralına bağlı olarak 0 numaradan başlanarak sırasıyla 1. , 2. , 4. ve 5. kareye atlanır. Bu kurala bağlı Şekil 8 deki model 3 elde edilir.



Şekil 8. Taş 3. karede iken oyun için bir model 3

Şekil 8 de ki model 3, (N,D) ile gösterilsin. Tablo 4 de model 3 ün noktalar kümesinin ve doğrular kümesinin elemanları verilmiştir. Doğrular noktalardan oluştuğu için Tablo 4 de her bir doğru üzerindeki noktalar yardımıyla tanımlanmıştır.

Tablo 4. Model 3 den elde edilen nokta ve doğrular

Noktalar	Doğrular
0,1,2,3,4,5	{0,1}, {1,2}, {2,4}, {4,5}

Model 3 ü sağlayan aşağıdaki aksiyom sistemi yazılabilir.

Aksiyom sistemi 2:

A1) 6 nokta ve 4 doğru vardır.

A2) Bir noktadan en çok iki doğru geçer

A3) Her doğru üzerinde iki nokta vardır.

A4) Farklı iki noktayı birleştiren en çok bir doğru vardır.

Teorem 4: Aksiyom sistemi uyumludur.

İspat: Aksiyom sistemini sağlayan en az bir model varsa aksiyom sistemi uyumlu olduğundan bu sistem Şekil 8 deki model 3 den elde edildiği için uyumlu bir aksiyom sistemidir.

Teorem 5: Aksiyom sistemi 2 bağımsızdır.

İspat: Teoremin ispatı için her bir aksiyomun diğerlerinden bağımsız olduğunu göstermek gerekir.

Önce A1 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A2, A3, A4 aksiyomlarını sağlayan A1 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{0,1,2,3,4,5\}$ ve

$D=\{d_1 = \{0,1\}, d_2 = \{1,2\}, d_3 = \{0,2\}, d_4 = \{3,4\}, d_5 = \{4,5\}\}$ alalım.

$U=(N, D)$ modeli, A2, A3, A4 aksiyomlarını sağlar fakat bu model de 5 doğru olduğu için A1 aksiyomu sağlanmaz. O halde A1 aksiyomunun diğerlerinden bağımsızdır.

Şimdi A2 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A1, A3, A4 aksiyomlarını sağlayan A2 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$D=\{d_1 = \{0,1\}, d_2 = \{1,2\}, d_3 = \{0,2\}, d_4 = \{0,3\}\}$ alalım.

$U=(N, D)$ modeli, A1, A3, A4 aksiyomlarını sağlar fakat bu model de 0 noktasından üç doğru geçtiği için A2 aksiyomu sağlanmaz. O halde A2 aksiyomunun diğerlerinden bağımsızdır.

A3 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A1, A2, A4 aksiyomlarını sağlayan A3 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$D=\{d_1 = \{0,1,2\}, d_2 = \{0,4,6\}, d_3 = \{1,5\}, d_4 = \{2,3,4\}\}$ alalım.

$U=(N, D)$ modeli A1, A2, A4 aksiyomlarını sağlar fakat bu model de üç noktalı doğrular olduğu için A3 aksiyomu sağlanmaz. O halde A3 aksiyomunun diğerlerinden bağımsızdır.

A4 aksiyomunun diğerlerinden bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için A1, A2, A3 aksiyomlarını sağlayan A4 aksiyomunu sağlamayan bir model bulmak yeterli olacaktır.

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve

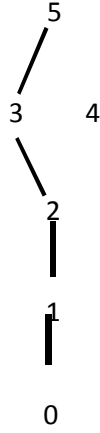
$D=\{d_1 = \{1,2\}, d_2 = \{1,2\}, d_3 = \{2,6\}, d_4 = \{1,3\}\}$ alalım.

$U=(N, D)$ modeli, A1, A2, A3 aksiyomlarını sağlar fakat bu model de iki noktayı birleştiren iki doğru olduğundan A4 aksiyomu sağlanmaz. O halde A4 aksiyomunun diğerlerinden bağımsızdır.

O halde her bir aksiyom diğer aksiyomlardan bağımsız olduğu gösterildiğine göre aksiyom sisteminin bağımsız olduğu ispatlanmış olur..

Taş 4 numaralı karede iken Model 4:

Taş 4 numaralı karede iken oyunun kuralına bağlı olarak 0 numaradan başlanarak sırasıyla 1. , 2. , 3. ve 5. kareye atlanır. Bu kurala bağlı Şekil 9 daki model 4 elde edilir.



Şekil 9. Taş 4. Karede iken oyun için bir model 4

Şekil 9 da ki model 4, (N', D') ile gösterilsin. Tablo 5 de model 4 ün noktalar kümesinin ve doğrular kümesinin elemanları verilmiştir. Doğrular noktalardan oluştuğu için Tablo 5 de her bir doğru üzerindeki noktalar yardımıyla tanımlanmıştır.

Tablo 5. Model 4 den elde edilen nokta ve doğrular

Noktalar	Doğrular
0,1,2,3,4,5	$\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}$

Tablo 4 ve tablo 5 de nokta ve doğru sayılarının eşit olduğu görülmektedir.

Teorem 6: Model 3 ve Model 4 izomorftur.

İspat: Model 3 in ve model 4 ün noktalar ve doğrular kümesi arasında aşağıdaki tabloda verilen f fonksiyonunu göz önüne alalım.

Tablo 6. Model 3 ve model 4 ün noktaları ve doğruları arasında tanımlanan fonksiyon

$f: N = \{0,1,2,3,4,5\} \rightarrow N' = \{0,1,2,3,4,5\}$	$f: D = \{\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{4,5\}\} \rightarrow D' = \{\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}\}$
$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2$ $f(3)=4, f(4)=3$ ve $f(5)=5$	$f(\{0,2\})=\{0,1\}, f(\{1,2\})=\{1,2\}, f(\{2,4\})=\{2,3\},$ $f(\{4,5\})=\{3,5\}$

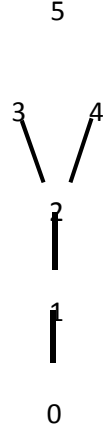
Model 3 in her P noktası ve her l doğrusu için $f(P)$ ve $f(l)$ model 4 de bir nokta ve bir doğrudur. F fonksiyonu birebir ve örtendir. Ayrıca model 3 de P noktası l doğrusu üzerinde iken $f(P)$ de $f(l)$ üzerindedir. f fonksiyonu üzerinde bulunmayı korur. O halde model 3 ve model 4 izomorftur (eş yapılıdır).

Sonuç 2: Model 3 için elde edilen aksiyom sistemi 2, model 4 ü sağlar.

3.3. Sonlu Geometri 3 için aksiyom sistemi

Taş 5 numaralı karede iken Model 5:

Taş 5 numaralı karede iken oyunun kuralına bağlı olarak 0 numaradan başlanarak sırasıyla 1. , 2. , 3. ve 4. kareye atlanır. Bu kurala bağlı Şekil 10 daki model 5 elde edilir.



Şekil 10. Taş 5. Karede iken oyun için bir model 5

Şekil 10 da ki model 5, (N,D) ile gösterilsin. Tablo 7 de model 5 in noktalar kümesinin ve doğrular kümesinin elemanları verilmiştir. Doğrular noktalardan oluştuğu için Tablo 7 de her bir doğru üzerindeki noktalar yardımıyla tanımlanmıştır.

Tablo 7. Model 5 den elde edilen nokta ve doğrular

Noktalar	Doğrular
0,1,2,3,4,5	{0,1}, {1,2}, {2,4},{2,3}

Model 5 i sağlayan aşağıdaki aksiyo sistemini yazılabilir.

Aksiyo sistemini 3:

A1) 6 nokta ve 4 doğru vardır.

A2) Bir noktadan en çok üç doğru geçer

A3) Her doğru üzerinde iki nokta vardır.

A4) Farklı iki noktayı birleştiren en çok bir doğru vardır.

Teorem 7: Aksiyo sistemini 3 uyumludur.

İspat: Aksiyo sistemini sağlayan en az bir model olması varsa aksiyo sistemini uyumlu olduğundan bu sistem Şekil 10 daki model 5 den elde edildiği için uyumlu bir aksiyo sistemidir.

Teorem 8: Aksiyo sistemini bağımsızdır.

İspat: Teorem 3 ve teorem 5 ispatına benzerdir.

Teorem 9: Model 4 ve model 5 izomorf değildir.

İspat: Her iki modelde de altı 6 nokta dört doğru vardır. İki modelin noktaları ve doğruları arasında birebir örten bir fonksiyon tanımlanabilir. Fakat üzerinde bulunma şartı sağlanmaz. Örneğin model 5 de 2 noktasından üç doğru geçtiği halde model 4 de böyle bir nokta yoktur. O halde bu iki model izomorf olamaz.

Sonuç 3: Aksiyo sistemini 1, Aksiyo sistemini 2 ve Aksiyo sistemini 3 birer sonlu geometridir.

İspat: Her bir aksiyo sisteminde sonlu sayıda nokta ve doğru olduğundan birer sonlu geometridirler.

Yaklaşık Lineer Uzay: N noktalar kümesi D doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki aksiyo mları sağlayan $S=(N,D)$ yapısına bir yaklaşık lineer uzay denir (Batten, 1986).

YL1) Her doğru üzerinde iki nokta vardır.

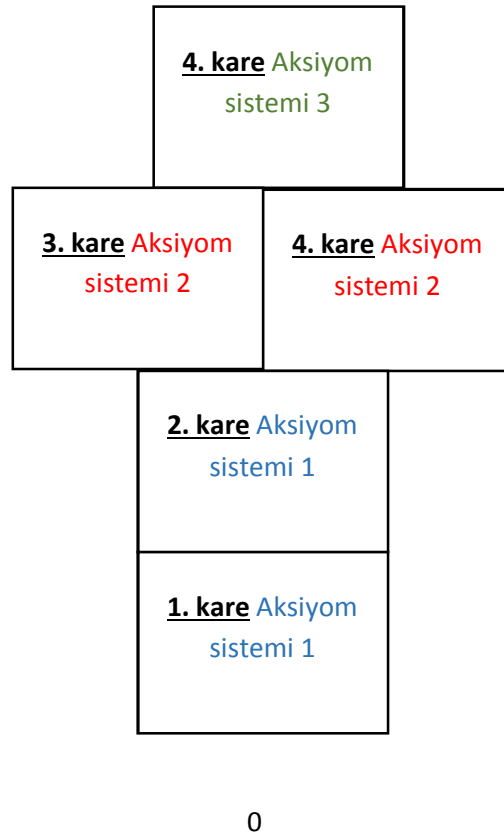
YL2) Farklı iki noktayı birleştiren en çok bir doğru vardır.

Teorem 10: Aksiyom sistemi 1, Aksiyom sistemi 2 ve Aksiyom sistemi 3 birer yaklaşık lineer uzaydır.

İspat: Her iki aksiyom sisteminde A3 ve A4 aksiyomları yaklaşık lineer uzay aksiyomları ile aynı olduğundan sek sek oyununun kuralına göre taşın farklı karelerde olmasına bağlı elde edilen her bir aksiyom sistemi aynı zamanda bir yaklaşık lineer uzaydır.

4. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada sek sek oyunundaki oyunun kuralına bağlı olarak oluşan sonlu geometri örneklerini elde etmek ve bunların eş yapılı olanlarını belirlemek amacıyla oyunun kuralına bağlı olarak elde edilen modellere karşılık gelen aksiyom sistemlerinin özellikleri incelenmiştir. Bu incelemede, Şekil 1 de verilen oyun şablonu model alınmıştır. Bu model de başlangıç noktası dâhil olmak üzere zıplanan kutular birer nokta, zıplama hareketiyle alınan yollar birer doğru olarak tanımlandı. Buna göre 5 kareden oluşan bir şablonla oynanan sek sek oyunundan elde edilen modellerde başlangıç noktası dahil 6 nokta belirlenmiştir. Doğrular ise sırasıyla taşın 1 numaralı karede, 2 numaralı karede,..., 5 numaralı karede olmasına göre değişeceği için tüm durumlar bir modelle temsil edildiğinde toplamda 5 model oluşmuştur. Bu modellerden taşın 1 ve 2 de olması durumuna karşılık gelen iki model izomorf, taşın 3 ve 4 de olmasına karşılık gelen iki model izomorf olup taşın 5 de olması durumu bu modellerle izomorf olmadığından toplamda üç farklı model elde edilmiştir. Bu farklı modellere karşılık elde edilen üç farklı aksiyom sistemi sırasıyla Aksiyom sistemi 1, Aksiyom sistemi 2 ve Aksiyom sistemi 3 olarak adlandırılmış ve oyunun şablonu üzerinde Şekil 11 de verilmiştir.



Şekil 11. Elde edilen aksiyom sistemlerinin oyunun şablonu üzerinde özetlenmesi

Şekil 11 de oyun şablonu incelendiğinde, 1 ve 2 numaralı karelerin birbirine göre dikey konumda, birbirinin ardışığı ve ortak bir kenarları olması bakımından benzer özellik göstermesinden dolayı model 1 ve model 2 nin izomorf olduğu söylenebilir. Benzer şekilde 3 ve 4 numaralı kareler birbirine göre yatay konumda, bir kenarları

Ortaöğretim Proje Örnekleri

Tübitak Ortaöğretim
Öğrencileri Araştırma
Projeleri Yarışmasına
Katılan Örnek Projeler

PARÇALA BİRLEŞTİR ÜÇGEN YAP

HAZIRLAYANLAR

Y. E. Nacar

K. R. Mavili

DANIŞMAN:

ZEHRA ÇİÇEK AKKUZU

Kayseri Çetin Şen Bilim ve Sanat Merkezi

-2015-

(Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projesi Türkiye Üçüncüsü ve Tübitak Uluslararası Jürisi kararı ile Intel İsef Proje Fuarına katılımı sağlanmıştır.)

PARÇALA BİRLEŞTİR ÜÇGEN YAP

Kurum: Kayseri Çetin Şen Bilim ve Sanat Merkezi

Projeyi Hazırlayanlar: Y. E. Nacar – K. R. Mavili

Proje Danışmanı: Zehra Çiçek Akkuzu

Projenin Amacı: Bu çalışmada elimize aldığımız belirli bir uzunluktaki çubukları üç tamsayı uzunluğa ayırarak bu parçalardan üçgenler elde etmek istediğimizde kaç üçgen elde edebileceğimizi bulmayı amaçladık.

Giriş: Konuyla ilgili yapılan literatür taramasında bir çalışmada çevre uzunluğu 15 cm olan ve kenarları tamsayı olan kaç üçgen vardır sorusu cevaplanmış ancak çalışmada genel bir çözümden bahsedilmemiştir. (1). Başka bir çalışmada ise verilen $1,2,3,...,n$ uzunluğundaki parçalardan kaç üçgen elde edilebileceğinin formülü bulunmuştur. (2,3). Daha önce aynı konu ile kurumumuz matematik derslerinde tüm matematik öğrencileri çalışmış ve bir arkadaşımız kendi çözümü ile bu benim eserim proje yarışmasına başvurmuş ve derece almıştı. Bu çalışmada ise konuya bu çalışmadan farklı şekilde yaklaşılmış ve çok uzun bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Bir üç basaklı çevre uzunluğu için çözüm iki sayfa sürmektedir. Bu çalışmadaki gibi tam bir formül bulunamamıştır. (4)

Yöntem: Öncelikle biz bu problemde bize verilen herhangi bir çevre uzunluğundan bu çevre uzunluğuna bağlı olarak kaç tane üçgen oluşturabileceğimizi bulmak istiyoruz. Bunun için çevre uzunluğu 3, 4, 5, 6, ..., 12, 13, 14... olarak verilen üçgenlerle çalışmaya başlamak istedik ve bu uzunlukları toplamları çevre uzunluğu edecek şekilde küçükten büyüğe sistematik olarak üç pozitif tamsayıya ayırdık. (Diğer kenarlar için de denedik fakat aşağıya sadece çevre uzunluğu 12, 13 ve 14 olanları yazdık.) Amacımız bu üçlülere bulup içlerinden kenar bağıntısına göre üçgen oluşturmayanları çıkarmaktır.

Çevresi 12 olan bütün üçlüler		
1.K.U	2.K.U.	3.K.U.
1	1	10
1	2	9
1	3	8
1	4	7
1	5	6
2	2	8
2	3	7
2	4	6
2	5	5
3	3	6
3	4	5
4	4	4

Çevresi 13 olan bütün üçlüler		
1.K.U	2.K.U.	3.K.U.
1	1	11
1	2	10
1	3	9
1	4	8
1	5	7
1	6	6
2	2	9
2	3	8
2	4	7
2	5	6
3	3	7
3	4	6
3	5	5
4	4	5

Çevresi 14 olan bütün üçlüler		
1.K.U	2.K.U.	3.K.U.
1	1	12
1	2	11
1	3	10
1	4	9
1	5	8
1	6	7
2	2	10
2	3	9
2	4	8
2	5	7
2	6	6
3	3	8
3	4	7
3	5	6
4	4	6
4	5	5

Önce 1. Kenarı 1 olan kaç üçlü olduğunu hesaplamamız gerekiyordu. Her çevre uzunluğu için en küçük kenarlarına göre oluşturulabilecek bütün üçlüleri hesapladık. Bunun için önce çevre uzunluğundan en küçük kenarı çıkardık. Böylece kalan iki kenarın toplamının kaç olması gerektiğini bulduk. Bu toplamı kaç farklı ikiliye ayırabileceğimizi bulmamız gerekiyordu. Bunu bulabilmek için bu iki kenarın toplamı sabit olacak şekilde, aralarındaki farkın en fazla kaç olabileceğine baktık.

Çevre uzunluğumuz n olsun. Birinci kenar 1 ise kalan iki kenarın uzunlukları toplamı $n-1$ olur. $n-1$ sayısını, farkları en fazla olacak şekilde ikiye ayırmamız için bu iki sayıdan birini 1 almamız gerekiyordu. Sayılarda biri 1 olursa ve toplamı $n-1$ ise diğer sayı $n-2$ olmalıdır. O zaman bu iki sayı arasındaki fark en fazla $n-1-2$ yani $n-3$ olur.

Aynı şeyi diğer 1. Kenarlar için denedik. Genel olarak;
Çevre uzunluğu n , 1. Kenar uzunluğu k olsun.

O zaman 1. Kenar çıkarıldığında kalan kenarların uzunlukları toplamı $n-k$ dır. Bu iki kenarın farkı en fazla $n-k-2k = n-3k$ olur.

Çevresi 14 olan bütün üçlüler			
1.K.U.	2.K.U.	3.K.U.	2. ve 3. Kenarlar Arasındaki fark
1	1	12	11
1	2	11	9
1	3	10	7
1	4	9	5
1	5	8	3
1	6	7	1
2	2	10	8
2	3	9	6
2	4	8	4
2	5	7	2
2	6	6	0
3	3	8	5
3	4	7	3
3	5	6	1
4	4	6	2
4	5	5	0

Yani $n-3k$ çift ise bu ve bundan küçük kaç çift sayı olduğunu, tek ise bu ve bundan küçük kaç tek sayı olduğunu bulmamız gerekti. Bunu $(n-3k)/2+1$ 'nin tam değeri ile bulduk. Yani her bir farklı 1. Kenar için $\lfloor (n-3k)/2 + 1 \rfloor$ tane farklı üçlü vardır.

O zaman herhangi bir çevre uzunluğunun kaç farklı üçlüye ayrılabilceğini bulmak için her 1. Kenar için bulduğumuz üçlüleri toplamamız gerekir. Burada 1. Kenar en küçük 1

olabilecekken en büyük kaç olabileceğini bulabilmemiz gerekir. Üçlülere küçükten büyüğe sıralı yazdığımız için 1. Kenar en fazla çevrenin üçte birinin tam değeri kadar olabilir. Buradan herhangi bir n çevre uzunluğu için oluşturulabilecek tüm üçlülere sayısını şöyle bulduk.

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-k}{2} - (k-1) \right\rfloor$$

Her çevre uzunluğu için önce bu uzunluğu üçlülere ayırdık. Şimdi aralarından üçgen oluşturmamaları çıkarmak için her çevre uzunluğu için üçgen oluşturmamaları üçlülere belirledik.

Bunun için önce artan çevre uzunlukları için üçgen oluşturmamaları üçlülere tabloya küçükten büyüğe sistematik bir şekilde yazdık.

Çevresi 12 olan üçgenolusturmamaları üçlülere		
1.K.U.	2.K.U.	3.K.U.
1	1	10
1	2	9
1	3	8
1	4	7
1	5	6
2	2	8
2	3	7
2	4	6
3	3	6

Çevresi 13 olan üçgenolusturmamaları üçlülere		
1.K.U.	2.K.U.	3.K.U.
1	1	11
1	2	10
1	3	9
1	4	8
1	5	7
2	2	9
2	3	8
2	4	7
3	3	7

Çevresi 14 olan üçgenolusturmamaları üçlülere		
1.K.U.	2.K.U.	3.K.U.
1	1	12
1	2	11
1	3	10
1	4	9
1	5	8
1	6	7
2	2	10
2	3	9
2	4	8
2	5	7
3	3	8
3	4	7

Biz 1. kenarı en küçük kenar olarak aldığımız için, kenar bağıntısına göre bir üçlünün üçgen oluşturmaması için diğer iki kenarın farkı 1. kenara eşit veya 1. Kenardan büyük olmalıydı. Burada 1. Kenarı 1 olan ve üçgen oluşturmamaları kaç üçlü olduğunu hesapladık. Bunun için çevreden 1. Kenar çıkarıldığında kalan iki kenarın farklarının en çok ve en az kaç olduğuna baktık. 2. ve 3. Kenarlar arasındaki fark 2şer 2şer azaldığı için aralarındaki farkın en az ve en çok kaç olduğunu bilirsek terim sayısı formülüyle kaç üçgen oluşturmamaları üçlü bulunduğunu bulabiliriz.

Çevre uzunluğumuz yine n ve 1. Kenar uzunluğumuz 1 olsun. O zaman yine 1. Kenar çıkarıldığında kalan kenarların uzunlukları toplamı n-1 olur. Bu iki kenarın farkının en büyük olması için bu iki kenardan birinin k olması gerekir. Toplamlarının n-1 olması gerektiğinden ve bu iki kenardan biri 1 olduğundan diğer kenar n-2 dir. O zaman bu iki kenarın farkları en fazla n-2-1den n-3 tür.

Aynı şeyi diğer 1. Kenarlar için denedik. Genel olarak;

Çevre uzunluğu n , 1. Kenar uzunluğu k olsun.

O zaman 1. Kenar çıkarıldığında kalan kenarların uzunlukları toplamı $n-k$ dır. Bu iki kenarın farkı en fazla $n-k-2k$ dan $n-3k$ olur.

Şimdi bu iki kenarın farklarının en az kaç olabileceğini incelememiz gerekiyor. Bu iki kenar arasındaki en küçük fark çevre tek iken $k+1$ e çift iken k ye eşitti. Bu yüzden terim sayısı formülünü tam değer ile birlikte kullandık.

$n-3k$ en büyük terim(2. Ve 3. Terim arasındaki maksimum fark), k en küçük terim(2. Ve 3. Terim arasındaki minimum fark) ve artış miktarı 2 olmak üzere bu aritmetik dizide

$$\frac{(n-3k)-k}{2}+1$$

Terim bulunur.

Fakat en küçük terim çevre tek ve çift iken farklı olduğu için tam değer kullandık ve şu hale getirdik:

$$\left\lceil \frac{(n-3k)-k}{2} \right\rceil +1$$

Bunu daha düzenli hale getirmek istersek:

$$\left\lceil \frac{(n-3k)-k}{2} \right\rceil +1 = \left\lceil \frac{n-4k}{2} \right\rceil +1$$

$$= \left\lceil \frac{n}{2} - 2k \right\rceil +1$$

$$= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - (2k - 1) \text{ dir.}$$

Bu şekilde 2. Ve 3. Kenar arasındaki minimum farkın çevre çiftken ve tek iken farklı olması önemli değildi.

Bu formülü 1. kenar en fazla kaç olana kadar tekrarlamamız gerektiğine bakmak için her bir çevre uzunluğu için 1. Kenarlarına göre sistematik bir tablo yaptık.

1. Kenar \ Çevre Uzunluğu	1	2	3	4	5	6
4	1					
5	1					
6	2					
7	2					
8	3	1				
9	3	1				
10	4	2				
11	4	2				
12	5	3	1			
13	5	3	1			
14	6	4	2			
15	6	4	2			
16	7	5	3	1		
17	7	5	3	1		
	.	.	.	.	.	.

Tabloda görüldüğü üzere 1. Kenarın alabileceği en büyük değer, çevre uzunluğu 4'ten başlayarak dörder artırıldığında 1er artıyordu.

O zaman 1. Kenar en fazla çevre uzunluğunun 4'te birinin tam değeri kadar olabilirdi. Herhangi bir çevre uzunluğu için kaç tane üçgen oluşturmayan üçlü sayısını şu şekilde bulduk:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/4 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (2k - 1)$$

Bir çevre uzunluğu için en fazla kaç, üçgen oluşturabilen üçlü bulunduğunu bulmak için, tüm üçlülerden üçgen oluşturmayanları çıkarmayı planlamıştık. Buradan üçgen oluşturan üçlülerin sayısını şöyle bulduk:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-k}{2} - (k-1) \right\rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor n/4 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (2k - 1)$$

Sonuçlar ve Tartışma: Bu çalışmada elimize aldığımız belirli bir uzunluktaki çubukları üç tamsayı uzunluğa ayırarak bu parçalardan üçgenler elde etmek istediğimizde kaç üçgen elde edebileceğimizi bulmaya çalıştık. Çözümü şöyle bulduk:

Bize verilen çubuk uzunluğu üçgenin çevresini oluşturacağından çevre uzunluğuna n dersek bu çubuktan oluşabilecek kenarları tam sayı olan üçgen sayısı şu formülle bulunur;

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-k}{2} - (k-1) \right\rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor n/4 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (2k-1)$$

Kaynaklar:

1. http://www.algebra.com/algebra/homework/Geometry-proofs/Geometry_proofs.faq.question.118665.html
2. <http://mathworld.wolfram.com/TriangleCounting.html>
3. <https://answers.yahoo.com/question/index?qid=20090502232714AAJ2jfJ>
4. http://basvurular.meb.gov.tr/bubenimeserim/prj_bankasi_ayrinti.aspx?projeNo=2011093925
5. Vikipedi Tam Değer – URL:
http://tr.wikipedia.org/wiki/Tam_de%C4%9Fer_fonksiyonu
6. İkiskare Üçgen Eşitsizliği – URL:
<http://www.ikskare.com/?pnum=12&pt=%C3%9C%C3%87GENLER-%C3%BC%C3%A7gen+e%C5%9Fitsizli%C4%9Fi+ve+benzerlik>

IZGARA PROBLEMLERİ

HAZIRLAYANLAR

M. F. MEYDAN

T. T. UNAT

DANIŞMAN:

BARIŞ ARSLAN

ORDU BİLİM VE SANAT MERKEZİ

-2011-

(Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projesi Türkiye Üçüncüsü)

PROJE ÖZETİ

Bu projede bazı sayma problemleri (belirli özellikleri içeren sonlu kümelerin elemanlarını saymak) üzerinde çalıştık. Bu konuyla ilgili üç tane ızgara problemini ele aldık;

I.PROBLEM: n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye, doğuya veya kuzeydoğuya giderek, (n,n) noktasına kaç değişik yoldan ulaşabiliriz?

II. PROBLEM: Birinci problemde tanımladığımız yollardan kaç tanesi $y = x$ doğrusunun altında kalır (köşegen dahil) ?

III.PROBLEM: n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye veya doğuya giderek (n,n) noktasına giden yollardan kaç tanesi, yolun iki tarafında kalan alanlar farkı en çok 1 olacak şekilde böler?

Birinci ve ikinci problemlerde yolların sayısını tekrarlı permütasyon kullanarak toplam sembolü ile aşağıdaki gibi ifade ettik:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n-k, n-k, k} = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)! (n-k)! k!} \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k! (n-k)! (n-k+1)!} \quad (2)$$

Üçüncü problemdeki yolların sayısını B_n ile gösterelim. $P(j, k, n)$; n 'nin en çok k parçadan oluşan ve j den küçük eşit sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışların sayısı olmak üzere,

n çift sayı ise ,

$$B_n = P\left(n, n, \frac{n^2}{2}\right)$$

n tek sayı ise ,

$$B_n = P\left(n, n, \frac{n^2+1}{2}\right) + P\left(n, n, \frac{n^2-1}{2}\right)$$

Bu problem için kapalı bir formül bulamadık fakat istediğimiz tipteki yolların sayısını, bir doğal sayının parçalanışları cinsinden ifade ettik ve B_n ile B_{n-1} arasındaki bağıntıyı bulduk. Ayrıca $n=8$ değerine kadar olan küçük n değerleri için yolların sayısını hesapladık.

PROJE PLANI

Araştırma Konusu: Izgara Problemleri

- I. n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına kaç değişik yoldan ulaşabiliriz?
- II. n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına ulaşan yolların kaç tanesi $y = x$ doğrusunun altında kalır (köşegen dahil) ?
- III. n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye veya doğuya giderek (n,n) noktasına giden yollardan kaç tanesi yolun iki tarafında kalan alanlar farkı en çok 1 br^2 olacak şekilde böler?

Hipotezin Geliştirilmesi:

$n \times n$ boyutunda bir ızgarada sadece kuzey ve doğu adımlarını kullanarak $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına $\binom{2n}{n}$ değişik şekilde gidilir. Bu yollardan, $y = x$ doğrusunun altında kalan yolların sayısı $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ dir. Bu dizi C_n ile gösterilir ve bu sayılar, 19.yüzyılda yaşamış olan matematikçi Eugene Catalan' dan sonra Catalan sayılar diye adlandırılmıştır.

Bu bilgilerden esinlenerek kuzey ve doğu adımlarına kuzeydoğu adımı da ekleyerek yukarıda belirtilen I. ve II. problemi ortaya attık ve sayma fonksiyonlarını elde ettik.

I. ve II. problemle uğraşırken yolların, ızgaranın alanını nasıl böldüğü sorusu aklımıza geldi. n çift sayı ise, ızgaranın alanını iki eşit parçaya bölen yolların sayısını; n tek ise, yolun iki tarafında kalan alanlar farkı 1 br^2 olacak şekilde bölen yolların sayısını III. Problemde ele aldık. Bu problem ilk iki probleme göre daha zordu ve kapalı bir formül bulamadık. Bu yolların sayısını B_n ile gösterdik ve B_n 'i bir doğal sayının parçalanışları cinsinden ifade ettik.

Kullanılan Yöntem:

İlk iki ızgara probleminin çözümünde ,sayma problemlerinde çok kullanılan permütasyon, tekrarlı permütasyon ve kombinasyon kullanarak elde ettiğimiz sonuçları toplam sembolü ile ifade ettik.

III.problemde ise bir doğal sayının parçalanışlarından yola çıkarak problemi çözmeye çalıştık.Sayma fonksiyonunu parçalanışlar cinsinden ifade ettik.

Kaynaklar:

Properties of the poset of Dyck Paths ordered by the inclusion

<<http://garsia.math.yorku.ca/~zabrocki/papers/DPfinal.pdf>> , son erişim tarihi 14/01/2011

Partition(number theory)<[http://en.wikipedia.org/wiki/Partition %28number theory%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_%28number_theory%29)> ,

son erişim tarihi 14/01/2011

Enumerative Combinatorics, Volume1<<http://math.mit.edu/~rstan/ec/ec1.pdf>> , son erişim

tarihi 14/01/2011

Nesin,A., (2009), Matematiğe Giriş 3- Sayma, Nesin Matematik Köyü, İstanbul.

PROJE RAPORU

Proje Adı : Izgara Problemleri

Projenin Amacı :

Belirli özellikleri içere sonlu kümelerin eleman sayılarını bulmak her zaman çok kolay olmamaktadır. Bu projede saymayla ilgili kolaydan zora üç ızgara problemini ele aldık. Bu problemler için sayma fonksiyonlarını bulmayı amaçladık.

GİRİŞ:

$n \times n$ boyutunda bir ızgarada sadece kuzey ve doğu adımlarını kullanarak $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına $\binom{2n}{n}$ değişik şekilde gidilir. Bu yollardan, $y = x$ doğrusunun altında kalan yolların sayısı $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ dir. Bu dizi C_n ile gösterilir ve bu sayılar, 19.yüzyılda yaşamış olan matematikçi Eugene Catalan’ dan sonra Catalan sayılar diye adlandırılmıştır.

Catalan sayılar 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, . . . şeklinde artarak devam eder.

Bu bilgilerden esinlenerek kuzey ve doğu adımlarına kuzeydoğu adımı da ekleyerek, I.problemden $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden yolların sayısını; II. problemde $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına giden ve $y = x$ doğrusunun altında kalan (köşegen dahil olmak üzere) yolların sayısını hesapladık. II. problemdeki yolların sayısını $f(n)$ ile gösterdik ve aşağıdaki formülü elde ettik:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k! (n-k)! (n-k+1)!}$$

Bu problemlerle uğraşırken yolların, ızgaranın alanını nasıl böldüğü sorusu aklımıza geldi. n çift sayı ise, ızgaranın alanını iki eşit parçaya bölen yolların sayısını; n tek ise, yolun iki tarafında kalan alanlar farkı 1 birim² olacak şekilde bölen yolların sayısını III. Problemde ele aldık. Bu problem ilk iki probleme göre daha zordu ve kapalı bir formül bulamadık. Bu yolların sayısını B_n ile gösterdik ve B_n ‘i bir doğal sayının parçalanışları cinsinden ifade ettik:

n çift sayı ise ,

$$B_n = p\left(n, n, \frac{n^2}{2}\right)$$

n tek sayı ise ,

$$B_n = p\left(n, n, \frac{n^2+1}{2}\right) + p\left(n, n, \frac{n^2-1}{2}\right)$$

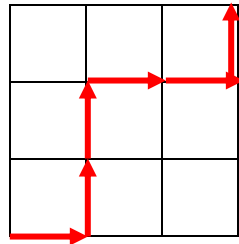
PROBLEM1: n pozitif bir tam sayı olmak üzere n x n boyutunda bir ızgarada (0,0) noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına kaç değişik yoldan ulaşabiliriz?

Öncelikle küçük n değerleri için hesaplama yapalım: 1 br doğuya gitmeyi D , 1 br kuzeye gitmeyi K ve 1 br kuzeydoğu istikametine gitmeyi Ç harfleri ile simgeleyelim.

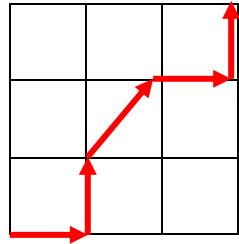
n=1 için; 3 durum vardır. KD, DK, Ç

n=2 için; 11 durum vardır. KKDD, KDKD, KDDK, DKKD, DKDK, DDKK, KÇD, KDÇ, DKÇ, DÇK, ÇÇ

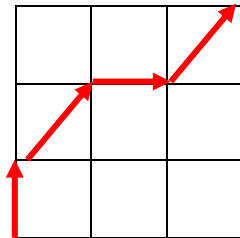
n=3 için; 63 durum vardır:



Yukarıdaki şekilde (0,0) noktasından başlayarak sadece doğuya veya kuzeye giderek (3,3) noktasına ulaşan bir yol gösterilmektedir. (DKKDDK) Bu tip yolların sayısını hesaplayalım. 6 seçenekten 3 D'yi $\binom{6}{3}$ geriye kalan 3 K'yı $\binom{3}{3}$ değişik şekilde seçebileceğimizden toplam $\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \binom{6}{3} = 20$ durum vardır. Veya tekrarlı permütasyondan , DDDKKK sözcüğünde harflerin yerlerini değiştirerek kaç değişik sözcük (anlamalı olması gerekmiyor) üretebiliriz. $\frac{6!}{3!3!} = 20$ değişik sözcük üretebiliriz.



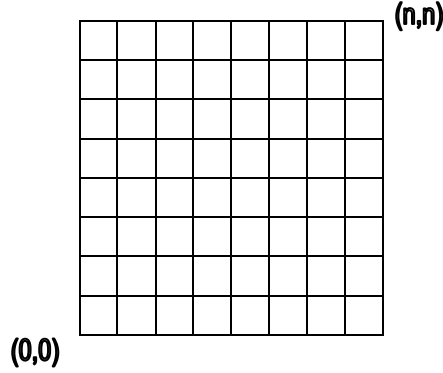
Yukarıdaki şekilde olduğu gibi sadece 1 defa kuzeydoğuya (çapraz) gidelim. (DKÇDK) Bu tip yollardan $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$ tane vardır.



Yukarıdaki şekilde olduğu gibi 2 kez kuzeydoğuya gidelim. (KÇDÇ) Bu tip yollardan $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ tane var. Son olarak 3 kez kuzey doğuya gidelim (ÇÇÇ) Bu tip yollardan $\frac{3!}{3!0!0!} = 1$ tane olmak üzere toplam $20+30+12+1 = 63$ değişik yol vardır.

Küçük n değerleri için yaptığımızı (n x n) boyutundaki ızgara için genelleyelim. Önce bir tanım verelim:

TANIM1: $\binom{n}{k,m,r} = \frac{n!}{k!m!r!}$



Hiç çapraz gitmeden (0,0) noktasından (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n,n,0}$

1 defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-1}{n-1,n-1,1}$

2 defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-2}{n-2,n-2,2}$

3 defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-3}{n-3,n-3,3}$

.....

k defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-k}{n-k,n-k,k}$

n defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-n}{n-n,n-n,n}$

Bütün bu yolların toplamı (0,0) noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısıdır.Bu toplamı, toplam sembolü ile ifade edelim:

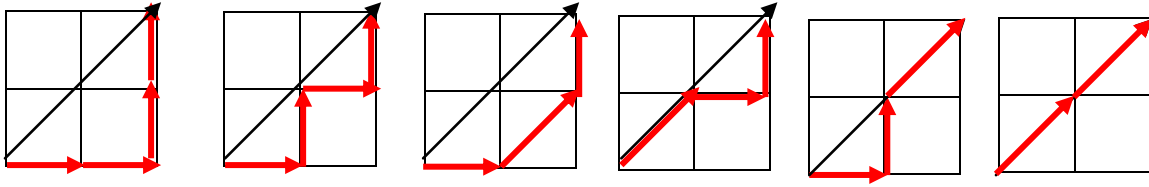
$$\sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n-k,n-k,k} = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!(n-k)!k!} \quad (1)$$

PROBLEM2: n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına ulaşan yolların kaç tanesi $y = x$ doğrusunun altında kalır? (köşegen dahil)

Önce küçük n değerleri için hesaplama yapalım:

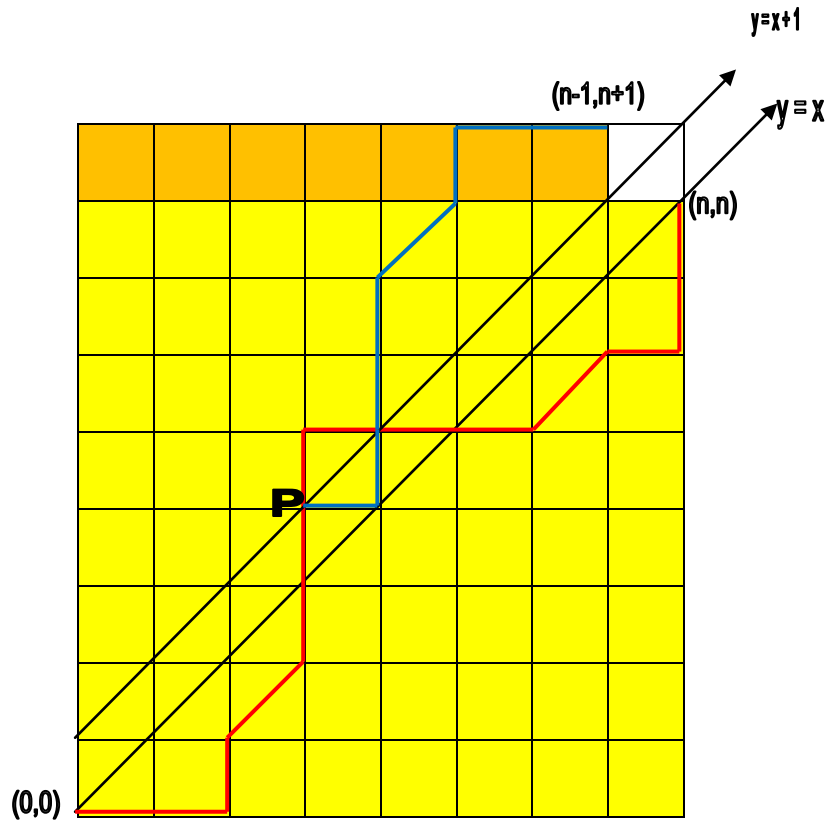
$n=1$ için; 2 durum vardır. DK, Ç

$n=2$ için; 6 durum DDKK, DKDK, DÇK,ÇDK, DKÇ,ÇÇ aşağıda gösterilmiştir.



$n=3$ için; 18 durum vardır.

Küçük n değerleri için yaptığımızı $(n \times n)$ boyutundaki ızgara için genelleleyelim.



Yukarıdaki şekilde (0,0) noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına ulaşan yollardan biri kırmızı renkle gösterilmiştir.Bu yol istediğimiz özellikte değildir çünkü $y = x$ doğrusunun üstüne çıkmıştır.Bu tip yolları ‘kötü yol’ diye adlandıralım.Bu kötü yolun $y = x$ doğrusuna değdiği ilk noktadan sonraki ilk adımında ulaştığı nokta P ile gösterilmiştir. P noktasından geçecek şekilde $y = x$ doğrusuna paralel çizelim. $y = x + 1$ doğrusunu elde ederiz.P noktasından sonraki yolu $y = x + 1$ doğrusuna göre yansıtalım ($y = x$ doğrusuna göre simetriğini alalım).Bu yol mavi renkle gösterilmiştir. (0,0) noktasından başlayıp (n-1,n+1) noktasına ulaşmaktadır. P noktasından itibaren her kırmızı yola karşılık gelen bir mavi yol bulabiliriz.Bu eşleme 1-1 ve örtendir.Bundan dolayı (0,0) dan (n,n) noktasına giden her kötü yolun sayısı, (0,0) dan (n-1,n+1) noktasına giden yolların sayısına eşittir.

Sonuç olarak (0,0) dan doğuya, kuzeye ve kuzeydoğuya giderek (n-1,n+1) noktasına ulaşan yolları sayarsak kötü yolların sayısını bulmuş oluruz.Bunun için birinci problemi çözerken kullandığımız mantığı kullanalım:

Hiç çapraz gitmeden (0,0) noktasından (n-1,n+1) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n}{n-1,n+1,0}$

1 defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n-1,n+1) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-1}{n-2,n,1}$

2 defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n-1,n+1) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-2}{n-3,n-1,2}$

3 defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n-1,n+1) noktasına ulaşan yolların sayısı $\binom{2n-3}{n-4,n-2,3}$

.

k defa çapraz giderek (0,0) noktasından (n-1,n+1) noktasına ulaşan yolların sayısı :

$$\binom{2n-k}{n-k-1, n-k+1, k}$$

En fazla (n-1) defa çapraz gidebiliriz. Tüm kötü yolların sayısını toplam sembolü ile yazalım:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k}{n-k-1, n-k+1, k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!}{(n-k-1)! (n-k+1)! k!} \quad (2)$$

(0,0) noktasından başlayarak kuzeye , doğuya veya kuzeydoğuya giderek (n,n) noktasına ulaşan yolların sayısından yukarıda bulduğumuz kötü yolların sayısını çıkarırsak istediğimiz tipteki yolların sayısını bulmuş oluruz. Bu yolların sayısını f(n) ile gösterelim.

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n-k, n-k, k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k}{n-k-1, n-k+1, k} \quad (3)$$

(3) eşitliğinde bulunan üst indisleri eşitleyip denklemi düzenleyelim;

$$f(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k}{n-k, n-k, k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k}{n-k-1, n-k+1, k}$$

$$f(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{2n-k}{n-k, n-k, k} - \binom{2n-k}{n-k-1, n-k+1, k} \right]$$

$$f(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(2n-k)!}{(n-k)!(n-k)!k!} - \frac{(2n-k)!}{(n-k-1)!(n-k+1)!k!} \right]$$

$$f(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!}{k!} \left[\frac{1}{(n-k)!(n-k)!} - \frac{1}{(n-k-1)!(n-k+1)!} \right]$$

$$f(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!(n-k+1)!}$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!(n-k+1)!} \quad (4)$$

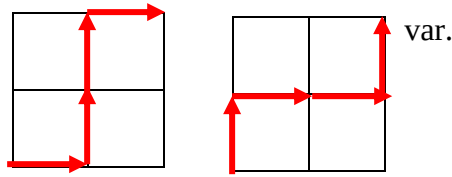
PROBLEM3: n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye veya doğuya giderek (n,n) noktasına giden yollardan kaç tanesi yolun iki tarafında kalan alanlar farkı en çok 1 br^2 olacak şekilde böler?

(n çift sayı ise , ızgaranın alanını iki eşit parçaya bölen yolların sayısı kaçtır? n tek ise yolun iki tarafında kalan alanlar farkı 1 br^2 olacak şekilde bölen yolların sayısı kaçtır?)

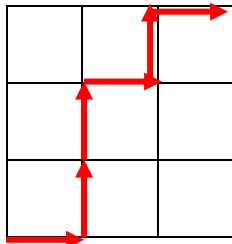
Öncelikle küçük n değerleri için hesaplama yapalım:

$n=1$ için; 2 durum vardır.

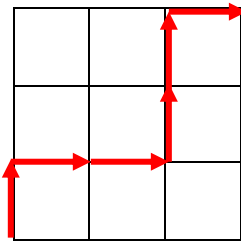
$n=2$ için; 2 durum



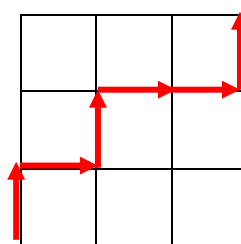
$n=3$ için 6 durum var . Iızgaranın alanı 9 br^2 olduğundan üstte kalan alan 4 br^2 altta kalan 5 br^2 olacak şekilde veya üstte kalan alan 5 br^2 altta kalan alan 4 br^2 olacak şekilde bölelim.



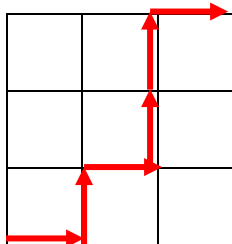
$$4 = 3+1$$



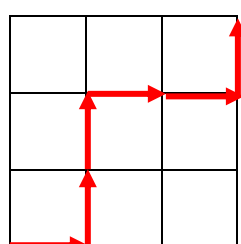
$$4 = 2+2$$



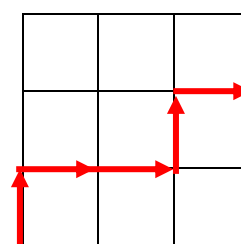
$$4 = 2+1+1$$



$$5 = 3+2$$



$$5 = 3+1+1$$



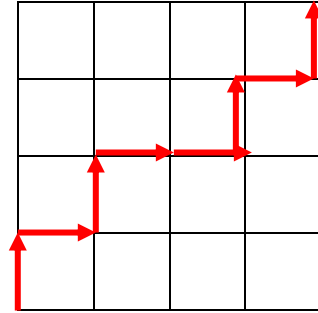
$$5 = 2+2+1$$

$4 = 3+1$ yazılışında ; 4 yolun üstünde kalan toplam alanı , 3 birinci sütunda yolun üstünde kalan alanı ve 1 ikinci sütunda yolun üstünde kalan alanı gösteriyor. Yukarıdaki ilk üç şekildeki yollar aşağıdaki üç şekildeki yolların $y = x$ doğrusuna göre simetrikleri olduğundan sayıları eşittir.

$n=4$ için toplam alan 16 br^2 dir . $16/2 = 8$ sayısının bazı parçalanışlarına bakalım. 4×4 lük ızgarada en fazla bir sütunda 4 br^2 lik alan olduğundan 8 i parçalarken en çok 4 sayısını kullanmalıyız ayrıca parça sayısı en çok 4 olmalı. Bu koşullardaki 8 in parçalanışı aşağıda gösterilmiştir.

$(4, 4), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (4, 2, 1, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 1, 1), (3, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2)$

$n = 4$ için aşağıdaki şekilde 8 ' in $(3, 2, 2, 1)$ parçalanışı gösterilmiştir. Bu parçalanış alanı iki eşit parçaya böler. Bu şekilde 4×4 lük ızgarada alanı ikiye bölen yolların sayısı 8 dir.



$$8 = 3 + 2 + 2 + 1$$

Şimdi $n = 5$ için 25 br^2 lik alanı, alanlar farkı en çok 1 olacak şekilde parçalayalım. 13 br^2 üstte 12 br^2 altta olduğu durumda: 13 sayısının yukarıda tanımladığımız şekildeki parçalanışlarına bakalım.

$(5, 5, 3), (5, 5, 2, 1), (5, 5, 1, 1, 1), (5, 4, 4), (5, 4, 3, 1), (5, 4, 2, 2), (5, 4, 2, 1, 1), (5, 3, 3, 2), (5, 3, 3, 1, 1), (5, 3, 2, 2, 1), (5, 2, 2, 2, 2), (4, 4, 4, 1), (4, 4, 3, 2), (4, 4, 3, 1, 1), (4, 4, 2, 2, 1), (4, 3, 3, 3), (4, 3, 3, 2, 1), (4, 3, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 1), (3, 3, 3, 2, 2)$

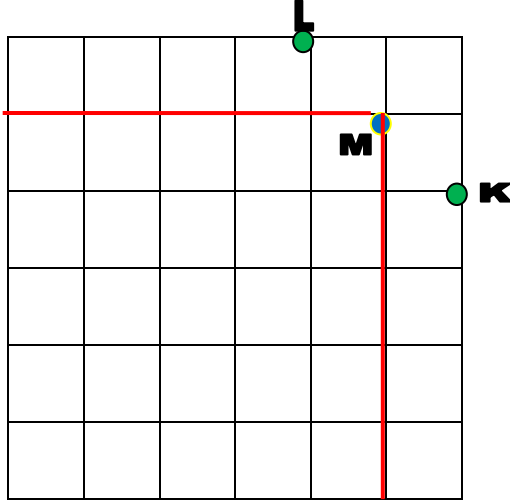
Toplam 20 tane var. Şimdi 12 br^2 üstte 13 br^2 altta kalacak şekilde , 12 nin tanımladığımız şekilde parçalanışlarının sayısını bulalım:

$(5, 5, 2), (5, 5, 1, 1), (5, 4, 3), (5, 4, 2, 1), (5, 4, 1, 1, 1), (5, 3, 3, 1), (5, 3, 2, 2), (5, 3, 2, 1, 1), (5, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 4), (4, 4, 3, 1), (4, 4, 2, 2), (4, 4, 2, 1, 1), (4, 3, 3, 2), (4, 3, 3, 1, 1), (4, 3, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 2, 1), (3, 3, 2, 2, 2)$

Simetriden dolayı : 13 br^2 üstte 12 br^2 altta olduğu parçalanışların sayısı , 12 br^2 üstte 13 br^2 altta olduğu parçalanışların sayısına eşittir.

20 tane parçalanış var. 5×5 lik ızgarada $20+20 = 40$ değişik parçalanış var. Sonuç olarak $n=5$ için 40 durum var.

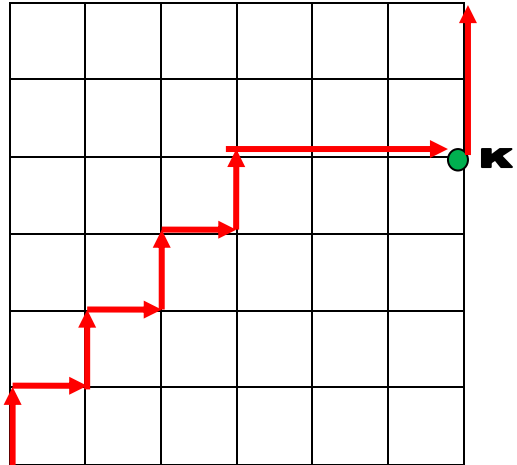
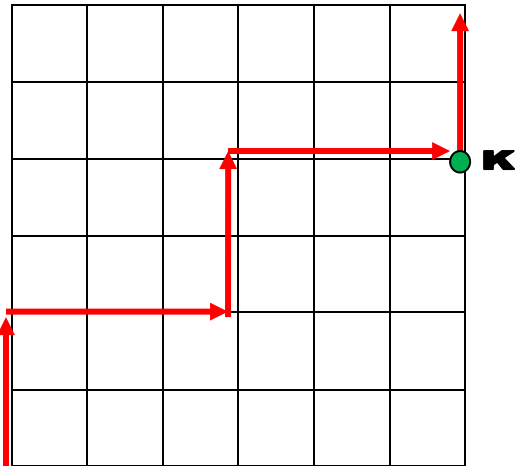
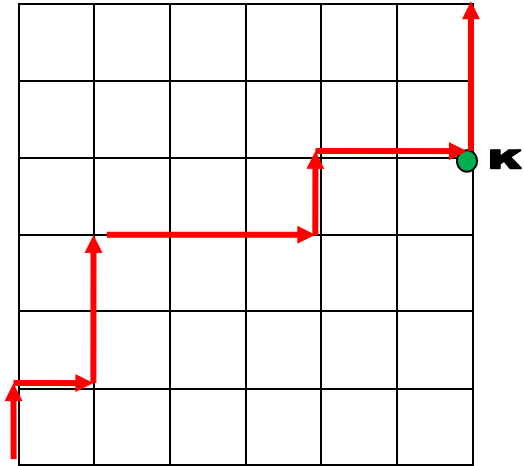
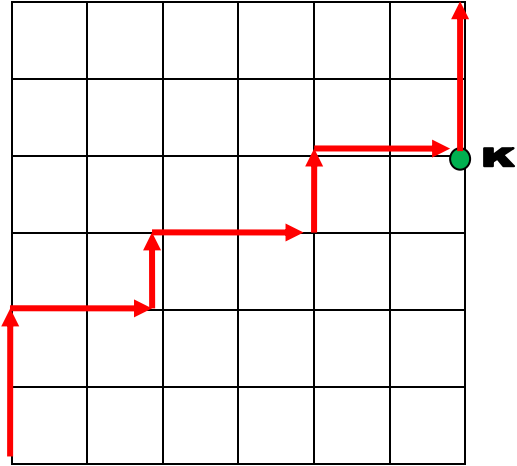
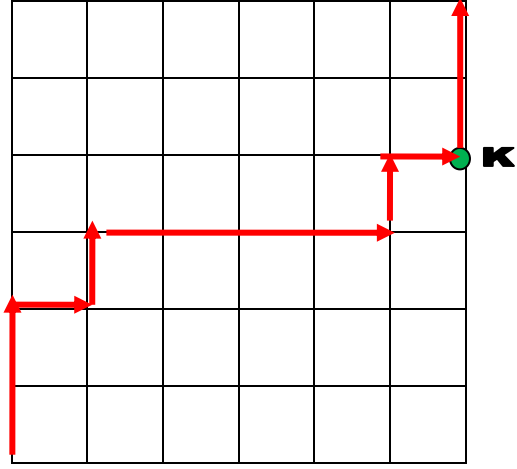
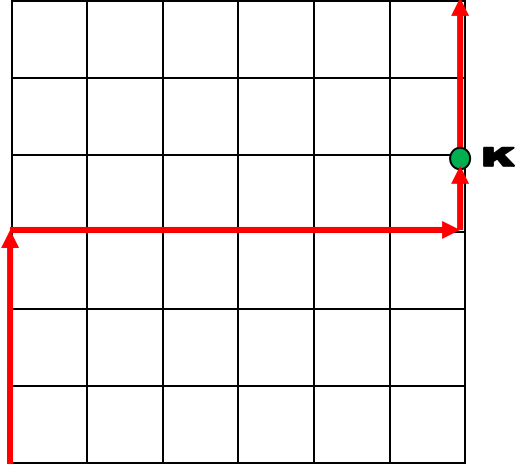
n=6 için 6 x 6 lık ızgarada alanı 2 eşit parçaya bölen yolların sayısını bulalım. $36/2 = 18$ in istediğimiz türden parçalanışlarını yazmadan 5 x 5 lik ızgaranın bulduğumuz 40 parçalanışını kullanarak sonuca ulaşmaya çalışalım:

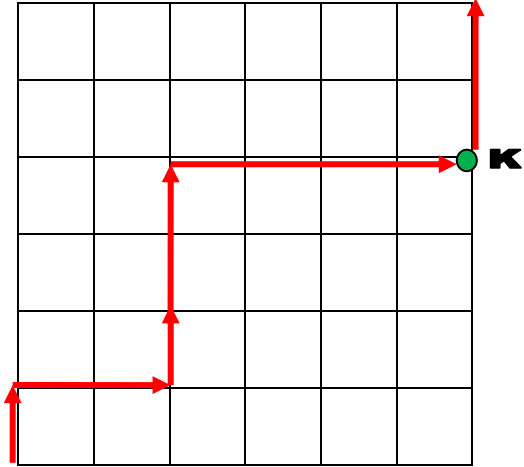
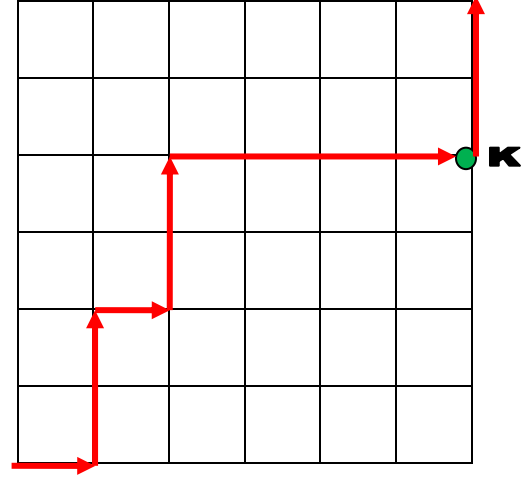
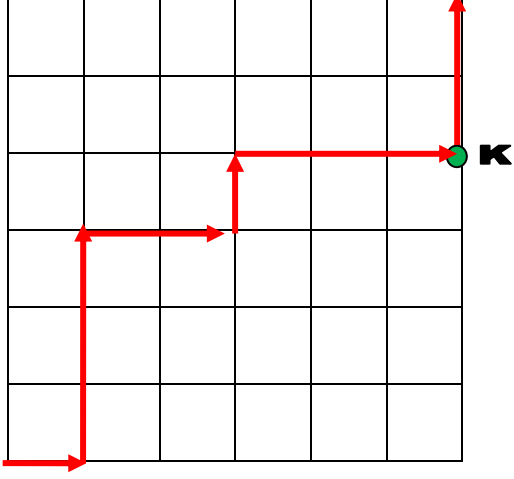


Yukarıdaki ızgarada (0,0) noktasından (6,6) noktasına kuzeye ve doğuya giderek toplam $\binom{12}{6} = 924$ değişik yoldan gidilebilir. (6,6) noktasına gitmek için K veya L ya da M noktalarından geçmek zorundayız. M ye uğrayarak (6,6) noktasına $\binom{10}{5} \cdot \binom{2}{1} = 504$. K ya uğrayarak $\binom{10}{4} = 210$ benzer şekilde L noktasına uğrayarak 210 değişik yoldan gidilir.
 $924 = 504 + 210 + 210$

Sonuç olarak alanı ikiye bölen yolların sayısını hesaplamak için M den K dan veya L den geçerek alanı iki eşit parçaya bölen yolların sayısını hesaplamalıyız. (0,0) dan M ye giden 5x5 lik ızgarada alanı 1 br^2 farkla ikiye bölen bir yol düşünelim 12 br^2 üstte 13 br^2 altta ise M den sonra doğuya sonra kuzeye giden yol 6 x 6 lık ızgaranın alanını ikiye böler. 13 br^2 üstte 12 br^2 altta ise M den sonra önce kuzeye sonra doğuya giden yol 6 x 6 lık ızgaranın alanını ikiye böler. Bu yollardan tam 40 tane olduğunu yukarda hesaplamıştık. K veya L noktalarından geçen ve 6x6 lık ızgaranın alanını ikiye bölen yolların sayısını bulmamız yeterlidir. K ve L simetrik olduğu için sadece K dan geçenleri hesaplayıp ikiyle çarpmalıyız.

K noktasından geçerek alanı ikiye bölen 9 tane yol aşağıda gösterilmiştir





$B_6 = B_5 + 2 \cdot 9 = 40 + 18 = 58$ dir. 6 X 6 lık ızgarada alanı iki eşit parçaya bölen yolların sayısı 58 dir

TANIMLAR

$P(n)$, n nin parçalanış sayısı

$P(k, n)$, n nin k dan büyük eşit sayılar kullanarak yazıldığı parçalanışlar.

$P_k(n)$; n nin tam olarak k parçadan oluşan(uzunluğu k olan) parçalanışlarının sayısı.

$P_k(r, n)$; n nin k parçadan oluşan r den büyük eşit sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışlar.

$P_{\leq k}(n)$, n nin en çok k parçadan oluşan parçalanışlarının sayısı

$P(j, k, n)$, n nin en çok k parçadan oluşan ve j den küçük eşit sayılar kullanarak yazıldığı parçalanışların sayısı

B_n , n çift sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda bir ızgarada $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye veya doğuya giderek (n,n) noktasına giden yollardan alanı iki eşit parçaya bölen veya eğer n tek sayı ise yolun iki tarafında kalan alanlar farkı en çok 1 br² olacak şekilde bölen yolların sayısı olsun.

ÖZELLİKLER

- 1) $P_1(n) = 1$
- 2) $P_n(n) = 1$
- 3) $n > 1$ ise , $p_{n-1}(n) = 1$
- 4) $k > n$ ise , $P_k(n) = 0$
- 5) $P_{\leq k}(n) - P_{\leq k-1}(n) = P_k(n)$: n nin tam olarak k parçadan oluşan parçalanışlarının sayısı.
- 6) $P(j, k, n) = P(k, j, n)$
- 7) n tek sayı ise , $P(n, n, \frac{n^2+1}{2}) = P(n, n, \frac{n^2-1}{2})$

Örnek:

$$P(5) = 7$$

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$$

$$P_1(5) = 1 \quad P_2(5) = 2 \quad P_3(5) = 2 \quad P_4(5) = 1 \quad P_5(5) = 1 \quad P_{\leq 3}(5) = 5 \quad P(2,5) = 3 \quad P(3,3,5) = 3$$

$k = 1$ ise $y = 4$ doğrusunun üstündeki alan $1br^2$, $k = 2$ ise alan $2br^2$, $k = 3$ için alan $3br^2$.
 $k = 8$ ise alan $8br^2$ dir.fakat $4. (8-k) \geq k$.1 olduğundan k en çok 6 olmalı.

58

k=1	k=2		k=3			k=4				k=5				
A=2	A=3	A=4	A=4	A=5	A=6	A=5	A=6	A=7	A=8	A=6	A=7	A=8	A=9	A=10
P(2)	P(3)	P(4)	P(4)	P(4,5,5)	P(4,5,6)	P(4,4,5)	P(4,4,6)	P(4,4,7)	P(4,4,8)	P(4,3,6)	P(4,3,7)	P(4,3,8)	P(4,3,9)	P(4,3,10)
2	3	5	5	6	8	5	7	7	8	5	4	4	3	2

k= 6 durumunda A=7 veya A=8 olabilir. $P(4,2,7)=1$, $P(4,2,8)=1$

h= 1 durumunda ; K noktasından geçerek alanı iki eşit parçaya bölen yolların sayısı,

$$2+3+5+5+6+8+5+7+7+8+5+4+4+3+2+1+1 = 76$$

Toplam sayı $1+18 + 76 =95$ dir. Ayrıca K noktasından geçip alanı ikiye bölen yolların sayısı $64/2=32$ 'nin tam olarak 8 parçadan oluşan $2 \leq j \leq 8$ sayılar kullanılarak yazılan parçalanışların sayısına eşittir. Bu sayı da 95'e eşittir.

K noktasından ve L noktasından geçerek alanı iki eşit parçaya bölen yolların sayısı eşit olacağından $95 \cdot 2 =190$ yol vardır . Bu yollara M den geçenleri eklemeliyiz. Alanı ikiye bölüp M den geçenlerin sayısı 7×7 lik ızgaradaki alanlar farkı en çok 1 br^2 olacak şekilde bölenlerin sayısına eşittir . Sonuç olarak ; $B_8 = B_7 + 190$ dir.

Şimdi B_7 nin değerini hesaplayalım. $7^2 = 49 = 25 +24$;

$$B_7 = 2 P(7, 7, 25)$$

25 in 7 veya 7 den küçük sayılar kullanarak en çok 7 parçadan oluşan parçalanışlarını yazalım:

7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	4
4	3	2	2	1	5	4	3	3	2	2	5	4	4	3	3	3	2	2
	1	2	1	1		1	2	1	2	1	1	2	1	3	2	1	2	2
			1	1				1	1	1			1		1	1	2	1
				1						1					1		1	

7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	5
4	4	3	3	3	2	3	3	3	2	6	5	4	4	3	3	3	2	2
2	1	3	2	2	2	3	3	2	2		1	2	1	3	2	1	2	2
1	1	1	2	1	2	2	1	2	2				1		1	1	2	1
	1			1	1		1	1	2						1		1	

7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5
5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	5
5	4	4	4	3	3	3	2	4	4	4	4	3	3	3	2	3	3	3	5
1	3	2	1	3	2	2	2	4	3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	3
1		1	1	1	2	1	2		1	2	1	2	1	2	2	3	2	2	
			1			1	1				1		1	1	2		1	2	
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	4
5	5	4	4	4	4	3	3	3	2	4	4	4	4	3	3	3	3	3	4
2	1	4	3	2	2	3	3	2	2	4	3	3	2	3	3	2	3	3	4
1	1		1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	3	2	2	3	2	2
	1				1		1	1	2			1	1		1	2	1	2	

7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	4	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5
4	4	4	4	3	3	3	3	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	5	5
4	3	3	2	3	3	3	3	1	2	1	3	2	1	3	2	2	2	3	2
1	3	2	2	3	2	3	3			1		1	1	1	2	1	2		1
1		1	2	1	2	2	3						1			1	1		

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	5	5
5	4	4	4	4	3	3	3	2	4	4	4	4	3	3	3	3	3	5	5
1	4	3	2	2	3	3	2	2	4	3	3	2	3	3	2	3	3	4	3
1		1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	3	2	2	3	2		1
1				1		1	1	2			1	1		1	2	1	2		

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4
5	5	4	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	3	3	3	4	4	4
2	2	4	3	3	2	3	3	2	4	4	3	3	2	3	3	3	4	4	3
2	1	1	2	1	2	3	2	2	2	1	3	2	2	3	2	3	3	2	3
	1			1	1		1	2		1		1	2	1	2	2		1	1

6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	4	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3
4	3	3	5	5	5	5	5	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	3	3
3	3	3	5	4	3	3	2	4	3	3	2	3	3	4	4	3	3	3	3
2	3	3		1	2	1	2	2	3	2	2	3	2	3	2	3	2	3	3
2	2	3				1	1			1	2	1	2		1	1	2	2	3

5	5	5	5	5	4	4	4												
4	4	4	4	4	4	4	4												
4	4	4	4	4	4	4	4												
4	4	4	4	3	4	4	4												
4	4	4	3	3	4	4	3												
4	3	2	3	3	4	3	3												
	1	2	2	3	1	2	3												

25 in 7 veya 7 den küçük sayılar kullanarak en çok 7 parçadan oluşan parçalanışlarının sayısı 168 dir. 24 ün 7 veya 7 den küçük sayılar kullanarak en çok 7 parçadan oluşan parçalanışlarının sayısı da 178 dir.(önerme1 de aşağıda ispatı verilmiştir.)

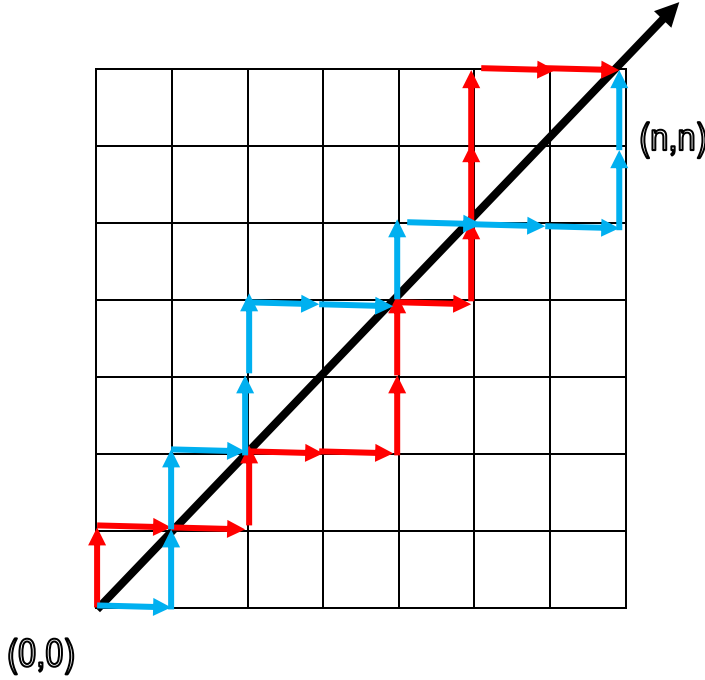
$$B_7 = 2 \cdot P(7, 7, 25) = 2 \cdot 168 = 336$$

$$B_8 = B_7 + 190 = 336 + 190 = 526$$

n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 ve 8 değerleri için B_n leri yazalım:

n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
2	2	6	8	40	58	336	526

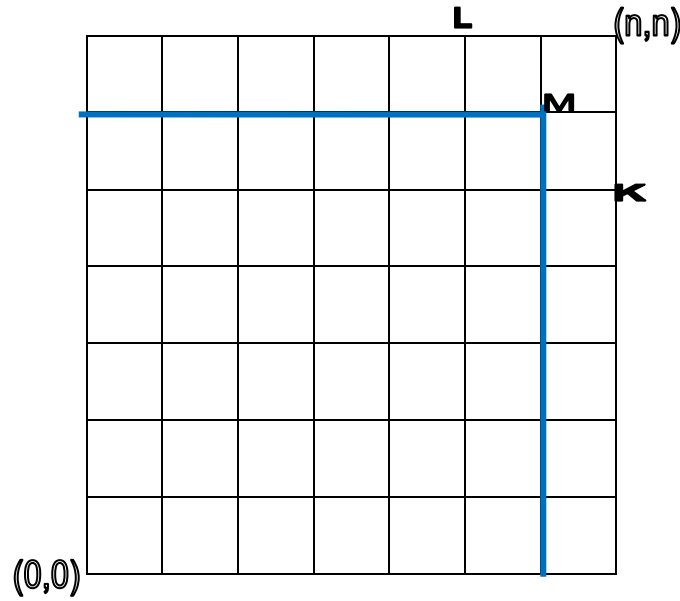
ÖNERME1: n tek sayı ise , $P(n, n, \frac{n^2+1}{2}) = P(n, n, \frac{n^2-1}{2})$



n tek sayının olduğundan ızgaranın alanı $n^2 = \frac{n^2+1}{2} + \frac{n^2-1}{2}$ dir. $\frac{n^2+1}{2} - \frac{n^2-1}{2} = 1$ olduğundan alanlar arasındaki fark 1 br^2 dir. $(0,0)$ noktasından başlayarak kuzeye veya doğuya giderek (n,n) noktasına giden ve yolun iki tarafında kalan alanlar farkı en çok 1 br^2 olacak şekilde bölen yolları sayalım. Yolun üstünde $\frac{n^2+1}{2} \text{ br}^2$ altında $\frac{n^2-1}{2} \text{ br}^2$ lik alan olacak şekilde bölen yollardan biri kırmızı renkle gösterilmiştir. Bu yolun $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan mavi yol , üstte $\frac{n^2-1}{2} \text{ br}^2$, altta $\frac{n^2+1}{2} \text{ br}^2$ olacak şekilde böler. Her kırmızı yola karşılık alanı istediğimiz şartta bölen bir mavi yol bulabiliriz. Bundan dolayı kırmızı yolların sayısı mavi yolların sayısına eşittir. Kırmızı tipinde yolların sayısı: $\frac{n^2+1}{2}$ nin , en çok n parçalı ve n den küçük eşit sayılar kullanarak yazılan parçalanışların sayısına eşittir. Yani $P(n, n, \frac{n^2+1}{2})$ dir. Mavi yolun üstünde kalan alan $\frac{n^2-1}{2}$ dir. Mavi tipinde yolların sayısı $\frac{n^2-1}{2}$ nin , en çok n parçalı ve n den küçük eşit sayılar kullanarak yazılan parçalanışların sayısına eşittir. $P(n, n, \frac{n^2-1}{2})$ ifadesine eşittir. Bu yollar birbirine eşit olacağından,

$$P(n, n, \frac{n^2+1}{2}) = P(n, n, \frac{n^2-1}{2})$$

B_n in B_{n-1} ve Parçalanışlar Cinsinden İfadesi



n tek sayı olmak üzere $(0,0)$ dan (n,n) noktasına giden ve alanlar arasındaki fark 1 br olacak şekilde alanı bölen yolları sayalım:

Bu yollardan her biri K noktasından, L noktasından veya M noktasından geçmek zorundadır. K noktasından ve L noktasından geçerek ızgaranın alanını bölenlerin sayıları eşittir. ($y = x$ doğrusuna göre simetrik olduklarından). M den geçerek $n \times n$ lik ızgaranın iki tarafında kalan alanlar farkı 1 br² olacak şekilde bölen yolların sayısını iki durumda inceleyelim:

I.DURUM: $(n-1) \times (n-1)$ lik ızgaranın alanını tam iki eşit parçaya bölerek devam eden;

II.DURUM : $(n-1) \times (n-1)$ lik ızgaranın iki tarafında kalan alanlar farkı 2 br² olacak şekilde bölerek devam eden;

I.durumda ; $(n-1) \times (n-1)$ lik ızgaranın alanını ikiye bölen yolların sayısını iki ile çarpmalıyız. Çünkü $(n-1, n-1)$ noktasından geçtikten sonra önce doğuya sonra kuzeye giderek (n,n) noktasına ulaşır veya önce kuzeye sonra doğuya giderek (n,n) noktasına ulaşır. Böylece alanlar arası fark her iki durumda da 1 br² olur. Bu yolların sayısı $2.B_{n-1}$ dir

II. durumda ; $(n-1)^2 = \frac{(n-1)^2}{2} + 1 + \frac{(n-1)^2}{2} - 1 = \left(\frac{A^2}{2} + 1\right) + \left(\frac{A^2}{2} - 1\right)$ durumunda alanlar farkı $2br^2$ dir. $\left(\frac{A^2}{2} + 1\right) br^2$ lik alan üstte $\left(\frac{A^2}{2} - 1\right) br^2$ altta olduğu durumda M noktasından sonra önce kuzeye sonra doğuya gidersek $n \times n$ ızgarasında yolun üstünde kalan alan $= \frac{(n-1)^2}{2} + 1 + n - 1$, altında kalan alan $= \frac{(n-1)^2}{2} - 1 + n$ dir. Böylece $n \times n$ lik ızgarada

alanlar farkı 1 br^2 olur. $(\frac{A^2}{2} + 1) \text{ br}^2$ lik alan altta $(\frac{A^2}{2} - 1) \text{ br}^2$ üstte olduğu durumda M noktasından sonra önce doğuya sonra kuzeye gidersek $n \times n$ lik ızgarada;

yolun üstünde kalan alan $= \frac{(n-1)^2}{2} - 1 + n$,altında kalan alan $= \frac{(n-1)^2}{2} + 1 + n - 1$ olur.Böylece $n \times n$ lik ızgarada alanlar farkı 1 br^2 olur.

$(\frac{A^2}{2} + 1) \text{ br}^2$ lik alan üstte $(\frac{A^2}{2} - 1) \text{ br}^2$ altta olduğu durumda yolların sayısı ;
 $P(n-1, n-1, \frac{(n-1)^2}{2} + 1)$ dir.

$(\frac{A^2}{2} + 1) \text{ br}^2$ lik alan altta $(\frac{A^2}{2} - 1) \text{ br}^2$ üstte olduğu durumda yolların sayısı ;
 $P(n-1, n-1, \frac{(n-1)^2}{2} - 1)$ dir.

Her iki durumdaki yollar $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan sayıları eşittir.Sonuç olarak II. Durumdaki yolların sayısı 2. $P(n-1, n-1, \frac{(n-1)^2}{2} - 1)$ dir.

M den geçerek $n \times n$ lik ızgaranın iki tarafında kalan alanlar farkı 1 br^2 olacak şekilde bölen yolların sayısı I. ve II. durumdaki yolların sayısının toplamıdır;

2. $[B_{n-1} + P(n-1, n-1, \frac{(n-1)^2}{2} - 1)]$ dir.

K noktasından geçerek bölen yolların sayısı $\frac{n^2+1}{2}$ nin n parçadan oluşan , $2 \leq j \leq n$ sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışların sayısı ile $\frac{n^2-1}{2}$ nin n parçadan oluşan $2 \leq j \leq n$ sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışların sayıları toplamına eşittir.K noktasından geçerek alanlar farkı 1 br^2 olacak şekilde bölen yolların sayısı L noktasından geçerek bölen yolların sayısına eşittir.Bu yolların sayısı:

2. $[P_n(2, \frac{n^2+1}{2}) - P_n(n+1, \frac{n^2+1}{2}) + P_n(2, \frac{n^2-1}{2}) - P_n(n+1, \frac{n^2-1}{2})]$

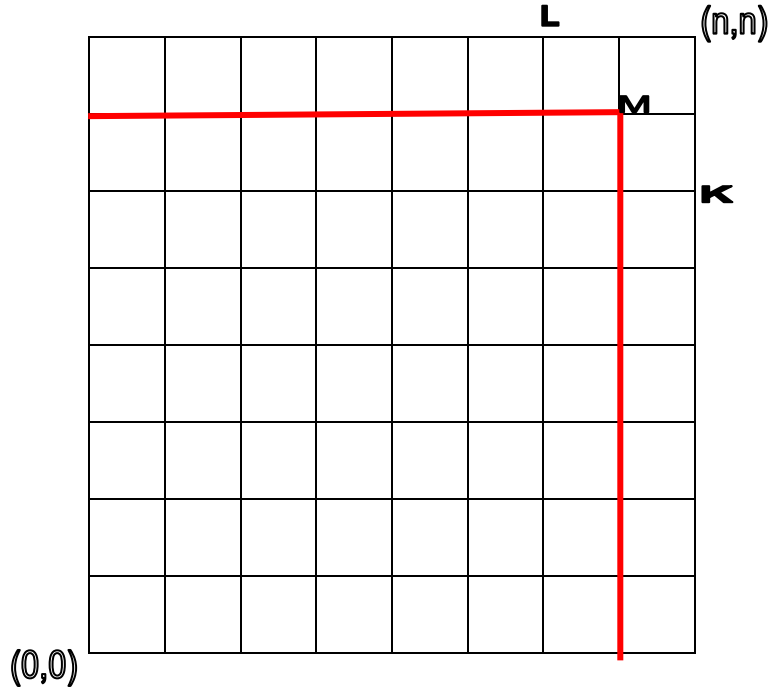
SONUÇ1: n tek sayı ise ,

$$B_n = 2. \left\{ B_{n-1} + P(n-1, n-1, \frac{(n-1)^2}{2} - 1) + P_n(2, \frac{n^2+1}{2}) - P_n(n+1, \frac{n^2+1}{2}) + P_n(2, \frac{n^2-1}{2}) - P_n(n+1, \frac{n^2-1}{2}) \right\}$$

$[P_n(2, \frac{n^2+1}{2}) - P_n(n+1, \frac{n^2+1}{2})]$ ifadesi $\frac{n^2+1}{2}$ nin n parçadan oluşan , $2 \leq j \leq n$ sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışların sayısıdır.

B_n in $P(j, k, n)$ türünden eşiti,

$$B_n = P(n, n, \frac{n^2+1}{2}) + P(n, n, \frac{n^2-1}{2}) = 2. P(n, n, \frac{n^2+1}{2}) = 2. P(n, n, \frac{n^2-1}{2})$$



n çift sayı olmak üzere (0,0) dan (n,n) noktasına giden ve ızgaranın alanını iki eşit parçaya bölen yolları sayalım:

Bu yollardan her biri K noktasından ,L noktasından veya M noktasından geçmek zorundadır.K noktasından ve L noktasından geçerek ızgaranın alanını bölenlerin sayıları eşittir.($y=x$ doğrusuna göre simetrik olduklarından).M den geçerek bölen yolların sayısı , $(n-1) \times (n-1)$ lik ızgaranın alanının iki tarafında kalan alanlar farkı $1b^2$ olacak şekilde bölen yolların sayısına eşittir. Çünkü $(n-1, n-1)$ noktasına ulaştığında $n \times n$ lik ızgaranın alanını iki eşit parçaya bölmek için $1b^2$ lik farkı sıfırlaması gerekir.Bunu da kuzeye veya doğuya gitme seçeneklerinden sadece birini seçerek yapabilir. K noktasından geçerek alanı ikiye bölen yolların sayısı $\frac{n^2}{2}$ nin n parçadan oluşan , $2 \leq j \leq n$ sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışların sayısına eşittir.

SONUÇ2: n çift sayı ise ,

$$B_n = B_{n-1} + 2 \cdot \{ [P_n(2, n^2/2) - P_n(n+1, n^2/2)] \}$$

$\{ \}$ ifadesi $n^2 / 2$ nin n parçadan oluşan , $2 \leq j \leq n$ sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanışların sayısıdır.

$$B_n \text{ in } P(j, k, n) \text{ türünden eşiti, } B_n = P(n, n, \frac{n^2}{2})$$

KAYNAKLAR:

Properties of the poset of Dyck Paths ordered by the inclusion

<<http://garsia.math.yorku.ca/~zabrocki/papers/DPfinal.pdf>> , son erişim tarihi 14/01/2011

Partition(number theory)<http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_%28number_theory%29> ,
son erişim tarihi 14/01/2011

Enumerative Combinatorics, Volume1<<http://math.mit.edu/~rstan/ec/ec1.pdf>> , son erişim
tarihi 14/01/2011

Nesin,A., (2009), Matematiğe Giriş 3- Sayma, Nesin Matematik Köyü, İstanbul.

F_n^p | F_m ŞARTININ ARAŞTIRILMASI

HAZIRLAYANLAR

E. KOŞAR

DANIŞMAN:

ERDOĞAN ÇAĞLAR

TOKAT BİLİM VE SANAT MERKEZİ

-2013-

(Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Araştırma Projesi Türkiye Üçüncüsü)

$F_n^p \mid F_m$ ŞARTININ ARAŞTIRILMASI

Proje çalışmamın konusu, matematiğin şüphesiz en meşhur ve ilgi çekici konularından olan fibonacci sayıları. Altın oran ve Fibonacci sayılarının, bitkilerin büyümesinin ve bazı katıların kristalografik yapısının incelenmesinden, veri tabanlarında arama yapmak için yazılan bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesine kadar çok geniş bir uygulama alanının olması sanırım bu ilginin haklılığının göstergesi.

Fibonacci sayılarında $F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m$ (Fibonacci sayıları ve altın oran-Şamil Akçağal-yüksek lisans tezi-Balıkesir Üniversitesi-2005). ve $F_n^2 \mid F_m \Leftrightarrow n.F_n \mid m$ (Matematik Dünyası 2003 yaz) olduğu bilinmektedir. Ama F_m 'in F_n 'in en fazla kaçınıcı kuvvetine bölünebileceği , F_n 'in herhangi bir kuvvetinin ilk olarak hangi Fibonacci sayısını bölebileceği gibi, Fibonacci dizisindeki terimlerin yüksek dereceden kuvvetlerinde bölme kuralları bulunmamaktadır.

→ F_n 'in herhangi bir kuvvetinin F_m 'yi bölmesi için F_n 'in F_m 'yi bölmesi gerekir. Bunun için de $n \mid m$ olduğundan bundan sonraki kısımlarda $F_m = F_{kn}$ olarak kullanılacaktır.

→Bu çalışma içerisinde zaman zaman $z = F_n$ ve $x = (F_{2n}/F_n)$ olarak kullanılacaktır.

Bu çalışmanın ana amacı $F_n^p \mid F_{kn}$ in gerek ve yeter şartını bulmaktır. Bu incelemeyi yapabilmek için önce F_{kn} i F_n in bir fonksiyonu olarak elde etmeye çalışacağız.

1) F_{kn} 'İN F_n 'İN BİR FONKSİYONU ŞEKLİNDE YAZILMASI

I.Yardımcı Eşitliklerin Elde Edilmesi

F_{kn} ile F_n arasındaki ilişkiyi incelemek için, F_{kn} / F_n ifadesinin n ve k'nın değişik değerlerinde çıkan sonuçlarını inceleyelim:

(Tablo 1-A)

	F_{2n}/F_n	F_{3n}/F_n	F_{4n}/F_n	F_{5n}/F_n	F_{6n}/F_n
n=1	1	2	3	5	8
n=2	3	8	21	55	144
n=3	4	17	72	305	1292
n=4	7	48	329	2255	15456
n=5	11	122	1353	15005	166408

Bu tablodaki sayılarla biraz uğraştığımızda şu eşitlikleri fark ederiz:

Lemma(1-a) n tek iken
 $(F_{2n}/F_n)^2 + 1 = F_{3n}/F_n$ dir.

Lemma(1-b) n çift iken
 $(F_{2n}/F_n)^2 - 1 = F_{3n}/F_n$ dir.

Lemma (2-a) n çift veya k ve n tek iken
 $(F_{kn}/F_n)^2 = (F_{(k-1)n}/F_n) \cdot (F_{(k+1)n}/F_n) + 1$
 dir.

Lemma (2-b) k çift ve n tek iken
 $(F_{kn}/F_n)^2 = (F_{(k-1)n}/F_n) \cdot (F_{(k+1)n}/F_n) - 1$ dir.

İspat Lemma(1-a):

Binet formülünde $F_n = (\alpha^n - \beta^n) / (\alpha - \beta)$ olduğundan

$$\begin{aligned} (F_{2n}/F_n)^2 + 1 &= \left(\frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) / (\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n) / (\alpha - \beta)} \right)^2 + 1 \\ &= (\alpha^n + \beta^n)^2 + 1 \\ &= \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} + 1 \end{aligned}$$

n tek ve $\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} &= \alpha^{2n} - 1 + \beta^{2n} \\ &= \alpha^{2n} + (\alpha\beta)^n + \beta^{2n} \\ &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{2n} + (\alpha\beta)^n + \beta^{2n})}{(\alpha^n - \beta^n)} \\ &= \frac{(\alpha^{3n} - \beta^{3n})}{(\alpha^n - \beta^n)} \\ &= F_{3n}/F_n \end{aligned}$$

İspat Lemma(1-b) :

$$(F_{2n}/F_n)^2 - 1 = \left(\frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n})/(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)} \right)^2 - 1$$

$$= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 1$$

$$= \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} - 1$$

n çift ve $\alpha.\beta = -1$ olduğundan

$$= \alpha^{2n} + 1 + \beta^{2n}$$

$$= \alpha^{2n} + (\alpha\beta)^n + \beta^{2n}$$

$$= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{2n} + (\alpha\beta)^n + \beta^{2n})}{(\alpha^n - \beta^n)}$$

$$= \frac{(\alpha^{3n} - \beta^{3n})}{(\alpha^n - \beta^n)}$$

$$= F_{3n}/F_n$$

İspat Lemma(2-a) :

$$\frac{(F_{(k-1)n} F_{(k+1)n})}{F_n^2} + 1 = \frac{(\alpha^{(k-1)n} - \beta^{(k-1)n})/(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)} \cdot \frac{(\alpha^{(k+1)n} - \beta^{(k+1)n})/(\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)} + 1$$

$(\alpha - \beta)$ ları sadeleştirip çarpma işlemini yapalım

$$= \frac{(\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} - \alpha^{(k+1)n} \cdot \beta^{(k-1)n} - \alpha^{(k-1)n} \cdot \beta^{(k+1)n})}{(\alpha^n - \beta^n)^2} + 1$$

n çift veya k ve n tek olduğundan

$$\alpha^{(k-1)n} \cdot \beta^{(k-1)n} = 1 \text{ dir}$$

$$= \frac{(\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} - \alpha^{2n} - \beta^{2n})}{(\alpha^n - \beta^n)^2} + 1$$

$$= \frac{\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} - 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha^n - \beta^n)^2}$$

n çift veya k ve n tek olduğu için

$$\alpha^n \cdot \beta^n = \alpha^{kn} \cdot \beta^{kn} \text{ olduğundan}$$

$$= \frac{\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} - 2\alpha^{kn}\beta^{kn}}{(\alpha^n - \beta^n)^2}$$

$$= \frac{(\alpha^{kn} - \beta^{kn})^2}{(\alpha^n - \beta^n)^2} = (F_{kn}/F_n)^2$$

İspat Lemma(2-b):

$$\frac{(F(k-1)n.F(k+1)n)}{F_n^2} - 1 = \frac{(\alpha^{(k-1)n} - \beta^{(k-1)n}) / (\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n) / (\alpha - \beta)} \cdot \frac{(\alpha^{(k+1)n} - \beta^{(k+1)n}) / (\alpha - \beta)}{(\alpha^n - \beta^n) / (\alpha - \beta)} - 1$$

$$= \frac{(\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} - \alpha^{(k+1)n} \cdot \beta^{(k-1)n} - \alpha^{(k-1)n} \cdot \beta^{(k+1)n})}{(\alpha^n - \beta^n)^2} - 1$$

k çift ve n tek olduğundan

$$\alpha^{(k-1)n} \cdot \beta^{(k-1)n} = (-1) \text{ dir}$$

$$= \frac{(\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} + \alpha^{2n} + \beta^{2n})}{(\alpha^n - \beta^n)^2} - 1$$

$$= \frac{\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} + 2\alpha^n \beta^n}{(\alpha^n - \beta^n)^2}$$

k çift ve n tek olduğundan

$$-\alpha^n \cdot \beta^n = \alpha^{kn} \cdot \beta^{kn} \text{ olduğundan}$$

$$= \frac{\alpha^{2kn} + \beta^{2kn} - 2\alpha^{kn} \beta^{kn}}{(\alpha^n - \beta^n)^2}$$

$$= \frac{(\alpha^{kn} - \beta^{kn})^2}{(\alpha^n - \beta^n)^2} = (F_{kn} / F_n)^2$$

II.(F_{kn}/ F_n) lerin (F_{2n}/ F_n) Cinsinden Yazılması

Şimdi (F_{3n}/ F_n) leri (F_{2n}/ F_n) cinsinden ve (F_{kn}/ F_n) leri (F_{(k-1)n}/ F_n) ve (F_{(k+1)n}/ F_n) cinsinden yazabiliyoruz. O halde (F_{2n}/ F_n) e x dediğimizde (F_{3n}/ F_n) i x cinsinden yazabiliriz. (F_{2n}/ F_n) ve (F_{3n}/ F_n) i x cinsinden bildiğimizde ise (F_{kn}/ F_n) leri x cinsinden, dolayısıyla da (F_{2n}/ F_n) cinsinden yazabiliriz. Birkaç k değeri için gerekli işlemleri yaptığımızda:

n tek iken

(Tablo 2-A)

(F _{2n} / F _n)	(F _{3n} / F _n)	(F _{4n} / F _n)	(F _{5n} / F _n)	(F _{6n} / F _n)	(F _{7n} / F _n)
X	X ² +1	X ³ +2X	X ⁴ +3X ² +1	X ⁵ +4X ³ +3X	X ⁶ +5X ⁴ +6X ² +1

n çift iken

(Tablo 2-B)

(F _{2n} / F _n)	(F _{3n} / F _n)	(F _{4n} / F _n)	(F _{5n} / F _n)	(F _{6n} / F _n)	(F _{7n} / F _n)
X	X ² -1	X ³ -2X	X ⁴ -3X ² +1	X ⁵ -4X ³ +3X	X ⁶ -5X ⁴ +6X ² -1

Sonuçlarını elde ederiz. Polinomlarda x in kuvvetlerinin belli bir nizamda gittiği ortadadır. Peki acaba katsayılar da belli bir düzen içerisinde mi sıralanmaktadır diye incelediğimizde x in katsayılarının

$$\binom{k-1}{0} \quad \binom{k-2}{1} \quad \binom{k-3}{2} \quad \binom{k-4}{3} \quad \dots$$

şeklinde olduğu görülecektir. Yani $x = (F_{2n}/F_n)$ olmak üzere

n tek iken

$$(F_{kn}/F_n) = \binom{k-1}{0}x^{k-1} + \binom{k-2}{1}x^{k-3} + \binom{k-3}{2}x^{k-5} + \binom{k-4}{3}x^{k-7} + \dots$$

n çift iken

$$(F_{kn}/F_n) = \binom{k-1}{0}x^{k-1} - \binom{k-2}{1}x^{k-3} + \binom{k-3}{2}x^{k-5} - \binom{k-4}{3}x^{k-7} + \dots$$

Her tarafı F_n ile çarpıp sağ kısmı da toplam sembolüyle ifade edersek, aşağıdaki Lemma'ları elde etmiş oluruz.

Lemma (3-a) n tek iken

$$F_{kn} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+1} \text{ dir.}$$

Lemma(3-b) n çift iken

$$F_{kn} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \text{ dir.}$$

Ara Lemma: $F_{m+n} + (-1)^n \cdot F_{m-n} = L_n$. F_m olduğu bilinen bir eşitliktir (Fibonacci ve Altın Oran- Tübitak s. 159). m, n 'nin bir tam katıyken

$F_{kn+n} + (-1)^n \cdot F_{kn-n} = L_n$. F_{kn} yazılabilir. $L_n = F_{2n}/F_n$ eşitliği vardır(Fibonacci ve Altın Oran- Tübitak) o halde L_n yerine

F_{2n}/F_n i gösteren x yazılabilir.

Sonuç 1 : Ara Lemma kullanılarak

“ $F_{(k+1)n} = x \cdot F_{kn} - (-1)^n \cdot F_{(k-1)n}$ ” elde edilir.

İspat Lemma 3-a :

İspatı tümevarım kullanarak yapacağız. $k=1$ ve $k=2$ için iddianın doğruluğu ortadadır.

k için

$$F_{kn} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+1}$$

$$F_{(k-1)n} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \text{ doğruluğunu kabul ettiğimizde}$$

$F_{(k+1)n} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k+1)/2 \rceil} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2}$ olduğunu gösterelim:

$F_{(k+1)n} = x \cdot F_{kn} - (-1)^n \cdot F_{(k-1)n}$ idi (Sonuç 1). lemma 3-a da n tek olduğundan

$$F_{(k+1)n} = x \cdot F_{kn} + F_{(k-1)n}$$

$$= x \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil k/2 \rceil} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+1} + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-1)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t}$$

Birinci toplamın ilk terimini ayrı yazarsak

$$= F_n \cdot x^k + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-1)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t}$$

*Eğer k tek ise $\lceil (k-2)/2 \rceil = \lceil (k-1)/2 \rceil$ ve $\binom{k-t-1}{t} + \binom{k-t-1}{t-1} = \binom{k-t}{t}$ olduğundan

$$= F_n \cdot x^k + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t}$$

$$= F_n \cdot x^k + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t}{t} \cdot x^{k-2t}$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k+1)/2 \rceil} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2}$$

$$= F_{(k+1)n}$$

*Eğer k çift ise $\lceil (k-2)/2 \rceil + 1 = \lceil (k-1)/2 \rceil$ ve

$\binom{k-t-1}{t} + \binom{k-t-1}{t-1} = \binom{k-t}{t}$ olduğundan

$$= F_n \cdot x^k + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t+1}$$

$$= F_n \cdot x^k + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k-2)/2 \rceil} \binom{k-t}{t} \cdot x^{k-2t+1}$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil (k+1)/2 \rceil} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2}$$

$$= F_{(k+1)n}$$

İspat Lemma 3-b:

k=1 ve k=2 için iddianın doğruluğu ortadadır.

k için

$$F_{kn} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lceil k/2 \rceil} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1}$$

$F_{(k-1)n} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^{t+1}$ Doğruluğunu kabul ettiğimizde

$F_{(k+1)n} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$ Olduğunu gösterelim:

$F_{(k+1)n} = x \cdot F_{kn} \cdot (-1)^n \cdot F_{(k-1)n}$ idi(Sonuç1) . lemma 3-b de n çift olduğundan

$$F_{(k+1)n} = x \cdot F_{kn} \cdot F_{(k-1)n}$$

$$= x \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} - F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-t}{t-1} \cdot x^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} - F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^{t+1}$$

Birinci toplamın ilk terimini ayrı yazarsak

$$= F_n \cdot x^{k+1} \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t - F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^{t+1}$$

*Eğer k tek ise $\lfloor (k-2)/2 \rfloor = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ ve $\binom{k-t-1}{t} + \binom{k-t-1}{t-1} = \binom{k-t}{t}$ olduğundan ve $(-1)^{t+1}$ yi de $(-1)^t \cdot (-1)$ diye yazarsak

$$= F_n \cdot x^{k+1} \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t$$

$$= F_n \cdot x^{k+1} \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t}{t} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$= F_{(k+1)n}$$

*Eğer k çift ise $\lfloor (k-2)/2 \rfloor + 1 = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ ve

$\binom{k-t-1}{t} + \binom{k-t-1}{t-1} = \binom{k-t}{t}$ olduğundan ve $(-1)^{t+1}$ yi de $(-1)^t \cdot (-1)$ diye yazarsak

$$= F_n \cdot x^{k+1} \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t$$

İkinci toplamın son terimini ayrı yazalım

$$= F_n \cdot x^{k+1} \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t + F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t-1}{t-1} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t + (-1)^t$$

$$= F_n \cdot x^{k+1} \cdot F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-t}{t} \cdot x^{k-2t} \cdot (-1)^t + F_n \cdot (-1)^t$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k+2)/2 \rfloor} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$= F_n \cdot \sum_{t=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k-t+1}{t-1} \cdot x^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$= F_{(k+1)n}$$

III.F_{2n}/ F_n in F_n Cinsinden Bulunması

Şimdi F_{kn} i F_n ve F_{2n}/ F_n cinsinden biliyoruz. Ama bu bilgilerle F_{kn} ile F_n in kuvvetleri arasında bir bölünebilirlik incelemek halen zor görünmektedir. Onun için F_{2n}/ F_n i de F_n cinsinden yazıp F_{kn} i doğrudan F_n cinsinden bulmaya çalışacağız. Şimdi F_{2n}/ F_n ile F_n arasındaki bir bağıntı yakalayabilmek için bir tablo oluşturalım:

(Tablo 3-A)

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
F _{2n} / F _n	1	3	4	7	11	18	29
F _n	1	1	2	3	5	8	13

Bu tabloyu biraz incelediğimizde aşağıdaki Lemma elde edilir.

Lemma 4

$F_{n+1} + F_{n-1} = F_{2n} / F_n$ dir.

İspat Lemma 4:

$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ Eşitliği fibonaccide bilinen bir eşitliktir(Fibonacci ve Altın Oran- Tübitak s. 158). O halde:

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1}) (F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$F_{2n} = (F_n) (F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$F_{2n} / F_n = (F_{n+1} + F_{n-1})$$

Olur.

İspat lemma 5-a 5-b:O halde:

$$F_{n-1} = a$$

$$F_{n+1} = b \quad \text{dediğimizde}$$

$$F_n = b - a \quad \text{ve lemma 4-a dan}$$

$$F_{2n} / F_n = a + b \quad \text{olur.}$$

lemma 1-a ve 1-b den

$$n \text{ tek için} \quad n \text{ çift için}$$

$$a.b = F_n^2 - 1 \quad a.b = F_n^2 + 1$$

olduğundan

n tek için

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$$

$$(F_{2n}/F_n)^2 = F_n^2 + 4(F_n^2 - 1)$$

$$F_{2n}/F_n = \sqrt{5F_n^2 - 4}$$

dır.

n çift için

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$$

$$(F_{2n}/F_n)^2 = F_n^2 + 4(F_n^2 + 1)$$

$$F_{2n}/F_n = \sqrt{5F_n^2 + 4}$$

Lemma 5-a: n tek için $F_{2n}/F_n = \sqrt{5F_n^2 - 4}$

Lemma 5-b: n çift için $F_{2n}/F_n = \sqrt{5F_n^2 + 4}$ lemmaları ispatlanmış olur.

IV. F_{kn} in F_n in Bir Polinomu Olarak Elde Edilmesi

Şimdi lemma 5-a ve 5-b den F_{2n}/F_n i F_n cinsinden biliyoruz. O halde lemma 3-a ve 3-b’de de F_{2n}/F_n i gösteren x i F_n cinsinden yazıp çıkan sonuçları düzenlediğimizde:

k ve n tek ise

$F_n = z$ dersek:

$$F_{3n} = 5.z^3 - 3.z \quad (\text{Tablo 4-A})$$

$$F_{5n} = 25.z^5 - 5.5.z^3 + 5.z$$

$$F_{7n} = 125.z^7 - 7.25.z^5 + 14.5.z^3 - 7.z$$

$$F_{9n} = 625.z^9 - 9.125.z^7 + 27.25.z^5 - 30.5.z^3 + 9.z$$

$$F_{11n} = 3125.z^{11} - 11.625.z^9 + 44.125.z^7 - 77.25.z^5 + 55.5.z^3 - 11z$$

$$F_{13n} = 15625.z^{13} - 13.3125.z^{11} + 65.625.z^9 - 156.125.z^7 + 182.25.z^5 - 91.5.z^3 + 13z$$

. .
. .
. .

Şeklinde bir sonuç çıkar. k nın tek n nin çift olduğu durumlarda da aynı polinomların tüm terimleri pozitif işaretli olanları elde edilir.

k çift ve n tek ise

$F_n = z$ dersek (Tablo 4-B)

$$F_{2n} = \sqrt{5z^2 - 4} \cdot z$$

$$F_{4n} = \sqrt{5z^2 - 4} \cdot (5z^3 - 2z)$$

$$F_{6n} = \sqrt{5z^2 - 4} \cdot (25z^5 - 4 \cdot 5z^3 + 3z)$$

$$F_{8n} = \sqrt{5z^2 - 4} \cdot (125z^7 - 6 \cdot 25z^5 + 10 \cdot 5z^3 - 4z)$$

$$F_{10n} = \sqrt{5z^2 - 4} \cdot (625z^9 - 8 \cdot 125z^7 + 21 \cdot 25z^5 - 20 \cdot 5z^3 + 5z)$$

.

.

.

Şeklinde bir sonuç çıkar. k'nın ve n'nin çift olduğu durumlarda da aynı eşitliklerin tüm terimleri pozitif işaretli ve $\sqrt{5z^2 - 4}$ yerine $\sqrt{5z^2 + 4}$ olan durumları elde edilir.

*Polinomlarımızı bu şekilde düzenleyip, k'nın çift olma durumunda bulduğumuz polinomları incelediğimizde z'nin kuvvetlerinin ve katsayılarının belli bir kuralla ilerlediğini fark ederiz. Soldan başlamak üzere polinomun bölümlerini numaralandırırsak bu kural

K çift iken t. bölümünün

n çift ise

$$\sqrt{5z^2 + 4} \cdot 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+1} \text{ 'e}$$

n tek ise

$$\sqrt{5z^2 - 4} \cdot 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \text{ e eşitliğini gerektirir.}$$

Yani eğer bu kural genelgeçer bir kurala F_{kn}

k çift ve n çift iken

$$\textbf{Lemma 6-a} \quad F_{kn} = \sqrt{5z^2 + 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+1} \text{ ve}$$

k çift ve n tek iken

$$\textbf{Lemma 6-b} \quad F_{kn} = \sqrt{5z^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \text{ olmalıdır.}$$

*k nin tek olduğu durumlarda k nin çift olduğu durumlardan küçük farklar içeren aynı kural devam etmekle birlikte burada katsayı kısmında ilk bakışta anlam veremediğimiz bazı ekstra sayılar da vardır. Ancak bir süre uğraştıktan sonra bu sayıların da belirli bir düzende ilerlediği ve o düzenin :

$\frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1}$ olduğu görülecektir. Yani polinomumuzun en soldaki bölümünden başlamak üzere bölümlerini numaralandırdığımızda t. bölümün

k tek ve n çift iken

$$5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+2}$$

k tek ve n tek iken

$$5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} \text{ e eşit olduğu görülecektir.}$$

Yani eğer bu kural genelgeçer bir kurala F_{kn}

k tek ve n çift iken

$$\textbf{Lemma 6-c } F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+2} \text{ ve}$$

k tek ve n tek iken

$$\textbf{Lemma 6-d } F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot z^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

olması gerekmektedir.

Bu lemmaların ispatında aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır

Gösterim1:

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{k-2t+1} \cdot \binom{k-t}{t} - \binom{k-t}{t-1} &= \binom{k-t+1}{t} \\ \binom{k-t}{t-1} \frac{(k+1)(k-2t+1)}{t \cdot (k-2t+1)} - \binom{k-t}{t-1} &= \binom{k-t+1}{t} \\ \binom{k-t}{t-1} \frac{(k-t+1)}{t} &= \binom{k-t+1}{t} \\ \binom{k-t+1}{t} &= \binom{k-t+1}{t} \end{aligned}$$

Gösterim2:

$$\binom{k-t}{t} + 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} - \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} = \frac{k+2}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t+1}{t}$$

$$\binom{k-t+1}{t} \cdot \frac{k-2t+1}{k-t+1} + 4 \cdot \binom{k-t+1}{t} \frac{t}{k-2t+2} - \frac{t \cdot k}{(k-2t+2)(k-t+1)} \cdot \binom{k-t+1}{t} = \frac{k+2}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t+1}{t}$$

$\binom{k-t+1}{t}$ leri sadeleştirelim

$$\frac{k-2t+1}{k-t+1} + 4 \cdot \frac{t}{k-2t+2} - \frac{t \cdot k}{(k-2t+2)(k-t+1)} = \frac{k+2}{k-2t+2}$$

$$1 - \frac{t}{k-t+1} + \frac{4t}{k-2t+2} - \frac{k}{(k-2t+2)} \cdot \frac{t}{(k-t+1)} = \frac{k+2}{k-2t+2}$$

$$\frac{k+2t+2}{k-2t+2} - \frac{t}{(k-t+1)} \left(1 + \frac{k}{(k-2t+2)}\right) = \frac{k+2}{k-2t+2}$$

$$\frac{k+2t+2}{k-2t+2} - \frac{t}{(k-t+1)} \left(\frac{2k-2t+2}{(k-2t+2)}\right) = \frac{k+2}{k-2t+2}$$

$$\frac{k+2t+2}{k-2t+2} - \frac{2t}{(k-2t+2)} = \frac{k+2}{k-2t+2}$$

$$\frac{k+2}{k-2t+2} = \frac{k+2}{k-2t+2}$$

Şimdi bu eşitlik iddialarımızı ispatlayalım. Önce n'nin çift olma durumunu ispatlayacağız:

k çift ve n çift iken (Lemma 6-a)

$$F_{kn} = \sqrt{5Fn^2 + 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+1} \text{ ve}$$

k tek ve n çift iken (Lemma 6-c)

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+2} \text{ lemmalarımız vardı.}$$

İspat Lemma 6 a-c: iddiaların k=2 , k=3 ve k=4 için doğruluğu Binet formülünden rahatlıkla görülebilir.

*k çift ise

$$F_{kn} = \sqrt{5Fn^2 + 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+1}$$

$$F_{(k+1)n} = \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+3} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+3}$$

Doğru ise

$$F_{(k+2)n} = \sqrt{5Fn^2 + 4} \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+3}$$

Olduğunu göstermeliyiz

Sonuç 1 den

$$\begin{aligned}
F_{(k+2)n} &= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \cdot F_{(k+1)n} - (-1)^n \cdot F_{kn} \quad \text{lemma 6 a-c de } n \text{ çift idi} \\
&= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \cdot F_{(k+1)n} - F_{kn} \\
&= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+3} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3} - \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 + 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1}
\end{aligned}$$

İşlem kolaylığı açısından toplamaları $\sqrt{5 F_n^2 + 4}$ parantezine alıp $\sqrt{5 F_n^2 + 4}$ ü karşı tarafa atalım ve sonucu y ile gösterelim

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\sqrt{5 F_n^2 + 4}} &= \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+3} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3} - \\
&\quad \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1}
\end{aligned}$$

Birinci toplamın ilk terimini ayrı yazalım:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\sqrt{5 F_n^2 + 4}} &= 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_n^{k+1} + \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+1} \cdot \binom{k-t}{t} \cdot F_n^{k-2t+1} - \\
&\quad \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1}
\end{aligned}$$

$$\binom{k-t}{t} \frac{k+1}{k-2t+1} - \binom{k-t}{t-1} = \binom{k-t+1}{t} \text{ olduğundan (gösterim1)}$$

$$\frac{y}{\sqrt{5 F_n^2 + 4}} = 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_n^{k+1} + \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t} \cdot F_n^{k-2t+1}$$

$$\frac{y}{\sqrt{5 F_n^2 + 4}} = \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3}$$

$$= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \cdot \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3}$$

$$= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3}$$

$$= F_{(k+2)n}$$

ve

*k tek ise

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2}$$

$$F_{(k+1)n} = \sqrt{5 F_n^2 + 4} \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2}$$

Doğru ise

$$F_{(k+2)n} = \sum_{t=1}^{(k+3)/2} 5^{\frac{k-2t+3}{2}} \cdot \frac{k+2}{k-2t+4} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+4} \text{ Olduğunu göstermeliyiz}$$

Sonuç 1 den

$$\begin{aligned} F_{(k+2)n} &= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \cdot F_{(k+1)n} - (-1)^n \cdot F_{kn} \\ &= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \cdot F_{(k+1)n} - F_{kn} \\ &= \sqrt{5 F_n^2 + 4} \cdot \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} - \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \\ &= (5 F_n^2 + 4) \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} - \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \\ &= \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+3}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+4} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} - \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \end{aligned}$$

Birinci toplamın ilk ikinci ve üçüncü toplamın son kısmını ayrı yazarsak

$$\begin{aligned} &= 5^{\frac{k+1}{2}} \cdot F_n^{k+2} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t}{t} \cdot F_n^{k-2t+2} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} - \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} + \\ &4 \cdot F_n \cdot \binom{k+1}{2} - F_n \cdot \binom{k+1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{İşlemler yapıldığında } \binom{k-t}{t} + 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} = \frac{k+2}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t+1}{t}$$

Olduğundan (gösterim 2) bu üç toplamı tek şekilde ifade edersek

$$\begin{aligned} &= 5^{\frac{k+1}{2}} \cdot F_n^{k+2} + \\ &\sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t} \frac{k+2}{k-2t+2} \cdot F_n^{k-2t+2} + \\ &3 \cdot (k+1) \cdot (F_n/2) \\ &= \sum_{t=1}^{(k+3)/2} 5^{\frac{k-2t+3}{2}} \cdot \frac{k+2}{k-2t+4} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+4} \\ &= F_{(k+2)n} \end{aligned}$$

Böylece Lemma 6 a-c ispatlanmış oldu.

Şimdi n tek iken ele alalım

k çift ve n tek iken (Lemma 6-b)

$$F_{kn} = \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \text{ ve}$$

k tek ve n tek iken (Lemma 6-c)

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} \text{ lemmalarımız vardı.}$$

İspat lemma 6 b-d: Eşitliklerin k=2 , k=3 ve k=4 için doğruluğu Binet formülünden rahatlıkla görülebilir

*K çift iken

$$\begin{aligned} F_{kn} &= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \\ F_{(k+1)n} &= \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+3} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3} \cdot (-1)^{t+1} \end{aligned}$$

Doğru ise

$$F_{(k+2)n} = \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3} \cdot (-1)^{t+1} \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

Sonuç 1 den

$$F_{(k+2)n} = \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot F_{(k+1)n} - (-1)^n \cdot F_{kn}$$

n tek olduğundan

$$\begin{aligned}
F_{(k+2)n} &= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot F_{(k+1)n} + F_{kn} \\
&= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+3} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3} \cdot (-1)^{t+1} + \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1}
\end{aligned}$$

Birinci toplamın ilk terimini ayrı yazalım

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_n^{k+1} + \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+1} \cdot \binom{k-t}{t} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^t + \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \\
&= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_n^{k+1} + \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \frac{k+1}{k-2t+1} \cdot \binom{k-t}{t} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^t - \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^t \\
&\quad \frac{k+1}{k-2t+1} \cdot \binom{k-t}{t} - \binom{k-t}{t-1} = \binom{k-t+1}{t} \text{ olduğundan (gösterim1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot 5^{\frac{k}{2}} \cdot F_n^{k+1} + \\
&\quad \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^t \\
&= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot \sum_{t=1}^{(k+2)/2} 5^{\frac{k-2t+2}{2}} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+3} \cdot (-1)^{t+1} \\
&= F_{(k+2)n}
\end{aligned}$$

*K tek iken

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$F_{(k+1)n} = \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

Doğru ise

$$F_{(k+2)n} = \sum_{t=1}^{(k+3)/2} 5^{\frac{k-2t+3}{2}} \cdot \frac{k+2}{k-2t+4} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+4} \cdot (-1)^{t+1}$$

Olduğunu göstermeliyiz.

Sonuç 1 den ve lemma 6b-d de n tek olduğundan

$$\begin{aligned} F_{(k+2)n} &= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot F_{(k+1)n} + F_{kn} \\ &= \sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} \\ &= (5 F_n^2 - 4) \cdot \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} \\ &= \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+3}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+4} \cdot (-1)^{t+1} - \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} \end{aligned}$$

Birinci toplamın ilk terimini ikinci ve üçüncü toplamın son terimini ayrı yazarsak:

$$\begin{aligned} &= 5^{\frac{k+1}{2}} \cdot F_n^{k+2} + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t}{t} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^t + \\ &\quad \sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^t + \end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot \text{Fn}^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} +$$

$$4 \cdot \binom{(k+1)/2}{(k-1)/2} \cdot \text{Fn}^{-k} \cdot \text{Fn}$$

$$= 5^{\frac{k+1}{2}} \cdot \text{Fn}^{k+2} +$$

$$\sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t}{t} \cdot \text{Fn}^{k-2t+2} \cdot (-1)^t +$$

$$\sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} \cdot \text{Fn}^{k-2t+2} \cdot (-1)^t -$$

$$\sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot \text{Fn}^{k-2t+2} \cdot (-1)^t +$$

$$4 \cdot \binom{(k+1)/2}{(k-1)/2} \cdot \text{Fn}^{-k} \cdot \text{Fn}$$

İşlemler yapıldığında ve $\binom{k-t}{t} + 4 \cdot \binom{k-t+1}{t-1} - \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} = \frac{k+2}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t+1}{t}$

Olduğundan (gösterim 2) ve 3 toplamı tek şekilde ifade edersek

$$= 5^{\frac{k+1}{2}} \cdot \text{Fn}^{k+2} +$$

$$\sum_{t=1}^{(k-1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \binom{k-t+1}{t} \cdot \frac{k+2}{k-2t+2} \cdot \text{Fn}^{k-2t+2} \cdot (-1)^t +$$

$$4 \cdot \binom{(k+1)/2}{(k-1)/2} \cdot \text{Fn}^{-k} \cdot \text{Fn}$$

$$= \sum_{t=1}^{(k+3)/2} 5^{\frac{k-2t+3}{2}} \cdot \frac{k+2}{k-2t+4} \cdot \binom{k-t+2}{t-1} \cdot \text{Fn}^{k-2t+4} \cdot (-1)^{t+1}$$

$$= \text{F}_{(k+2)n}$$

Böylece Lemma 7 b-d ispatlanmış oldu.

2) $F_n^p \mid F_m$ ŞARTININ ARAŞTIRILMASI

Şu anda aradığımız veri elimizde , F_{kn} i F_n in polinomu olarak biliyoruz. Çözmemiz gereken problem artık polinomlarda bölünebilme problemi. Ve k nin tek olduğu polinomlar n tek iken ve çift iken F_n ye bölünebilirlikleri açısından oldukça benzer fonksiyonlardır. Aynı şekilde k çift iken de n nin tek ve çift olduğu durumlar da oldukça benzer fonksiyonlardır. Bu nedenle çözümü 2 başlıkta arayacağız.

a) k tek iken

* n tek ise

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \dots\dots\dots(1)$$

* n çift ise

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1} \dots\dots\dots(2)$$

b) k çift iken

* n çift ise

$$F_{kn} = \sqrt{5 F_n^2 + 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \dots\dots\dots(3)$$

* n tek ise

$$F_{kn} = \sqrt{5 F_n^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot F_n^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1} \dots\dots\dots(4)$$

eşitlikleri elde edilmişti.

Teorem: $k=(m/n)$ tek iken $F_n^{p+1} \mid F_m \Leftrightarrow F_n^p \mid (m/n)$ dir.

İspat: Önce n 'yi tek alalım:

1 ve 2 eşitliklerinde tek sabit sayı, en başta m/n yerine yazdığımız, k 'dır. k dışında tüm çarpanlar son bölüme doğru 1'e, F_n^{k-2t+2} de F_n ye yaklaşmaktadır.

$k = F_n^p \cdot b$ olsun .

$k-2t+2 = F_n^r \cdot c$ olsun . F_n birden farklı bir Fibonacci sayısıyken r daima $(k-2t+2=1$ hariç)
 $k-2t+1$ den küçüktür. Her bölümde F_n^{k-2t+2} çarpanı olduğuna göre , her bölümde en az $p+2$
adet F_n çarpanı vardır ancak son bölüm hariç. Zira son bölümde $k-2t+2$, 1 ' e eşit olmaktadır.
Bu durumda son bölüm $k \cdot F_n$ olduğu için polinomumuz F_n^{p+1} parantezine alınabilir ve
parantez içinde kalan bölümlerden sadece son kısım F_n çarpanı içermediği için parantez içi F_n
ye bölünmez. O halde k ve n tek iken F_{kn} , F_n in $k = F_n^p \cdot b$ olmak üzere en fazla $(p+1)$.
Kuvvetine bölünebilir.

Aynı yaklaşım n çift iken de aynı sonucu vermektedir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem:

$K=(m/n)$ çift ve n çift ve $n>3$ iken

$$F_n^{p+1} \mid F_m \Leftrightarrow F_n^p \mid (\sqrt{5 F_n^2 + 4}) \cdot (m/2n) \quad \text{ve}$$

$K=(m/n)$ çift ve n tek ve $n>3$ iken

$$F_n^{p+1} \mid F_m \Leftrightarrow F_n^p \mid (\sqrt{5 F_n^2 - 4}) \cdot (m/2n) \quad \text{dır.}$$

İspat: Önce n yi çift alalım.

$\binom{k-t}{t-1} = \binom{k-t}{k-2t+1} = \binom{\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{k-2t}{2}}{k-2t+1}$ olduğundan ve $k - 2t + 1 > \frac{k-2t}{2}$ olduğundan her bölümde
mutlaka $\frac{k}{2}$ çarpanı vardır. Bu çarpanı sadeleştirebilecek tek bölen ise $(k - 2t + 1)!$ dir.

$$\frac{k}{2} = F_n^p \cdot b$$

$$(k - 2t + 1)! = F_n^r \cdot c \quad \text{olsun}$$

2 den büyük hiçbir $(k - 2t + 1)!$ sayısı 2den büyük bir F_n fibonacci sayısını $k-2t$ defa
çarpan olarak içerebileceğinden ve her bölümde F_n^{k-2t+1} çarpanı olduğundan ve her
bölümde $\frac{k}{2}$ çarpanı olduğundan her bölümde $p+2$ adet F_n çarpanı mutlaka vardır, son bölüm
hariç olmak üzere. Çünkü son bölümde $k-2t+1 = 1$ olduğundan tam $p+1$ adet F_n çarpanı
vardır. Toplam dışındaki $\sqrt{5 F_n^2 - 4}$ çarpanını da hatırlarsak polinomumuz

$\sqrt{5 F_n^2 - 4} \cdot F_n^{p+1}$ parantezine alınabilir ve parantez içinde kalan bölümlerden sadece son
kısım F_n çarpanı içermediği için parantez içi F_n ye bölünmez. O halde k çift n çift iken F_{kn}

F_n in, $k/2 = F_n^p \cdot b$ olmak üzere en fazla $\sqrt{5 F_n^2 + 4}$ ün içerdiği F_n çarpanı sayısı artı $p+1$ kadar
kuvvetine bölünebilir.

n tek iken de aynı yaklaşımla ispat yapılır.

SONUÇ

Çalışmamız esnasında aşağıdaki eşitlikleri elde ettik.

n tek iken

$$(F_{2n}/F_n)^2 + 1 = F_{3n}/F_n$$

n çift iken

$$(F_{2n}/F_n)^2 - 1 = F_{3n}/F_n$$

n çift veya k ve n tek iken

$$(F_{kn}/F_n)^2 = (F_{(k-1)n}/F_n) \cdot (F_{(k+1)n}/F_n) + 1$$

k çift ve n tek iken

$$(F_{kn}/F_n)^2 = (F_{(k-1)n}/F_n) \cdot (F_{(k+1)n}/F_n) - 1$$

n tek iken

$$F_{2n}/F_n = \sqrt{5F_n^2 - 4}$$

n çift iken

$$F_{2n}/F_n = \sqrt{5F_n^2 + 4}$$

Buraya kadarki eşitlikler için derin bir araştırma yapılmamış olup zaten bilinen eşitlikler olması olasıdır.

n tek iken

$$F_{kn} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{[k/2]} \binom{k-t}{t-1} \cdot \left(\frac{F_{2n}}{F_n}\right)^{k-2t+1}$$

n çift iken

$$F_{kn} = F_n \cdot \sum_{t=1}^{[k/2]} \binom{k-t}{t-1} \cdot \left(\frac{F_{2n}}{F_n}\right)^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1}$$

k çift ve n çift iken

$$F_{kn} = \sqrt{5Fn^2 + 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+1}$$

k çift ve n tek iken

$$F_{kn} = \sqrt{5Fn^2 - 4} \sum_{t=1}^{k/2} 5^{\frac{k-2t}{2}} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+1} \cdot (-1)^{t+1}$$

k tek ve n çift iken

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+2}$$

k tek ve n tek iken

$$F_{kn} = \sum_{t=1}^{(k+1)/2} 5^{\frac{k-2t+1}{2}} \cdot \frac{k}{k-2t+2} \cdot \binom{k-t}{t-1} \cdot Fn^{k-2t+2} \cdot (-1)^{t+1}$$

$k=(m/n)$ tek iken

$$F_n^{p+1} \mid F_m \Leftrightarrow F_n^p \mid (m/n)$$

$k=(m/n)$ çift ve n çift iken $n>3$ şartıyla

$$F_n^{p+1} \mid F_m \Leftrightarrow F_n^p \mid (\sqrt{5Fn^2 + 4}).(m/2n)$$

$k=(m/n)$ çift ve n tek iken $n>3$ şartıyla

$$F_n^{p+1} \mid F_m \Leftrightarrow F_n^p \mid (\sqrt{5Fn^2 - 4}).(m/2n)$$

Eşitlik ve koşulları bulunup ispatlandı.

PROJE RAPORU

PROJENİN ADI ÜÇGENLER VE ÜÇGENSEL SAYILAR

**HAZIRLAYAN:
C. UYSAL**

**DANIŞMAN :
EŞREF GÜREL
DENİZLİ BİLİM VE SANAT MERKEZİ
MATEMATİK ÖĞRETMENİ**

Denizli – 2007
(Bu Proje Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Arası Araştırma Projeleri Yarışmasında Ankara Finalinde Teşvik Ödülü almıştır.)

PROJENİN AMACI

Düzlemde eşkenar üçgenlere ayrılmış bir üçgensel bölgede gömülü eşkenar üçgen sayısını üçgensel sayıları kullanarak hesaplamak ve genellemek.

PROJE ÖZETİ

Bir düzlemde ele alınan bir üçgen içerisindeki eşkenar üçgensel bölgelerin çizim üzerinden sayılması kısa kenar uzunluklarında kolay olmasına rağmen kenar uzunluğu arttıkça zorlaşan ve hata yapma olasılığı büyüyen bir iş haline gelir. Konu üzerinde araştırdığımız ve incelediğimiz önceki çalışmalar bu zorluk ve hata payını önemli boyutta azaltamamıştır. Ancak yaptığımız çalışma üçgenlerin baktığı yön ve kenar uzunluğu bakımından onları gruplandırarak kolay bir sayma yöntemi ve güvenilirlik sağlamaktadır. Proje geliştirildiğinde elde edilen formül tüm bu olanakları sunmaktadır. Ayrıca yapılan bu çalışma bazı değişikliklerle düzlemde alan hesaplarında diğer çokgenlere de uygulanabileceği projenin diğer çalışmalara ön ayak olacağını düşünmekteyim. Çünkü çokgensel bölgelerin üçgenlere ayrılması problemi bu düşüncenin temelini oluşturmaktadır.

İÇİNDEKİLER

Özet	2
İçindekiler	3

Birinci Bölüm

GİRİŞ

1. Temel Tanım ve özellikler	4
------------------------------------	---

İkinci Bölüm

YÖNTEM

2.1 Problem	6
2.2 Problem.....	7
2.3 Problem	8
2.4 Problem	9
2.5 Problem	10

Üçüncü Bölüm

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

3.1 Sonuç	11
3.2 Sonuç.....	13
3.1 Tartışma.....	14
3.2 Tartışma.....	14
3.3 Tartışma.....	14
Teşekkür.....	15
Kaynaklar	16

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde projemizle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilecektir.

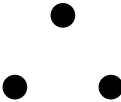
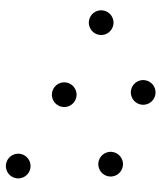
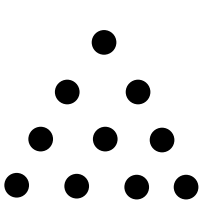
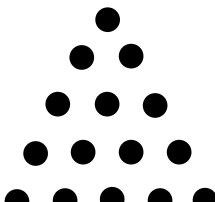
Bir eşkenar üçgeni eşkenar üçgenlerden oluşan bölgelere ayırdığımızda farklı boyutlarda ve farklı yönlerde eşkenar üçgenler oluşur. Kısa kenarlı üçgenler için bu ayrımı yapmak oldukça kolaydır fakat üçgenin kenar uzunluğu büyüdüğü zaman bölge içinde gömülü üçgenlerin sayısı oldukça artmakta ve ayırım yapmak güçleşmektedir. Daha önce yapılan çalışmalarda (Craine, T. V.,1994) üçgensel bir bölge içine gömülü üçgen sayısını hesaplamak için sayma ve tablo doldurma metodu üzerinde durulmuştur. Bu projede; bir eşkenar üçgen içinde gömülü eşkenar üçgenlerin sayısı kenar uzunluğu ve yön bakımından ayrıştırılarak üçgensel sayılara bağlı bir hesaplama tekniği geliştirilerek genellenmiştir.

Bu konunun seçiliş nedeni daha önce bu sayı ilişkisi üzerinde yeterli ve kesin sonuç veren çalışmaların eksikliğidir. Bu yöntemler tam olarak genelleştirilemediği için pratik olarak uygulanamamakta, artan kenar uzunluklarında hata payı çok büyük olmaktadır.

Tanım 1.1 : Nokta sayısı eşkenar üçgen şeklinde düzenlenebilen doğal sayılara üçgensel sayı denir. Bir doğal sayıya bir sonraki doğal sayıları ekleyerek elde edilir. Her üçgensel sayı n bir doğal sayı olmak üzere; “ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ” sayılarının toplamı şeklinde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}d_1 &= 1 \\d_2 &= 1+2 = 3 \\d_3 &= (1+2)+3 = 6 \\d_4 &= (1+2+3)+4 = 10 \\d_5 &= (1+2+3+4)+5 = 15 \\d_6 &= (1+2+3+4+5)+6 = 21 \\d_7 &= (1+2+3+4+5+6)+7 = 28 \\d_8 &= (1+2+3+4+5+6+7) + 8 = 36 \\d_9 &= (1+2+3+4+5+6+7+8) + 9 = 45 \\d_{10} &= (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 10 = 55\end{aligned}$$

Çizelge 1: Üçgensel sayıları şekil modeli olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

				
1	3	6	10	15
ŞEKİL – 1				

Özelik 1.1 : Üçgensel sayıların genel ifadesi n bir doğal sayı olmak üzere;

$$d_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n \quad (1)$$
şeklinde gösterilir.

Bu toplam da;

$$i. d_n = \frac{n \times (n + 1)}{2} \quad (2)$$

$$ii. d_n = \binom{n}{2} \quad (3)$$

şeklindedir.

İSPAT:

$$d_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n \quad (A)$$

$$d_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 \quad (B)$$

(A) ve (B) denklemlerinin her iki tarafını taraf tarafa toplarsak n tane $(n + 1)$ terimi olur.

$$2. d_n = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1)}_{n \text{ tane}}$$

$$2. d_n = n \times (n + 1)$$

buradan da;

$$d_n = \frac{n \times (n + 1)}{2} \quad (2)$$

ve

$$d_n = \binom{n}{2} \quad (3)$$

Bu ifade de aynı zamanda bir tekrarlamaya bağıntısı bulabiliriz.

Buna göre tekrarlamaya bağıntısı; $d_1 = 1$ başlangıç koşulu olmak üzere;

$$d_{n+1} = d_n + n \quad (4)$$

şeklinde olur.

Bu ifadeyi açarsak

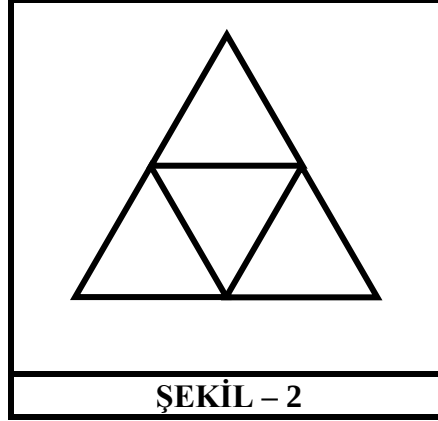
$n = 1$ için	$d_1 = 1$
$n = 2$ için	$d_2 = 3$
$n = 3$ için	$d_3 = 6$
$n = 4$ için	$d_4 = 10$
$n = 5$ için	$d_5 = 15$
$n = 6$ için	$d_6 = 21$
$n = 7$ için	$d_7 = 28$
$n = 8$ için	$d_8 = 36$
$n = 9$ için	$d_9 = 45$
$n = 10$ için	$d_{10} = 55$
$n = 11$ için	$d_{11} = 66$
$n = 12$ için	$d_{12} = 78$

...

İKİNCİ BÖLÜM

YÖNTEM

Problem 2.1: Çizelge 1’de verilen eşkenar üçgende kenarlarının orta noktaları birleştirilerek kaç tane eşkenar üçgen elde ederiz? Üçgensel sayıları bu tür problemlerin çözümü için nasıl kullanabiliriz?



ÇÖZÜM:

Her kenarında iki eşkenar üçgenin bulunduğu yani en büyük kenarlı üçgenin kenar uzunluğunun iki birim olduğu dikkate alınır; yukarıdaki üçgenleri saydığımızda 5 tane üçgen olduğunu sayabiliriz. Üçgensel sayılara göre çözüm düşünersek;

Çizelge 2.1: $n = 2$ için kenar sayısı üçgensel sayı eşleme tablosu

Üçgenin Kenar Uzunluğu	Üçgensel Sayılar	Tekrarlama Bağintısı
1	1	d_1
2	3	d_2

Üçgenin kenar uzunluğuna karşılık gelen üçgensel sayılar toplanır daha sonra o sayıdan bir önceki basamağa kadar gelen sayılar birer basamak atlanarak toplanır. Yani yukarıdaki tabloyu incelersek;

$$1 + 3 + 1 = 5$$

Başka bir açıdan;

$$n = 1 \text{ için } d_1 = 1$$

$$n = 2 \text{ için } d_2 = 3$$

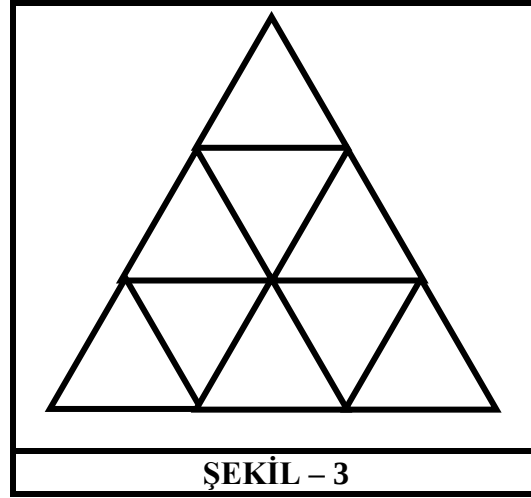
$$n = 3 \text{ için } d_3 = 6$$

$$n = 4 \text{ için } d_4 = 10$$

$$n = 5 \text{ için } d_5 = 15 \text{ olduğunu göz önünde bulunduralım}$$

$$d_1 + d_2 + d_1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

Problem 2.2: Aşağıda bir kenar uzunluğu 3 birim olan eşkenar üçgen içinde kaç tane eşkenar üçgen vardır? Yukarıdaki kurala göre çözüm oluşturunuz.



ÇÖZÜM:

Çizelge 2.2: $n = 3$ için kenar sayıları üçgensel sayı eşleme tablosu

Üçgenin Kenar Uzunluğu	Üçgensel Sayılar	Tekrarlama Bağntısı
1	1	d_1
2	(3)	d_2
3	6	d_3

Tabloya göre $1 + 3 + 6 + 3 = 13$ tane eşkenar üçgen vardır.

$n = 1$ için $d_1 = 1$

$n = 2$ için $d_2 = 3$

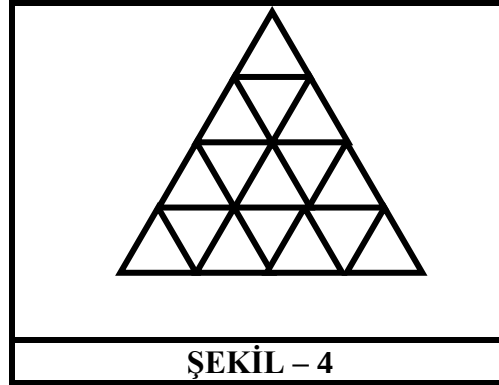
$n = 3$ için $d_3 = 6$

$n = 4$ için $d_4 = 10$

$n = 5$ için $d_5 = 15$ olduğunu göz önünde bulunduralım

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_2 = 1 + 3 + 6 + 3 = 13$$

Problem 2.3: Bir kenar uzunluğu 4 birim olan eşkenar üçgen içine çizilebilecek eşkenar üçgenlerin sayısını bulunuz.



ÇÖZÜM:

Çizelge 2.3: $n = 4$ için kenar uzunluğu üçgensel sayı eşleme tablosu

Üçgenin Kenar Uzunluğu	Üçgensel Sayılar	Tekrarlama Bağntısı
1	1	d_1
2	3	d_2
3	6	d_3
4	10	d_4

Tabloya göre $1 + 3 + 6 + 10 + 6 + 1 = 27$ tane eşkenar üçgen vardır.



$n = 1$ için $d_1 = 1$

$n = 2$ için $d_2 = 3$

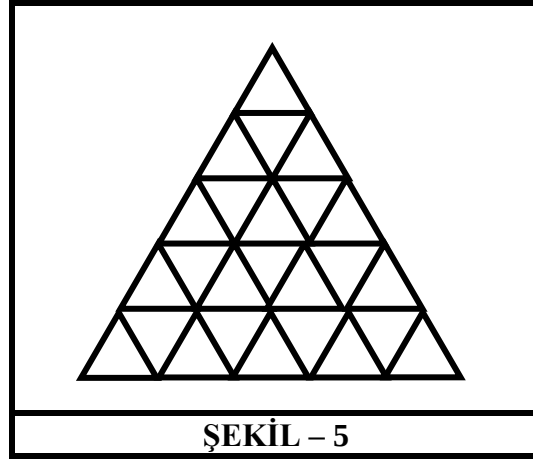
$n = 3$ için $d_3 = 6$

$n = 4$ için $d_4 = 10$

$n = 5$ için $d_5 = 15$ olduğunu göz önünde bulunduralım

$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_1 + d_3 = 1 + 3 + 6 + 10 + 6 + 1 = 27$

Problem 2.4: Bir kenar uzunluğu 5 birim olan eşkenar üçgen içine çizilebilecek eşkenar üçgenlerin sayısını bulunuz.



ÇÖZÜM:

Çizelge 2.4: $n = 5$ için kenar uzunluğu üçgensel sayı eşleme tablosu

Üçgenin Kenar Sayısı	Üçgensel Sayılar	Tekrarlama Bağntısı
1	1	d_1
2	3	d_2
3	6	d_3
4	10	d_4
5	15	d_5

Tabloya göre $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 10 + 3 = 48$ tane eşkenar üçgen vardır.

$n = 1$ için $d_1 = 1$

$n = 2$ için $d_2 = 3$

$n = 3$ için $d_3 = 6$

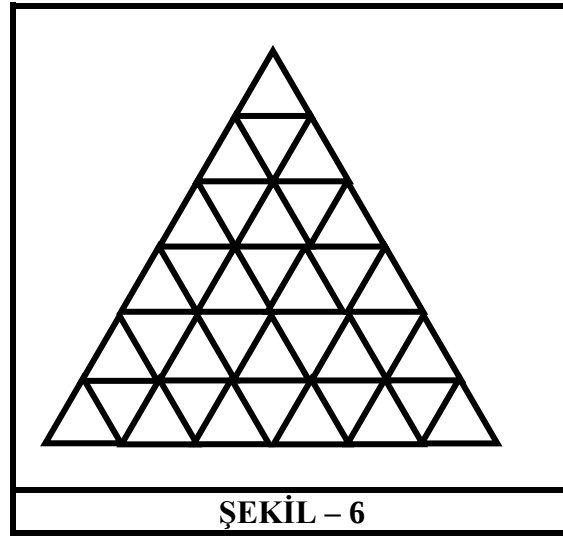
$n = 4$ için $d_4 = 10$

$n = 5$ için $d_5 = 15$

olduğunu göz önünde bulunduralım

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_2 + d_4 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 10 + 3 = 48$$

Problem 2.5: Bir kenarının uzunluğu 6 birim olan eşkenar üçgenin içinde kaç tane üçgen vardır?



ÇÖZÜM:

Çizelge 2.5: $n = 6$ için kenar uzunluğu üçgensel sayı eşleme tablosu

Üçgenin Kenar Sayısı	Üçgensel Sayılar	Tekrarlama Bağntısı
1	(1)	d_1
2	3	d_2
3	(6)	d_3
4	10	d_4
5	(15)	d_5
6	21	d_6

Tabloya göre $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 15 + 6 + 1 = 78$ tane eşkenar üçgen vardır.

$$n = 1 \text{ için } d_1 = 1$$

$$n = 2 \text{ için } d_2 = 3$$

$$n = 3 \text{ için } d_3 = 6$$

$$n = 4 \text{ için } d_4 = 10$$

$$n = 5 \text{ için } d_5 = 15$$

$$n = 6 \text{ için } d_6 = 21$$

olduğunu göz önünde bulunduralım

$$= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_1 + d_3 + d_5$$

$$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 15 + 6 + 1 = 78$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Üçgensel bir yapı içinde bulunan üçgenlerin toplam sayısını üçgensel sayılara bağlı bir ilişkiye göre ifade etmek ve genellemek istersek; iki farklı durum ortaya çıkar.

Buna göre; n bir doğal sayı ve $n > 1$ olmak üzere

Sonuç 3.1: Üçgenin kenar uzunluğu n birim ve n tek sayı ise gömülü bir şekildeki üçgen sayısı;

i) Tepe Noktası yukarı yönlü üçgenlerin sayısını Y ile gösterirsek

$$Y(n) = \sum_{k=1}^n d_k$$

ii) Tepe noktası aşağı yönlü üçgenlerin sayısını A ile gösterirsek;

$$A(n) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} d_{2k}$$

iii) Toplam üçgen sayısı Ω ile gösterirsek;

$$\Omega(n) = \sum_{k=1}^n d_k + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} d_{2k}$$

ifadesiyle genellenebilir.

İspat:

i) Bu ispatı tümevarım metodu ile yapalım. Buna göre $n > 1$ ve n tek sayı olduğundan;

$$a) \quad n = 3 \text{ için } Y(3) = \sum_{k=1}^3 d_k$$

$$Y(3) = d_1 + d_2 + d_3$$

$$Y(3) = 1 + 3 + 6$$

$$Y(3) = 10$$

$$b) \quad n = 2m - 1 \quad (m > 1) \text{ için } Y(2m - 1) = \sum_{k=1}^{2m-1} d_k \text{ doğru kabul edelim}$$

$$Y(2m - 1) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2m-2} + d_{2m-1} \quad (5)$$

c) $n = 2m + 1$ ($m > 1$) için $Y(2m + 1) = \sum_{k=1}^{2m+1} d_k$ olduğunu gösterelim;

denklem (5)'te her iki tarafa da $d_{2m} + d_{2m+1}$ eklediğimizde

$$Y(2m-1) + d_{2m} + d_{2m+1} = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2m-2} + d_{2m-1} + d_{2m} + d_{2m+1}$$

$$Y(2m + 1) = \sum_{k=1}^{2m+1} d_k \text{ olur.}$$

ii) Bu ispatı tümevarım metodu ile yapalım. Buna göre $n > 1$ ve n tek sayı olduğundan;

a) $n = 3$ için $A(3) = \sum_{k=1}^1 d_{2k}$

$$A(3) = d_2$$

$$A(3) = 3$$

b) $n = 2m - 1$ ($m > 1$) için $A(2m - 1) = \sum_{k=1}^{\frac{2m-2}{2}} d_{2k} = \sum_{k=1}^{m-1} d_{2k}$ doğru kabul edelim

$$A(2m - 1) = d_2 + d_4 + d_6 + \dots + d_{2m-4} + d_{2m-2} \quad (6)$$

c) $n = 2m + 1$ ($m > 1$) için $A(2m + 1) = \sum_{k=1}^{\frac{2m+1-1}{2}} d_{2k} = \sum_{k=1}^m d_{2k}$ olduğunu gösterelim;

denklem (6) da her iki tarafa da d_{2m} eklersek

$$A(2m - 1) + d_{2m} = d_2 + d_4 + d_6 + \dots + d_{2m-4} + d_{2m-2} + d_{2m}$$

$$A(2m+1) = \sum_{k=1}^m d_{2k} \text{ olur.}$$

(i) ve (ii)'den (iii)'nin ispatı açıktır

Sonuç 3.2: Üçgenin kenar uzunluğu n birim ve n çift sayı ise gömülü bir şekildeki üçgen sayısı;

i) Tepe Noktası yukarı yönlü üçgenlerin sayısını Y ile gösterirsek;

$$Y(n) = \sum_{k=1}^n d_k$$

ii) Tepe noktası aşağı yönlü üçgenlerin sayısını A ile gösterirsek;

$$A(n) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} d_{2k-1}$$

iii) Toplam üçgen sayısı Ω ile gösterirsek;

$$\Omega(n) = \sum_{k=1}^n d_k + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} d_{2k-1}$$

ifadesiyle genellenebilir. Bu genelleştirdiğimiz ifade ile daha önceki yöntemlere göre daha güvenli ve daha kolay bir sonuç ortaya çıkmıştır.

İspat:

i) Bu ispatı da tümevarım metodu ile yapalım. Buna göre $n > 1$ ve n çift sayı olduğundan;

a) $n = 2$ ise $Y(2) = \sum_{k=1}^2 d_k$

$$Y(2) = d_1 + d_2$$

$$Y(2) = 1 + 3$$

$$Y(2) = 4$$

b) $n = 2m$ ($m > 1$) için $Y(2m) = \sum_{k=1}^{2m} d_k$ doğru kabul edelim

$$Y(2m) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2m-1} + d_{2m} \quad (7)$$

c) $n = 2m + 2$ ($m > 1$) için $Y(2m + 2) = \sum_{k=1}^{2m+2} d_k$ olduğunu gösterelim; denklem (7)'de her

iki tarafa da $d_{2m+1} + d_{2m+2}$ eklediğimizde

$$Y(2m) + d_{2m+1} + d_{2m+2} = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2m-1} + d_{2m} + d_{2m+1} + d_{2m+2}$$

$$Y(2m + 2) = \sum_{k=1}^{2m+2} d_k \text{ olur.}$$

ii) Bu ispatı da tümevarım metodu ile yapalım. Buna göre $n > 1$ ve n çift sayı olduğundan;

$$a) \quad n = 2 \text{ için } A(2) = \sum_{k=1}^1 d_{2k-1}$$

$$A(n) = d_1$$

$$A(n) = 1$$

$$b) \quad n = 2m \text{ için } (m > 1) \text{ için } A(2m) = \sum_{k=1}^{\frac{2m}{2}} d_{2k-1} = \sum_{k=1}^m d_{2k-1} \text{ doğru kabul edelim}$$

$$A(2m) = d_1 + d_3 + d_5 + \dots + d_{2m-3} + d_{2m-1} \quad (8)$$

$$c) \quad n = 2m + 2 \text{ } (m > 1) \text{ için } A(2m + 2) = \sum_{k=1}^{\frac{2m+2}{2}} d_{2k-1} = \sum_{k=1}^{m+1} d_{2k-1} \text{ olduğunu gösterelim;}$$

denklem (8)'de her iki tarafa da d_{2m+1} eklediğimizde

$$A(2m) + d_{2m+1} = d_1 + d_3 + d_5 + \dots + d_{2m-3} + d_{2m-1} + d_{2m+1}$$

$$A(2m + 2) = \sum_{k=1}^{m+1} d_{2k-1} \text{ olur.}$$

(i) ve (ii)'den (iii)'nin ispatı açıktır.

Tartışma 3.1: Bu çalışma bazı değişikliklerle düzlemde alan hesaplarında diğer çokgenlere de uygulanabileceğini düşünmekteyim.

Tartışma 3.2: Eşkenar üçgenlerle yaptığımız bu çalışma modelleme safhasında düzgün dörtyüzlülerle de uygulanabilirliği tarafımızdan gözlenmiştir. Ancak; bazı durumlarda kesin sonuç alınamadığından ve projede şüpheyi yer vermemek için rapora dahil edilmemiştir.

Tartışma 3.3: Fraktal geometrinin bir konusu olan Sierpinski Üçgeni ile ilgili çalışmalara yeni bir bakış getireceğini düşünüyorum.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve değerli yardımlarını esirgemeyen Matematik öğretmenim Sayın Eşref GÜREL' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamın her bölümünde beni teşvik eden ve çalışmama en uygun ortamın oluşturulmasını sağlayan aileme destekleri için sonsuz teşekkür ediyorum.

Ayrıca büyük bir özveride bulunarak, projemin hazırlanmasında her türlü olanağı sağlayan Denizli Bilim ve Sanat Merkezi Müdürü Sayın Süleyman ARSLAN' a teşekkürlerimi borç bilirim.

C. UYSAL

KAYNAKLAR:

Craine, T. V.,(1994) Mathematics Teaching in the Middle School,
“<http://illuminations.nctm.org/>”

http://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number

<http://www.mathematische-basteleien.de/triangularnumber.htm>

<http://www.shyamsundergupta.com/triangle.htm>

Pappas, T. (2003) Yaşayan Matematik, Doruk yayınları, sayfa 158 – 159

Wells, D. Matematiğin Gizli Dünyası, Doruk yayınları, sayfa 47 – 50

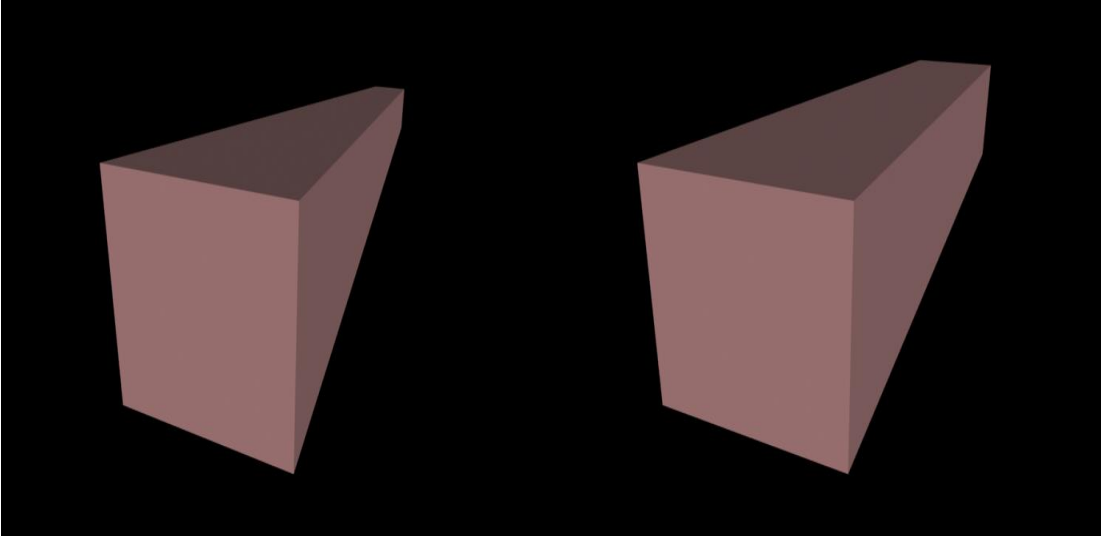
ÜÇ BOYUTLU AÇI

**HAZIRLAYANLAR
E. KOŞAR**

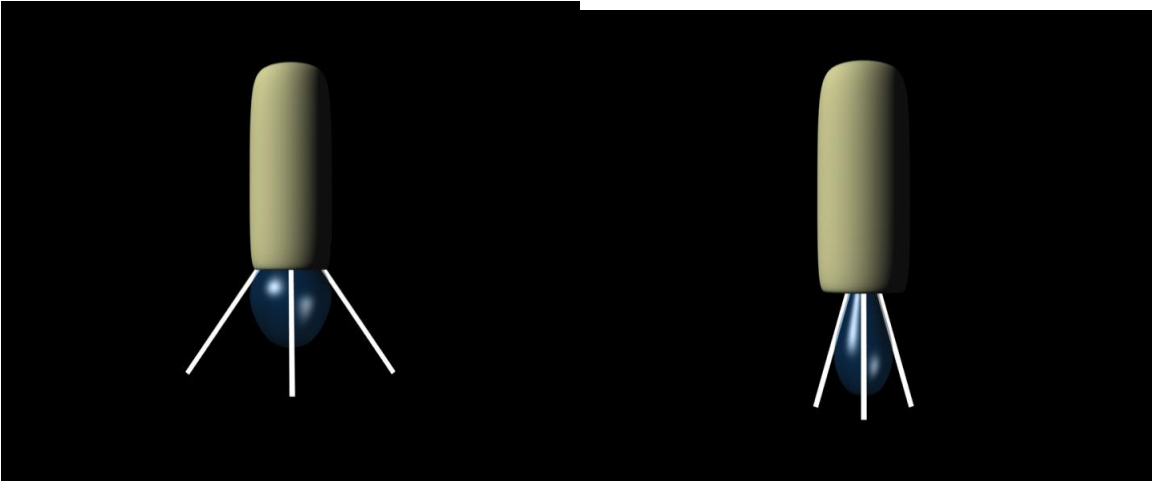
**DANIŞMAN:
ERDOĞAN ÇAĞLAR
TOKAT BİLİM VE SANAT MERKEZİ
-2011-**

(Bu Proje 43.Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Arası Araştırma Projeleri Yarışmasında Samsun Bölge Sergisinde 1. Olup Ankara Final Sergisinde sergilenmeye değer bulunmuştur.)

ÜÇ BOYUTLU AÇI



Yukarıdaki 2 resme bakalım. Bu 2 resimde de bizlere henüz ilkokul sıralarındayken gösterilen perspektif olayını görüyoruz. Fakat 2 şekil de birbirinin aynısı olmasına karşın aynı mesafede 1. şekil sanki çok daha uzaklara gitmiş gibi bir görüntü çizerken 2. resimde bu kadar bariz bir daralma olmamıştır. Perspektif manzaralı resimleri düşündüğümüzde bu 2 durumda binaların boylarındaki kısaltmalar, yolların daralması ve de resmin sonundaki bir şeklin bize uzaklığı değişmiş gibi bir görüntü oluşur. Peki neden? Ya da şöyle soralım: bu daralmanın açılarla bir ilişkisi olduğu aşikâr, ancak bu şekillerin daralmalarındaki ölçüde açı kavramı bizim için yeterli oluyor mu?



Ya da bir musluğun ağzından damlamak üzere olan bir su damlasını düşünelim. Bu su damlası zamanla uzar uzar uzar ve sonunda bir noktadan sonra damlar. Peki, ama hangi nokta? Su damlamadan önce hangi bu anı tahmin edebilir miyiz? Damlanın düşeceği anın belirli bir kriteri var mıdır?

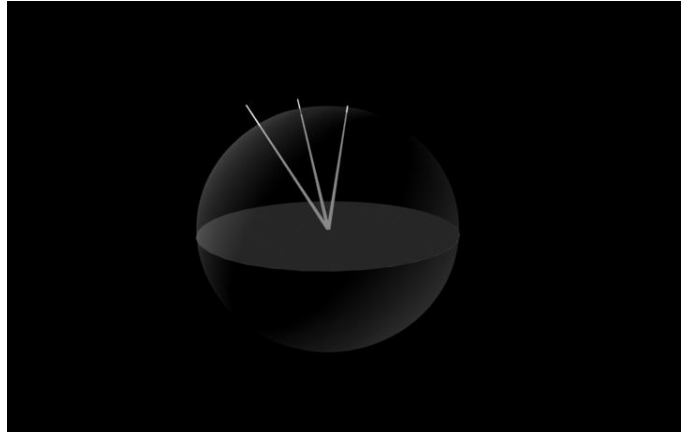
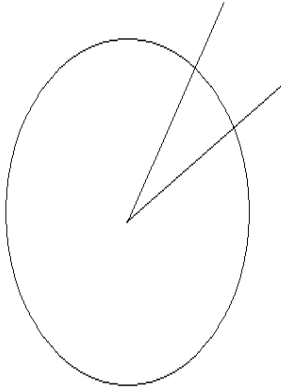
Bu 2 duruma da baktığımızda olayın içinde bir açı olduğunu anlıyoruz. Sanki su damlasının yüzeyi bir açının yayı gibi. Gittikçe daralıyor. Ya da perspektiflerimizde, açının başlangıç noktasını gittikçe geri alınıyor da aynı uzunluktaki yay daha büyük bir çember üzerinde ölçüldüğü için açı küçülüyor gibi. Peki, ama ya binaların yüksekliği ne olacak? Hepsinde bir açı kavramı var ama bizim bildiğimiz açı bunun için yeterli olmuyor.

Bilim ve teknoloji çok ilerledi. Artık uzay çağındayız. İnsanlar Uzay ve geometri hakkında hiç olmadığı kadar çok bilgiye sahip insanoğlu. Ve artık sınırları aşmak, yeni şeyler bulmak istiyorlar. 4. boyutu çözmek artık yeni hedef. Ve işte tam bu esnada aklıma bir soru geliyor. Peki, 3. boyutta her şey bitti mi? Sanırım çoğu kişi en azından sınırlara gelindiğini düşünüyor. Ama perspektif resimler ve su damlasında gördüğümüz gibi henüz geometrinin cevaplayamadığı şeyler var. Bu düşünceyle çıktığımız arayışta bizim ihtiyacımızı acaba açının 3. boyutu kazanmış halimi diye düşündük ve ortaya 3. boyutta 3. boyutlu açığı çıkardık.

3. boyutta açı kavramı

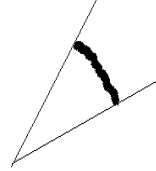
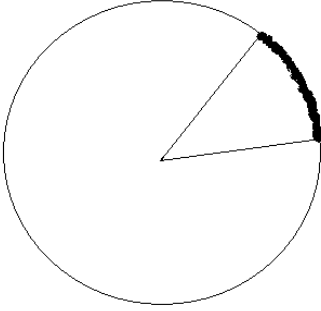
2. boyutta başlangıç noktaları aynı olan 2 ışın alırız. Işınlardan kalan bölge 2. boyutta açı olarak tanımlanır. Bu açının ölçü aleti ise çemberdir.

3. boyutta başlangıç noktaları aynı olan 3 ışın alırız. Işınlardan kalan bölgeyi 3 Açı olarak tanımlarız. Bu Açının ölçü aleti ise küredir.



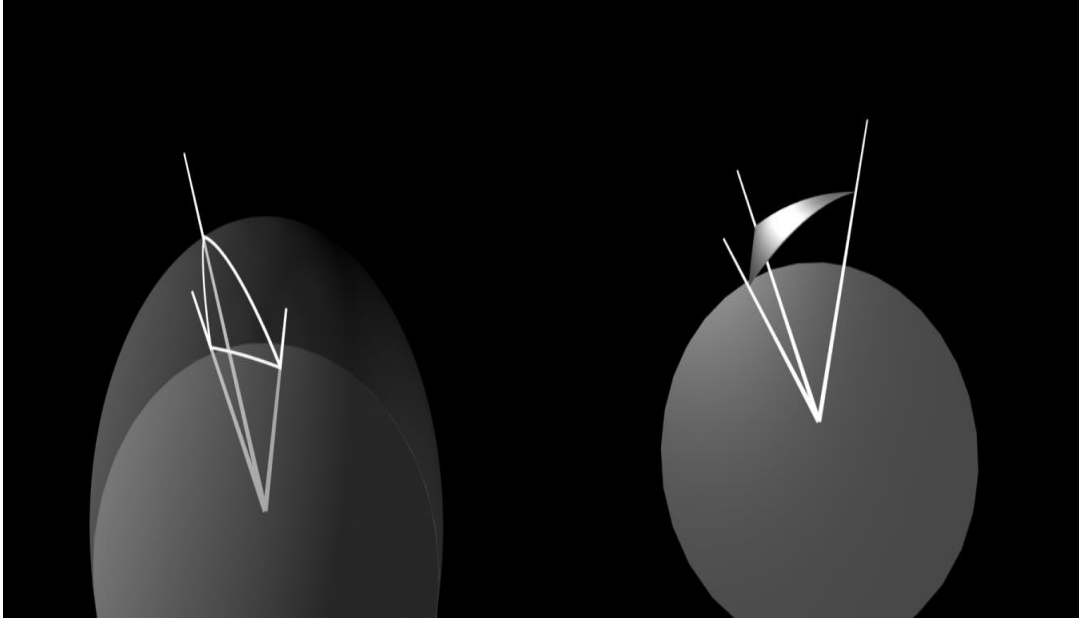
Çemberde açı ölçmeyi öğretildiği kadar Basit düşünmeyip inceleyelim.

2 ışının çemberi kestiği noktalar çember Üzerinden en kısa yolla birleştirilir. Bu durumda çemberin üzerinde çizdiğimiz çizginin uzunluğunun çemberin çevresine oranı ise bizim açımızın ölçüsüdür.



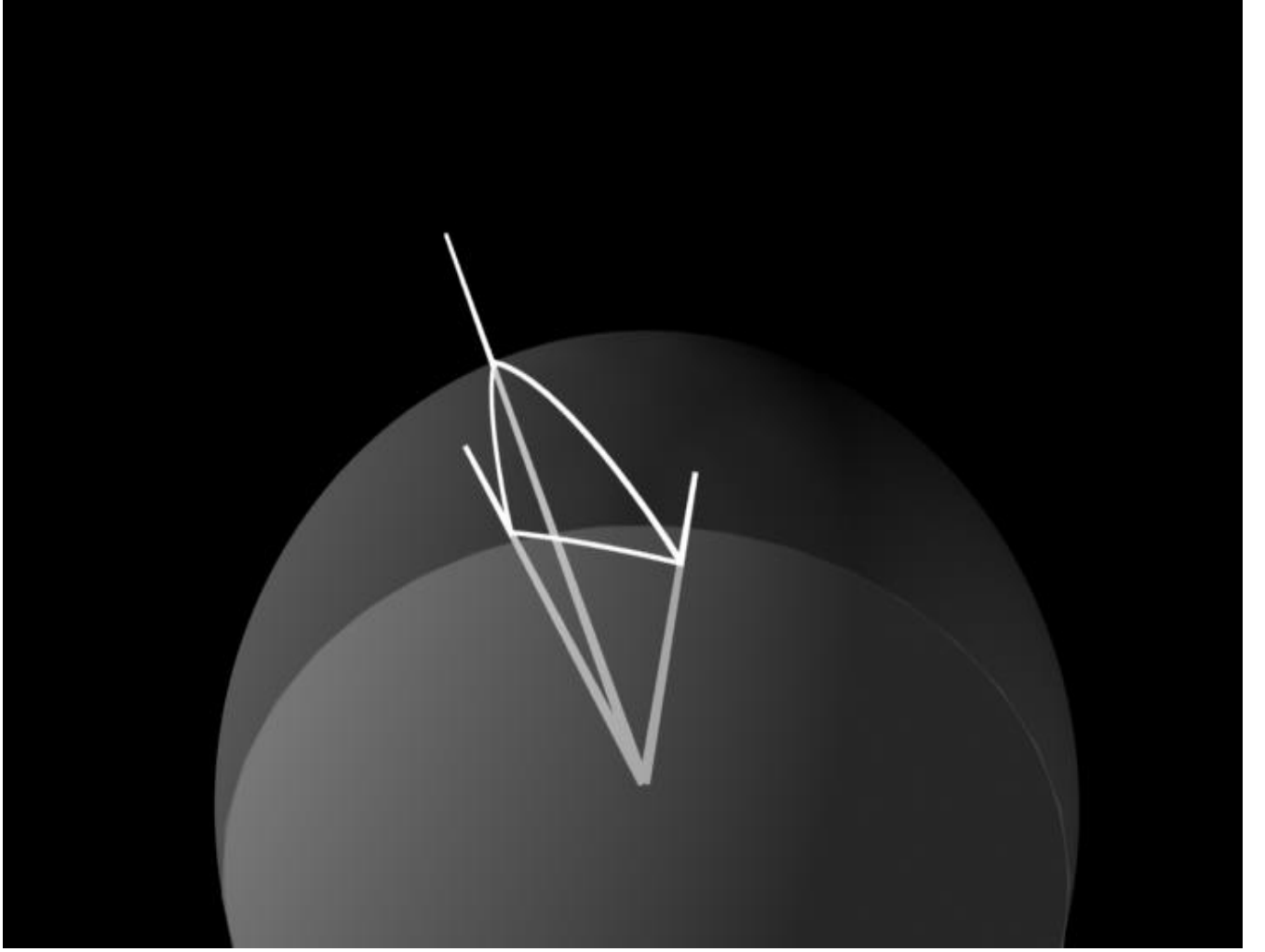
Merkezden çıkan 3 ışın küreyi 3 noktada keser. Bu 3 noktayı küre üzerinde en kısa yoldan birleştirmemiz gerekir. Küre üzerindeki 2 noktayı ise en kısa yoldan merkezi kürenin merkeziyle aynı olan çemberin üzerinden birleştirebiliriz. Bu şekilde noktaları 2'şerli birleştirdiğimizde yüzeyde bir

Küresel üçgen oluşur. İşte merkezden çıkan 3 ışın ve küresel üçgenden oluşan bu şekil bize 3. boyutta 3 boyutlu açıyı gösterir. Ya da başka bir bakışla merkezden çıkan 3 üçgen ve bir küresel üçgenden oluşan şekil 3 boyutlu açıdır da denebilir



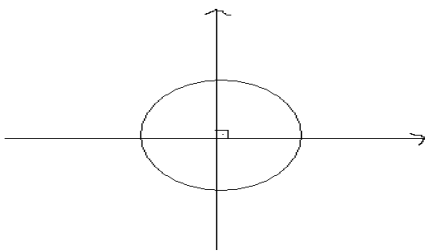
3 BOYUTLU AÇININ ÖLÇÜMÜ

Aradığımız ölçü yüzeydeki küresel üçgenin alanıdır. Bu küresel üçgenin alanına A , küresel üçgenin açılarına da a , b ve c dersek Girard Teoremi'ne göre $a+b+c=\pi+A/r^2$ dir. A 'yı yalnız bıraktığımızda $A=(a+b+c-\pi)r^2$ olur. Bizim tam açımız $4\pi r^2$ olduğuna göre ve bizim aç ölçümüz yüzeydeki üçgenin alanının kürenin alanına oranı olduğuna göre, oranladığımızda r nin bir önemi kalmaz. Ki bu gayet doğrudur. Zira 2 boyutlu açıda da bunu görürüz. O halde eşitliğimizde r leri görmediğimizde üç boyutlu bir açının ölçüsü $a+b+c-\pi$ yani $a+b+c-180$ olur.

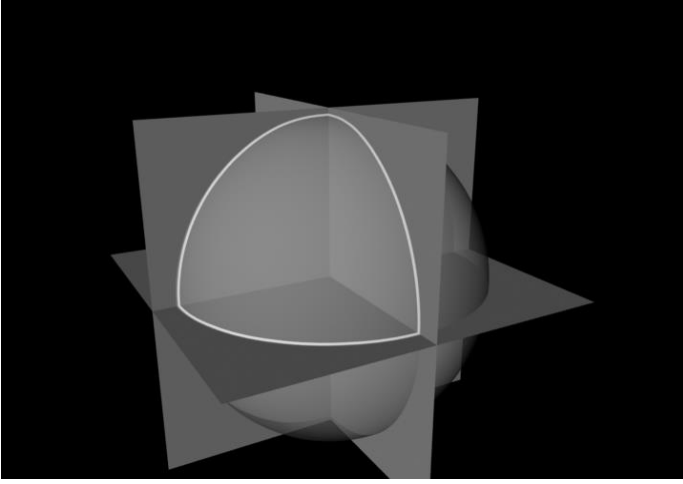


3 BOYUTLU KOORDİNATTA 3 BOYUTLU AÇI

2. boyutta 2. boyuttaki bir açıyı ölçmek için kullandığımız çemberi 1. boyuttan 2 doğruyla 2 üzeri 2 adet bölgeye ayırırız.



3. boyutta 3. boyuttaki bir açıyı ölçmek için kullandığımız küreyi ise 2. boyuttan 3 düzlemle 2 üzeri 3 adet bölgeye ayırırız.

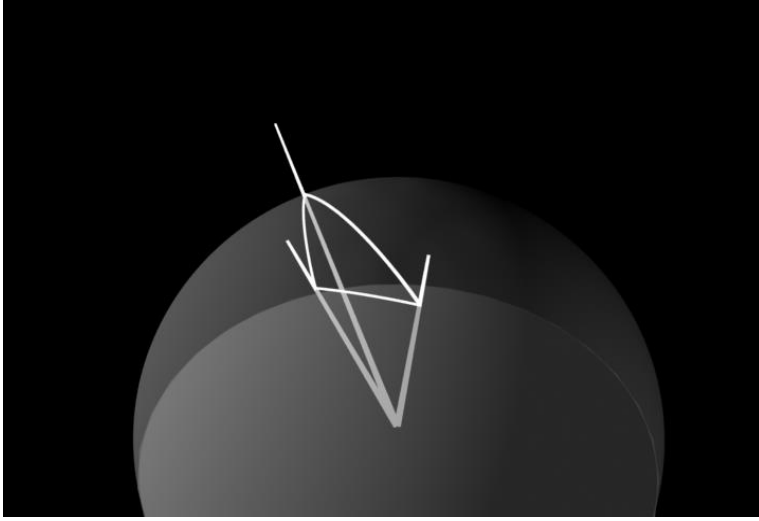


2. boyutta her bir bölge 90 derecedir. Bizim 3 boyutlu açımızda da her bir bölgeyi oluşturan açımızın ölçüsü 90 dereceküp gelir. Zira tam açı 4π r üzeri 2den dolayı 720 derece olduğuna göre ve küremiz 8 eş parçaya bölündüğüne göre bu ifadenin doğruluğu sağlanır. O halde 3. boyuttan açı incelenirken uzay 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ve 8. olmak üzere 8 bölüme ayrılır.

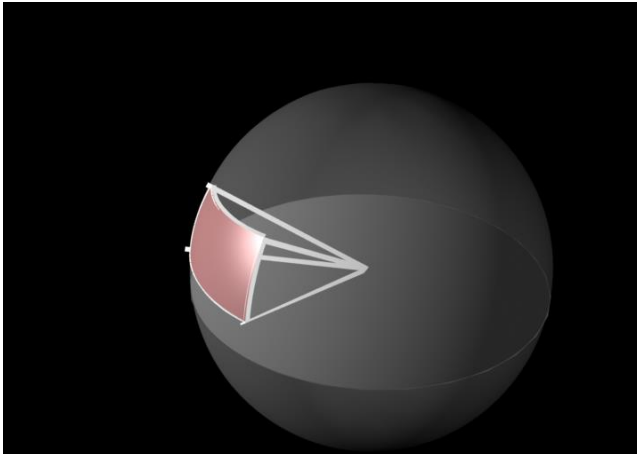
3 BOYUTLU AÇI TÜRLERİ

Buraya kadar çok güzeldi. Peki, ama bu yetti mi? Bizce yetmedi. Zira bir binanın çatısındaki daralmayı ölçmek için bu açıyı çatıya yerleştiremeyiz. Çünkü çatının 4 kenarı ve 4 yüzeyi vardır. Ancak bu onun 4. boyuttan bir açıyla ölçülmesi gerektiğini göstermez. Zira çatıyı, dar kısmını uzatıp bir noktada birleştirerek kürenin merkezine yerleştirdiğimizde halen küre yüzeyinde 2 boyutlu bir alan kaplamaktadır. O halde 3 boyutlu açı tanımı şimdi biraz daha değişmelidir. Zira bu görünüşe göre 3 boyutlu açının farklı çeşitleri de olmalıdır.

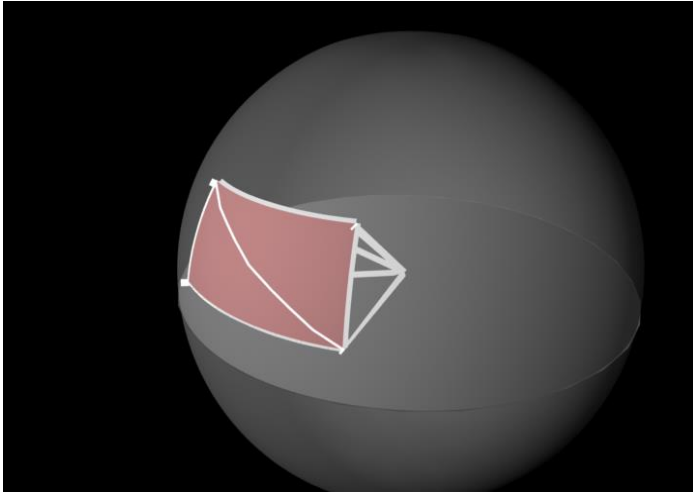
***3gensel 3 boyutlu açı:** Kürenin merkezinden çıkan 3 ışının arasında kalan bölgeyi ölçülendirmeyi amaçlar. Kürenin merkezinden çıkan 3 ışının küre yüzeyinde oluşturduğu küresel üçgenin alanıyla bulunur.



4gensel 4 boyutlu açı: Kürenin merkezinden çıkan 4 ışının arasında kalan bölgeyi ölçülendirmeyi amaçlar. Kürenin merkezinden çıkan 4 ışının kürenin yüzeyinde bir şekil oluşturur. Bu şeklin alanı ise bize 4 boyutlu açının ölçüsünü verir.

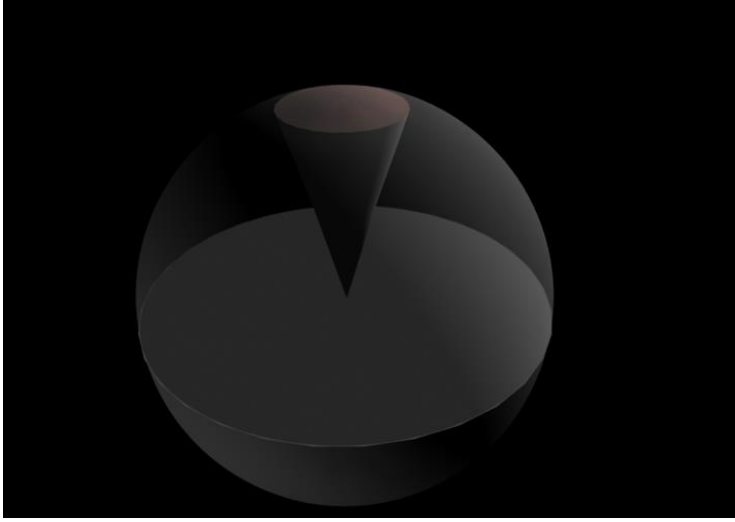


Peki 3 gensel 3 boyutlu açının nasıl ölçüleceğini biliyorduk. Ama bu yeni açı çeşitlerini nasıl ölçeceğimizi bilmiyoruz. O halde durumu biraz inceleyelim. 2 boyuttaki çokgenleri düşünelim. 4 gen 5gen 6gen. Hepsinin de ortak bir yapıtaşı vardır. Üçgen. Tüm çokgenler 3genlerden oluşur. 4gen 2 üçgenin 5gen 3 üçgenin 6gen 4 üçgenin birleştirilmesiyle elde edilir. O halde 4gensel 4 boyutlu açının yüzeyde oluşturduğu şekle bakalım. 3gensel 3 boyutlu açıda yüzeyde oluşan 3genin küresel üçgen olarak adlandırıldığını biliyoruz. Şimdiki şeklimiz içinse ise daha önceden belirlenmiş bir tanıma rastlamadık ama muhtemelen bu şeklin de küresel dörtgen olacağını düşünerek, bu şekle küresel 4gen demeyi uygun buluyoruz. O halde, aynen 2 boyutta bir dörtgeni 2 üçgenin oluşturması gibi, 3. boyutta da bir küresel dörtgeni 2 küresel üçgenin oluşturacağını çıkarıyoruz. Zira küçük bir hayal gücüyle bunu tahmin edebilir ve onaylayabiliriz. Şimdi işimiz çok kolay. Biz küresel üçgenin alanını bulmayı biliyoruz. O halde 4gensel 3 boyutlu açımızı buna göre tekrar çizecek olursak:



Gibi bir şekil ortaya çıkar. Alttaki üçgenin alanı için açılara a , b ve c dersek $a+b+c-180$ üstteki üçgen için de açılara x , y ve z dediğimizde $x+y+z-180$ diyebiliriz. O halde bizim aradığımız açı $a+b+c+x+y+z-360$ olur. Yani 4genin iç açıları toplamına t dediğimizde açımız $t-360$ derece küp olur. Bu durumu 5gensel 3 boyutlu açı için düşündüğümüzde $(a+b+c-180)+(x+y+z-180)+(u+v+k-180)$ den açılar toplamına yine t dediğimizde $t-540$ olur.

Açı çeşitlerini 3 boyutlu 6gensel açı, 3 boyutlu 7gensel, 3 boyutlu 8gensel açıaçı olarak devam ettirebiliriz. Bu şekilde bir sonsuzgene yani küreye geldiğimizde yüzeyde bir küre kapağı oluşur. Kürenin köşesi olmadığı için yüzeydeki şeklin açılarından bahsedemeyiz. Küresel dairenin yani küre kapağının alanını da $2\pi R^2$ ile bulabileceğimizi ise zaten biliyoruz.



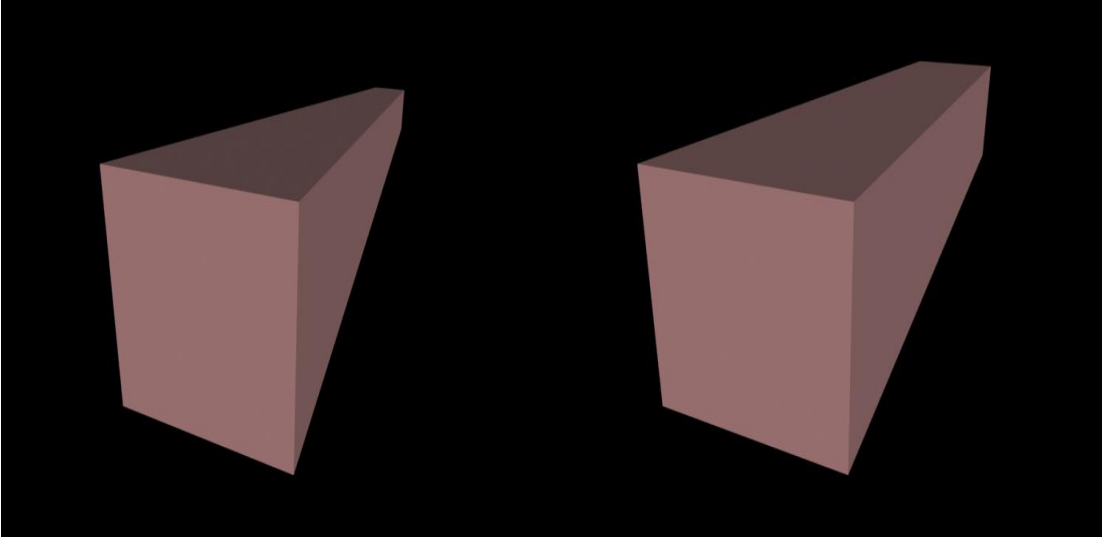
*Burada bir ayrıntı dikkatimizi çeker. Açımız n gen olduğunda onu oluşturan $n-2$ tane üçgen olur. Biz her bir üçgenin alanını buluşumuzda açılar toplamı eksi 180 olarak buluruz. O halde bir küresel açıda açılar toplamına t dediğimizde açımızın $t-(n-2)180$ işleminin sonucuna eşit olduğunu söyleyebiliriz

Bu durumda yeni bir 3 boyutlu açı tanımı yapmamız gerekir. O halde 3 boyutlu açının tanımını tekrar yapıyoruz:

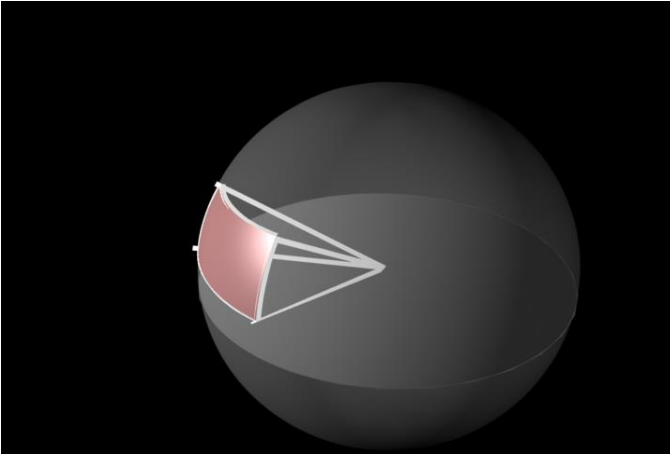
Bir kürenin merkezinden çıkan n adet ışının aralarındaki açıyı ölçmek için kullandığımız açının adıdır. Bir kürenin merkezinden çıkan n adet ışının, kürenin yüzeyinde dokunduğu n adet noktaları 2şerli olarak ve bir küresel n gen oluşturacak şekilde birleştirmemizle kürenin yüzeyinde oluşan alan 3. boyuttan bir açının ölçüsünü gösterir.

* n gen: n adet kenar ve köşeye sahip çokgen

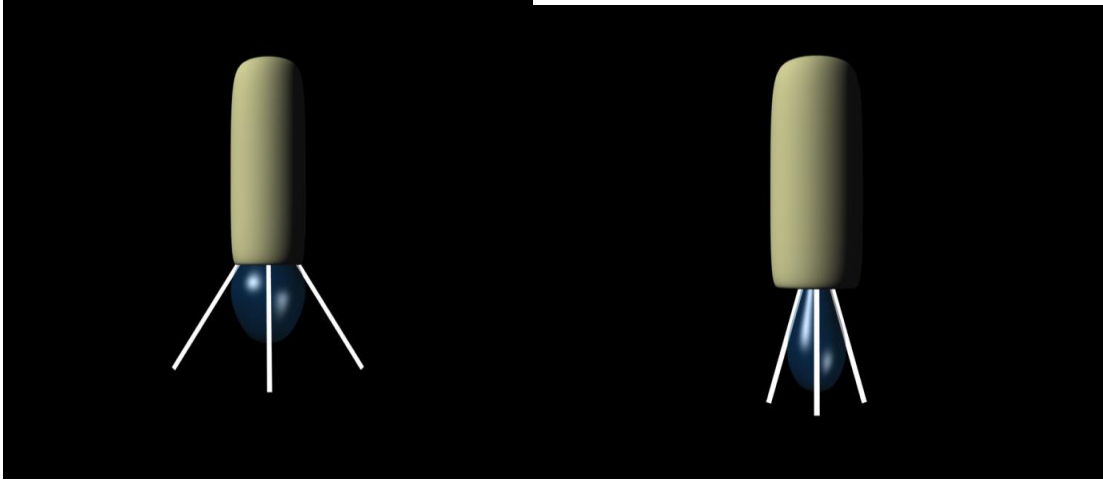
YENİ BİR BAKIŞ VE YENİ BİR GÖRÜŞ



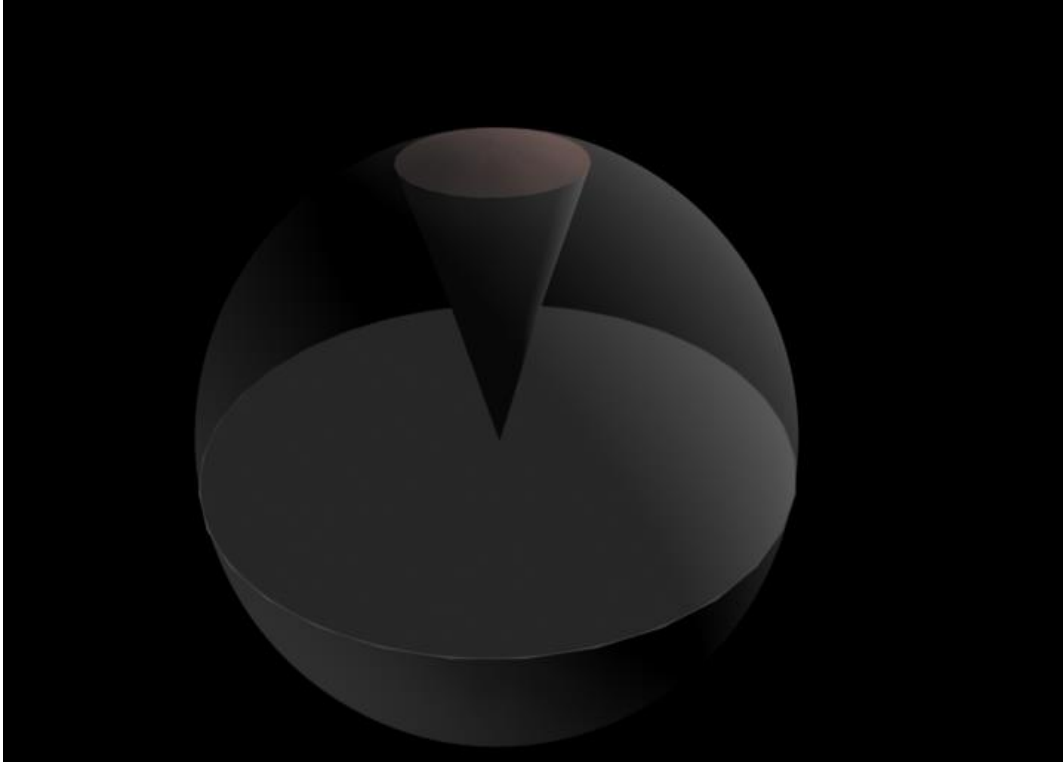
Şekilde görülen şekillerin daralma açısı 4gensel bir 3 boyutlu açıyla ölçülür. Yani şekillerin daralıp bir nokta haline geldiği noktayı merkez kabul eden bir kürenin, bu şekiller tarafından taranmasıyla yüzeyinde oluşacak alan bizlere şekillerin daralmalarındaki ölçüyü verir.



Bu durumda kabaca bir hesaplama birinci şeklin açısının daha küçük olduğunu görebiliriz. Yani birinci şeklin daralma açısının 2. şekilden daha küçük olması nedeniyle, yüzeylerindeki dörtgenlerin aynı büyüklükte olmasına rağmen arkadaki dörtgenler 1. şekilde daha küçüktür.



Su damlalarının musluktan düşme anıysa yine belli bir hesaba göredir. Bu hesabı bizlere bulduracak olan ise dairesel 3 boyutlu açılardır. Zira belirli bir noktadan su damlalarına teğet sonsuz tane ışın yolladığımızda bir dairesel 3 boyutlu açı oluşur. Yukarıdaki şekilde de görüleceği üzere bu açı gittikçe daralmaktadır. Belirli bir x açısından itibaren ise su damlası artık dayanamaz ve kendisini boşluğa bırakır.



GÖZLERDEKİ SIR

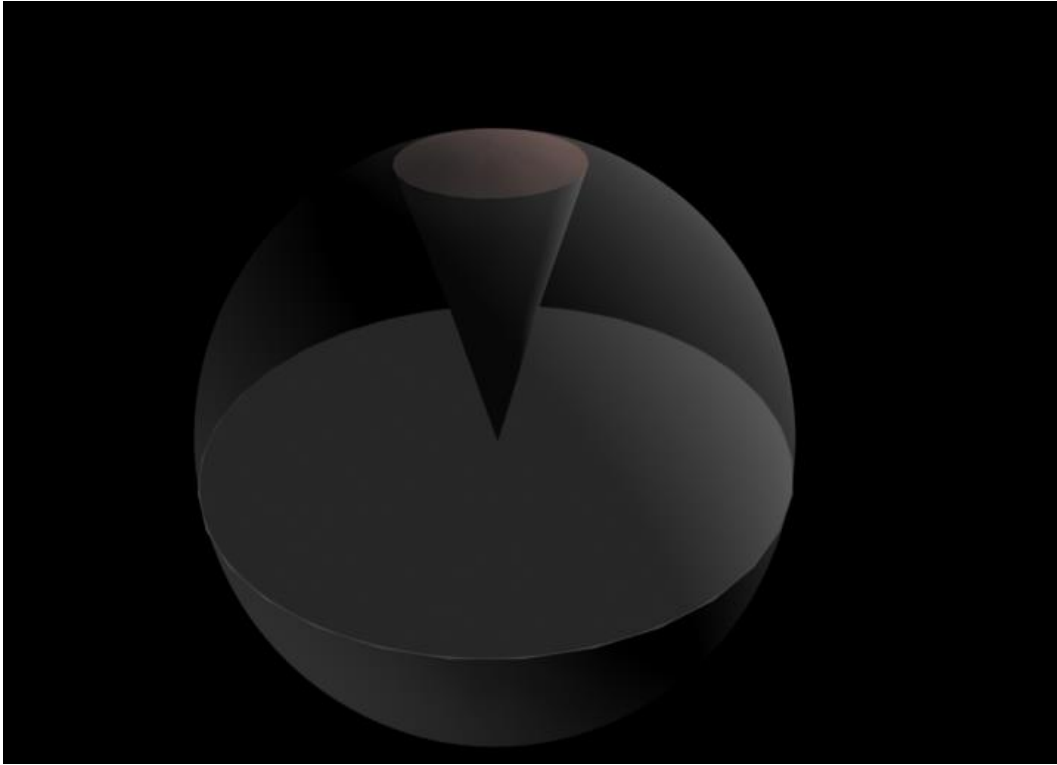


Gözler insanlık tarihi boyunca hep gizemli olarak görülmüş, üzerine birçok vasıf yüklenmiştir. Ve bugün bu vasıfların arasına bugün 3 boyutlu açığı da katılmış bulunmaktadır.



İnsanoğlu devasa büyüklükteki bir kürenin üzerinde yaşamaktadır. Ancak bu kürenin tamamını bir anda göremez. Yani insanın bir görme açısı vardır. Peki, insanın görme açısı nasıl bir 3 boyutlu açıdır?

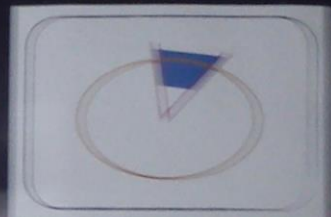
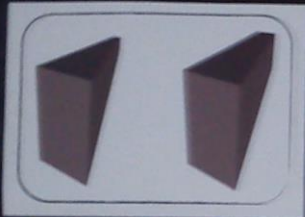
Işığın yayılması ve insanın görmesi de tarih boyunca çok tartışılmıştır. Bazı dönemlerde insanlar insanın gözünden saçılan bazı maddelerle görme olayının gerçekleştiğine inanmıştır. Biyolojik anlamda bu bilgi günümüzde yanlış olsa da insanın görme açısını anlamak için oldukça önemlidir. Zira insan gözünü bir el feneri gibi düşündüğümüzde gözden çıkan dairesel bir 3 boyutlu açı etrafını aydınlatmakta gibidir. Biyolojik olarak doğru olanı ise, bu ışınların çevreden insan gözüne doğru olmasıdır. Bunun dışında önemli bir fark yoktur. Ve insanın çevresini görme açısı da, çevreden insan gözüne giren ışınların daralma açısına eşittir. Bu durumu hayal edecek olduğumuzda ya da direk el fenerini düşündüğümüzde insanın görme açısının aşağıdaki gibi bir açı olduğunu görmek hiç de zor değildir.



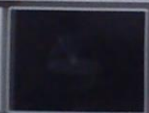
Tabi bu durum ışığın doğrusal yayıldığını farz edilerek hesaplanır. Ayrıca insanın göz bebeği sabit de değildir. Gözün beyaz kısmında insan görmek istediği alanı seçebilir. O halde görme olayında insanın o an görebildiği bölgenin açısı gibi kafasını sabit tutarak görebileceği alanın açısı da vardır. İnsanın göz bebeğini düşündüğümüzde bu açı bizim sunmuş olduğumuz herhangi bir açı çeşidine uymamaktadır. Zira bu açı bir 3 boyutlu açı değil 2 3gensel 3 boyutlu açının sırt sırta birleşmiş halidir.

Bugün insanlığın bilgisi üzerine eklemiş olduğumuz bu tanımın ilerleyen yıllarda suyun damlama anı, insanın görme açısı ve perspektif resimlerdeki açılar gibi daha birçok uygulama alanı bulacağı, insanlığın kavrayamadığı birçok olaya da 3 boyutlu açının açıklık getireceğini umuyor ve de biliyoruz.

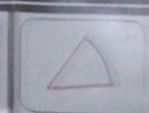
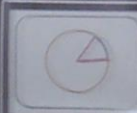
MATEMATİKTE
YENİ BİR BOYUT
3 BOYUTLU AÇI

[illegible]

3. BOYUTTA AÇI KAVRAMI



2. boyutta başlangıç noktaları aynı olan 2 ışın alırız. Işıklar arasında kalan bölge 2. boyutta açısı olarak tanımlanır. Bu açının ölçü aleti ise çemberdir.



Çemberde Açr Ölçmeyi Öğreleyelim

Zıncın çemberi kestici noktalar çember üzerinden en kısa yolla birleştirilir. Bu durumda çemberin üzerinde çizdiğimiz çizginin uzunluğunun çemberin çevresine oranı ise bizim açımızın ölçüsüdür.

[illegible]

3 BOYUTLU AÇININ ÖLÇÜMÜ

Girard Teoremi: $a+b+c=\pi+A/r^2$

A'yı yalnız bırakalım

$$A = (a + b + c - p) r Z$$

dereceküpA= a+b+c-pi

Girard Teoremi'ne göre: $180 < a + b + c < 540$

$$= a + b + c - 180$$

BEW! SORUNUMUZ ÇÖZÜLDÜ ANA



PROJE RAPORU

PROJENİN ADI

KARE, NOKTA, KARE

HAZIRLAYAN:

M. KART

DANIŞMAN :

EŞREF GÜREL

DENİZLİ BİLİM VE SANAT MERKEZİ

MATEMATİK ÖĞRETMENİ

Denizli – 2012

**(Bu Proje Tübitak Ortaöğretim Öğrencileri Arası Araştırma Projeleri Yarışmasında
Antalya Bölge Sergisine katılmıştır.)**

PROJENİN AMACI

Kare ve dikdörtgen şeklinde düzenlenmiş nokta ızgaralarında, noktaları köşe kabul ederek farklı boyutlarda kareler çizmek; çizilen karelerin sayısını hesaplamak için bir yöntem geliştirmek.

PROJE ÖZETİ

Bir düzlemde bulunan kare ($n \times n$) veya dikdörtgen ($m \times n$) şeklinde düzenlenmiş nokta ızgaralarında köşeleri nokta olacak şekilde düz veya çapraz kareler çizilebilir. Çizilen karelerin sayılması küçük nokta ızgaraları için oldukça kolaydır. Ancak nokta ızgarasının büyüklüğü arttıkça karelerin sayılması hem zorlaşır hem de hata yapma olasılığı büyür. İncelediğimiz önceki çalışmalar hata payını azaltamamış ve çizilen şeklin kare olduğunu garanti altına alamamıştır.

Yaptığımız bu çalışmada karesel ve dikdörtgensel nokta ızgaralarında çizilen kareler gruplandırılarak genelleştirilmiş; bu genelleme yapılırken elde edilen toplamsal ifadeler formülleştirilmiştir. Bu formülle de hem kolay bir sayma yöntemi sağlanmış hem de sonuç güvenilir ve tutarlı hâle getirilmiştir.

İÇİNDEKİLER

Özet	2
İçindekiler	3

Birinci Bölüm

GİRİŞ

1. Temel Tanım ve özellikler	4
------------------------------------	---

İkinci Bölüm

YÖNTEM

2.1 Problem	7
2.2 Problem.....	8
2.3 Problem	9
2.4 Problem	10
2.5 Problem	11
2.6 Problem	11
2.7 Problem	12
2.8 Problem	13
2.9 Problem	13
2.10 Problem	14

Üçüncü Bölüm

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

3.1 Sonuç	16
3.2 Sonuç.....	19
3.1 Tartışma.....	22
3.2 Tartışma.....	22
Teşekkür.....	23
Kaynaklar	24

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde projemizle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilecektir.

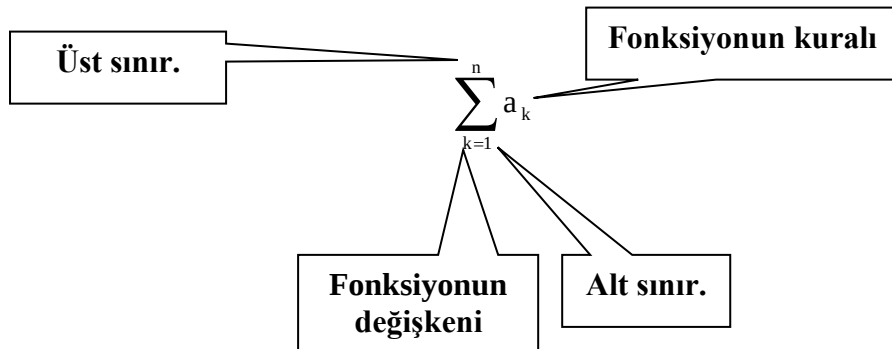
Bir kare nokta ızgarasında köşeleri kare nokta ızgarasının noktaları olacak şekilde kareler çizilebilir. Kenar uzunluğu doğal sayı olan düz kareler ve kenar uzunluğu kareköklü sayılar olan çapraz kareler sayıldığında kare sayılardan oluşan bir örüntü oluşur. Nokta ızgaralarındaki nokta sayısı küçük olduğunda oluştura bileceğimiz kare çeşidi oldukça azdır ve bir sonuca varmak kolaydır ancak nokta ızgarasındaki nokta sayısı büyüdükçe oluşturabileceğimiz kare çeşitliliği ve bu karelerin nokta ızgarasındaki bulunma sayısı artar ve bu karelerin toplam sayısını bulmak gittikçe zorlaşır. Bu projede; bir kare veya dikdörtgen nokta ızgarasındaki noktalar üzerinde bulunan karelerin sayısının bulmak için bir yöntem geliştirilmiştir.

Bu konunun seçiliş nedeni daha önce sayı nokta ilişkisi üzerinde yeterli ve kesin sonuç veren çalışmaların eksikliğidir. Bu yöntemler tam olarak genelleştirilemediği için pratik olarak uygulanamamakta, artan kenar uzunluklarında hata payı çok büyük olmaktadır.

Tanım 1.1: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olsun.

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ toplamı $\sum$ (sigma) sembolü kullanılarak kısaca $\sum_{k=1}^n a_k$ biçiminde

gösterilir ve “toplam $k=1$ den n ye kadar a_k ” şeklinde okunur.



Özellik 1.2. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

a) $\sum_{k=1}^n c = nc$

b) $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$

c) $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$

d) $p, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r} = \sum_{k=p+r}^{n+r} b_{k-r}$

Kural 1.3. Toplam sembolü kuralları

a) Ardışık sayıların toplamı

$$1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Kare sayıların toplamı

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) Küp sayıların toplamı

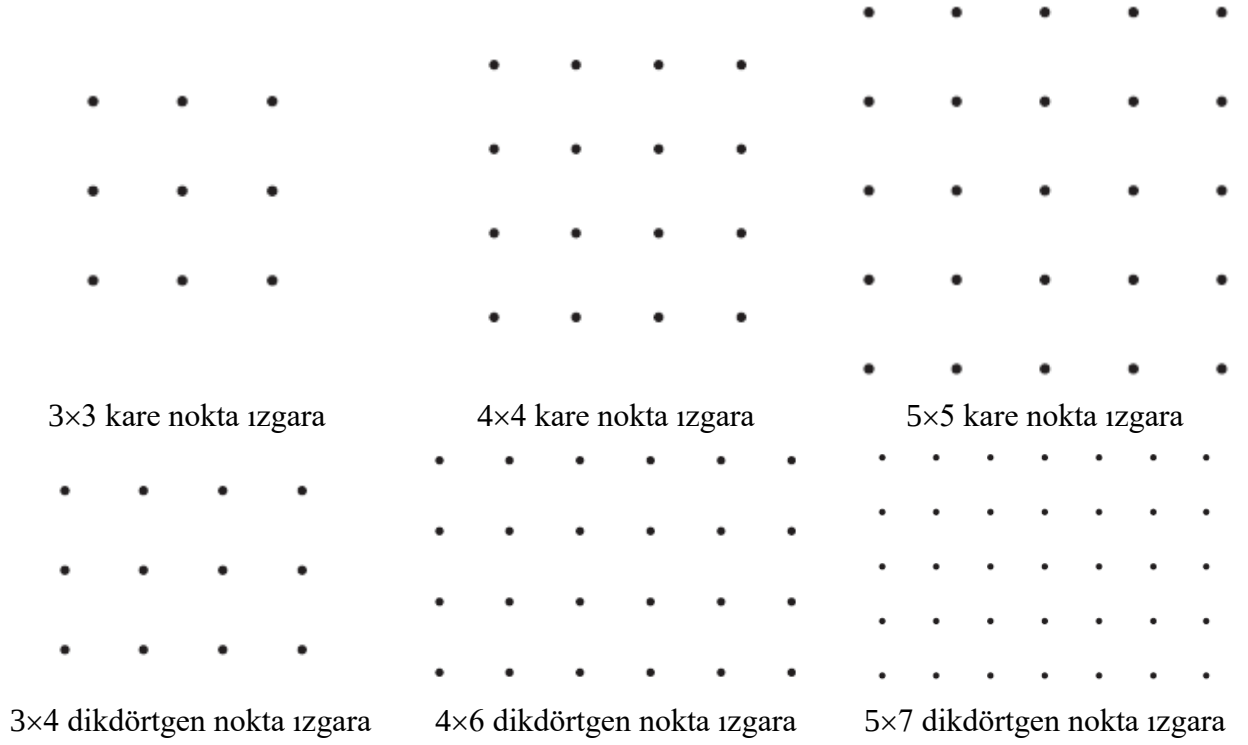
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Tanım 1.4: Düzlemde noktaların birim karenin köşelerini oluşturacak şekilde düzenlenmesine kare nokta ızgarası adı verilir.

Satırda ve sütunda n tane nokta bulunan kare nokta ızgarasına $n \times n$ kare ızgara adı verilir.

Satırda m tane ve sütunda n tane nokta bulunan kare nokta ızgarasına $m \times n$ dikdörtgen ızgara adı verilir.

Çizelge 1: Kare nokta ızgaralarını şekil modeli olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

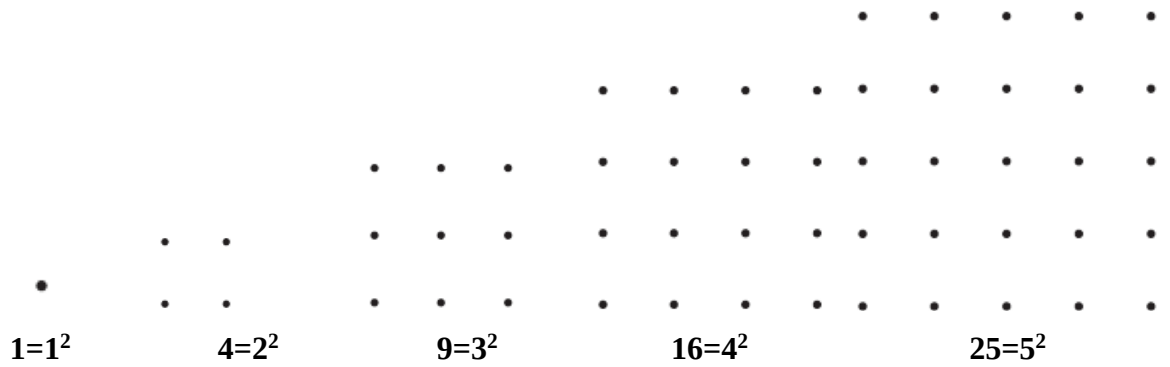


ŞEKİL – 1

Tanım 1.5: Nokta sayısı kare şeklinde düzenlenebilen doğal sayılara kare sayılar denir. n bir doğal sayı olmak üzere n^2 şeklinde gösterilir.

1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2

Çizelge 2: Kare sayıları şekil modeli olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

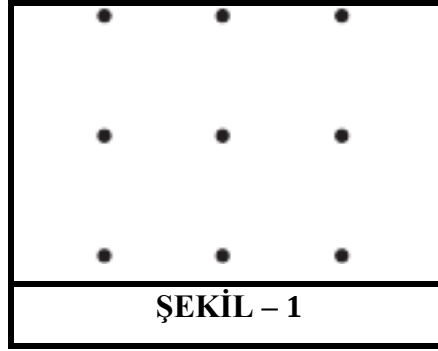


ŞEKİL – 2

İKİNCİ BÖLÜM

YÖNTEM

Problem 2.1:Şekil – 1’de verilen 3×3 kare nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

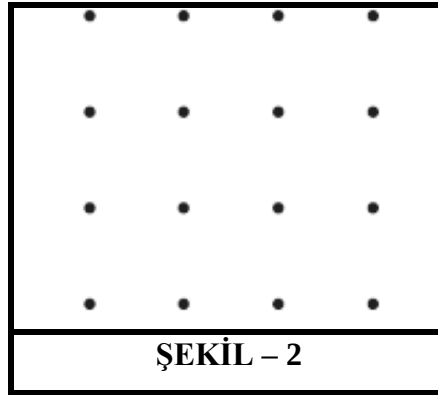
Düz ve çapraz olarak kareler oluşur.

Çizelge 2.1. 3×3 kare nokta ızgarasında kareler

1×1 : 4 tane 2×2 : 1 tane	$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$: 1 tane

Toplam: $1+4+1$ kare

Problem 2.2:Şekil–2’de verilen 4×4 kare nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

Düz ve çapraz olarak kareler oluşur.

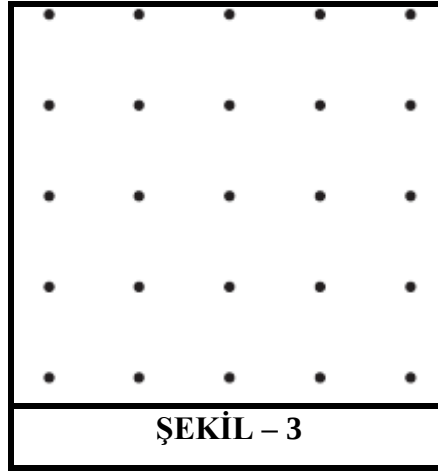
Çizelge 2.2. 4×4 kare nokta ızgarasında kareler

1×1: 9 tane 2×2: 4 tane 3×3: 1 tane	$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$: 4 tane	$\sqrt{5} \times \sqrt{5}$: 2 tane

Toplam:1+4+9+4+2=20 ifadesini;

1+9+2.4+2 =1+9+2.(4+1)=20 şeklinde düzenleyebiliriz.

Problem 2.3:Şekil-3’de verilen 5×5 kare nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

Düz ve çapraz olarak kareler oluşur.

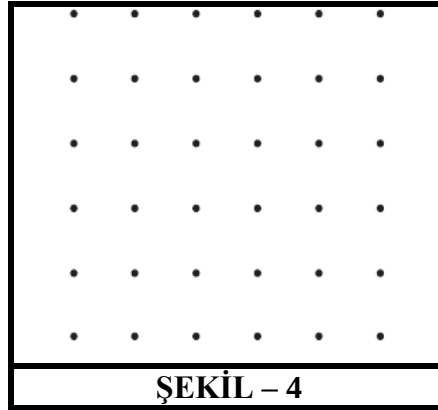
Çizelge 2.3. 5×5 kare nokta ızgarasında kareler

1×1 : 16 tane 2×2 : 9 tane 3×3 : 4 tane 4×4 : 1 tane	$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$: 9 tane $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$: 1 tane	$\sqrt{5} \times \sqrt{5}$: 8 tane $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$: 2 tane

Toplam: $1+4+9+16+9+1+8+2=50$ ifadesini

$4+16+2(9+4+1)+2=50$ şeklinde düzenleyebiliriz.

Problem 2.4:Şekil-4’de verilen 6×6 kare nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

Düz ve çapraz olarak kareler oluşur.

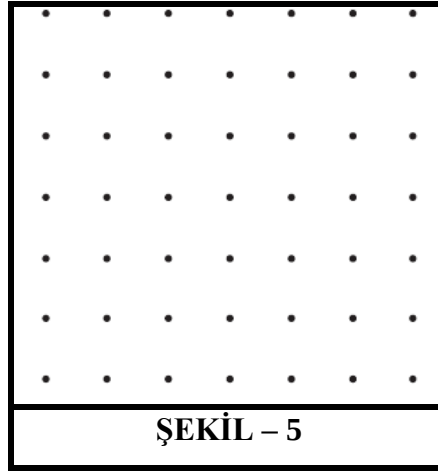
Çizelge 2.4. 6×6 kare nokta ızgarasında kareler

1×1: 25 tane 2×2: 16 tane 3×3: 9 tane 4×4: 4 tane 5×5: 1 tane	$\sqrt{2} \times \sqrt{2}$: 16 tane $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$: 4 tane	$\sqrt{5} \times \sqrt{5}$: 18 tane $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$: 8 tane $\sqrt{17} \times \sqrt{17}$: 2 tane
$\sqrt{13} \times \sqrt{13}$: 2 tane		

Toplam: $1+4+9+16+25+16+4+18+8+2+2=105$ ifadesini;

$1+9+25+2(16+9+4+1)+2(4+1)=105$ şeklinde düzenleyebiliriz.

Problem 2.5: Şekil-5’de verilen 7×7 kare nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

Bir önceki problemde uyguladığımız düzenlemeyi burada da uygularsak

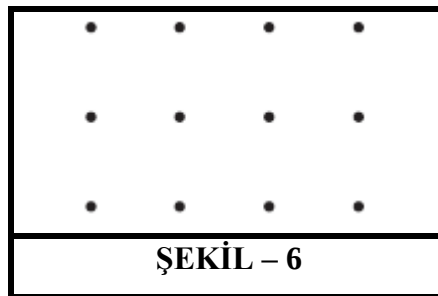
$$1+4+9+16+25+36+25+9+1+32+18+8+2+8+2$$

$$4+16+36+(2 \cdot 25+2 \cdot 16+2 \cdot 9+2 \cdot 4+2 \cdot 1) + (2 \cdot 9+2 \cdot 4+2 \cdot 1)+2 \cdot 1$$

$$4+16+36+2(25+16+9+4+1)+2 \cdot (9+4+1)+2 \cdot 1=196$$

şeklinde düzenleyebiliriz.

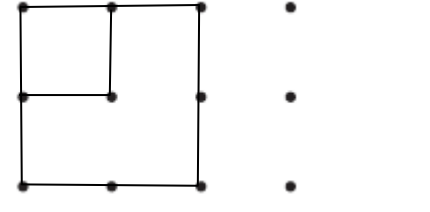
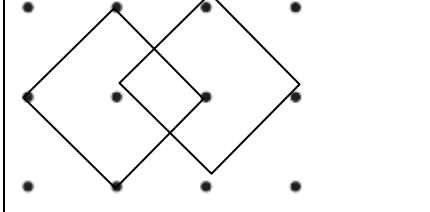
Problem 2.6: Şekil-6’de verilen 3×4 dikdörtgen nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

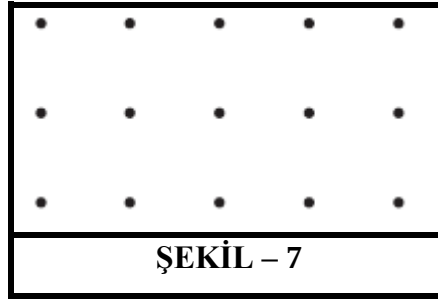
Düz ve çapraz olmak üzere 2 farklı kare bulunur.

Çizelge 2.6. 3×4 kare nokta ızgarasında kareler

	
3.2+2.1	2.1

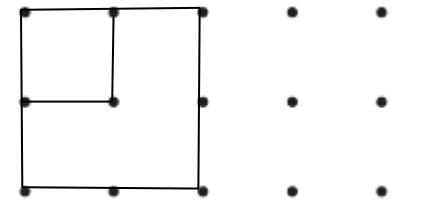
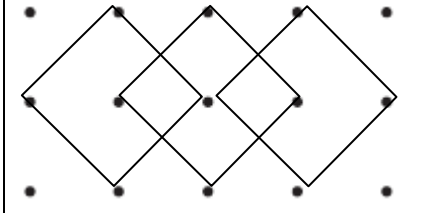
Toplam: 3.2+2.1+2.1=10

Problem 2.7:Şekil–7’de verilen 3×5 dikdörtgen nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?

**ÇÖZÜM:**

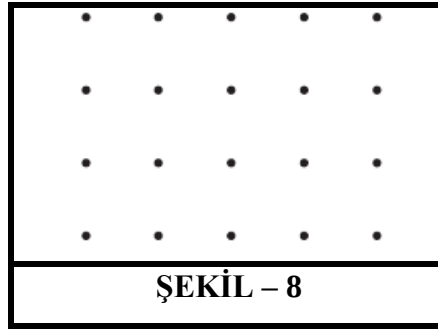
Düz ve çapraz olmak üzere 2 farklı kare bulunur.

Çizelge 2.7. 3×5 kare nokta ızgarasında kareler

	
4.2+3.1	3.1

Toplam: 4.2+3.1+3.1=14

Problem 2.8:Şekil-8’de verilen 4×5 dikdörtgen nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

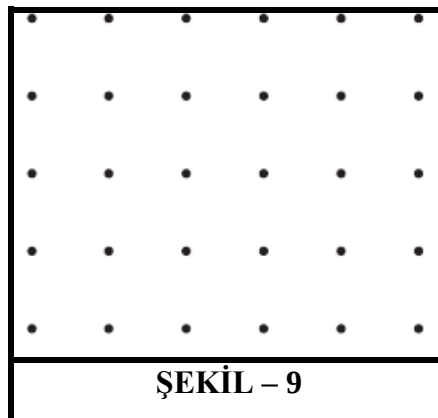
Düz ve çapraz olmak üzere 2 farklı kare bulunur.

Çizelge 2.8. 4×5 kare nokta ızgarasında kareler

4.3+3.2+2.1	3.2	2.1+2.1

Toplam: 4.3+3.2+2.1+3.2+2.1+2.1=30

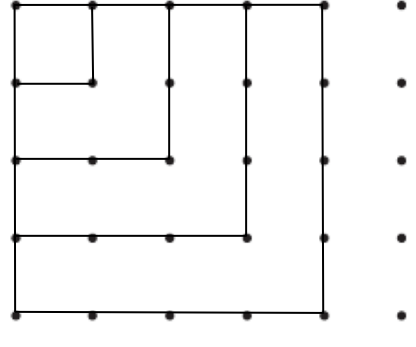
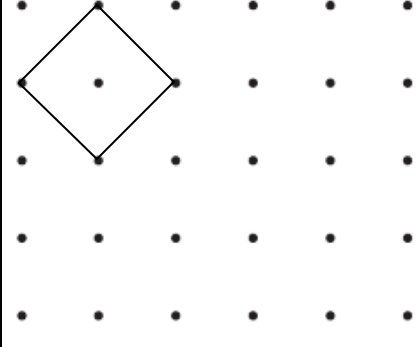
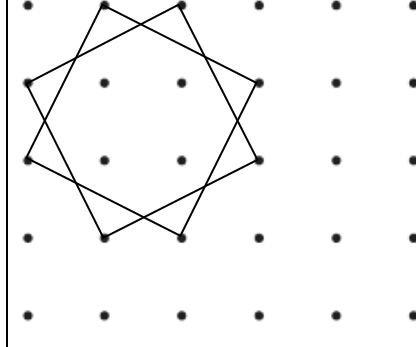
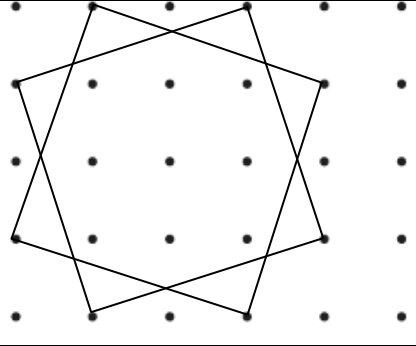
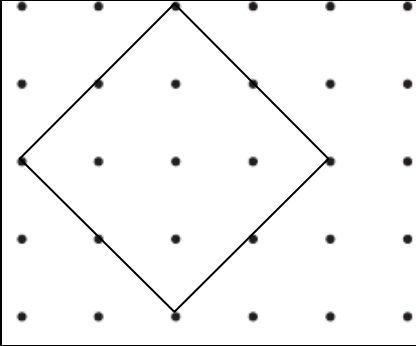
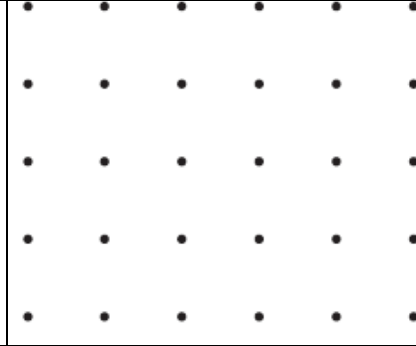
Problem 2.9:Şekil 9’de verilen 5×6 dikdörtgen nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



ÇÖZÜM:

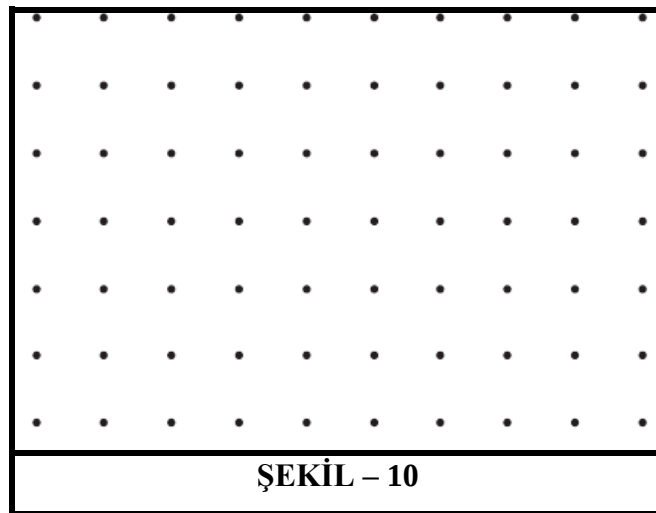
Düz ve çapraz olmak üzere 2 farklı kare bulunur.

Çizelge 2.9. 5×6 kare nokta ızgarasında kareler

		
5.4+4.3+3.2+2.1	4.3	3.2+3.2
		
2.1+2.1	2.1	

Toplam: 5.4+4.3+3.2+2.1+4.3+3.2+2.1+3.2+2.1+2.1=70

Problem 2.10: Şekil 10’da verilen 7×10 dikdörtgen nokta ızgarasının noktalarını köşe kabul eden kaç farklı kare vardır?



$$6.9+5.8+4.7+3.6+2.5+1.4+5.8+4.7+3.6+2.5+1.4+4.7+3.6+2.5+1.4+3.6+2.5+1.4+2.5+1.4+1.4$$

İfadesinde

$$6.9+5.8+4.7+3.6+2.5+1.4=\sum_{k=1}^6 k.(k+3)$$

$$5.8+4.7+3.6+2.5+1.4=\sum_{k=1}^5 k.(k+3)$$

$$4.7+3.6+2.5+1.4=\sum_{k=1}^4 k.(k+3)$$

$$3.6+2.5+1.4=\sum_{k=1}^3 k.(k+3)$$

$$2.5+1.4=\sum_{k=1}^2 k.(k+3)$$

$$1.4=\sum_{k=1}^1 k.(k+3)$$

$$=\sum_{k=1}^6 k.(k+3)+\sum_{k=1}^5 k.(k+3)+\sum_{k=1}^4 k.(k+3)+\sum_{k=1}^3 k.(k+3)+\sum_{k=1}^2 k.(k+3)+\sum_{k=1}^1 k.(k+3)$$

$$\sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^k p(p+3)=364$$

Bulunur.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Kare $(n \times n)$ nokta ızgarası veya dikdörtgen $(n \times m)$ nokta ızgarasında çizilebilecek karelerin sayısını bulma ve birbiriyle ilişkisini ifade etmek ve genellemek istersek kare ve dikdörtgenler için birbiriyle ilişkili iki ayrı durum ortaya çıkar

Buna göre; $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ $m > 1$ ve olmak üzere

Sonuç 3.1: Kare nokta ızgarası $(n \times n)$ içine gömülü karelerin toplamını $K(n)$ ile gösterirsek;

$$K(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k-1)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{k=1}^{n-2p} k^2 & : \text{ n çift sayı} \\ \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2k)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=1}^{n-2p} k^2 & : \text{ n tek sayı} \end{cases} \quad (1)$$

İfadelerinin ikisi de açılırsa $\forall n > 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $K(n) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$ sonucu bulunur.

Sonuç 3.2: $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$, $m > 1$ için dikdörtgen $(m \times n)$ nokta ızgarasına köşeleri noktalar üzerinde olmak üzere çizilebilen kare sayısını $D(n)$ ile gösterirsek

Toplamı için üç farklı durum söz konusudur.

i) $(m \times n)$ nokta ızgarasında $n > m$ için;

$$D(m, n) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^k p \cdot (p + n - m) = \frac{m(2n-m)(m^2-1)}{12} \quad (2)$$

ii) $(m \times n)$ nokta ızgarasında $m > n$ ise

$$D(m, n) = \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=m-n}^k p \cdot (p + n - m) = \frac{n(2m-n)(n^2-1)}{12} \quad (3)$$

iii) $(m \times n)$ nokta ızgarasında $m=n$ ise her iki ifade için de kare nokta ızgaralarındaki toplam kare sayısı olan

$$D(m, m) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^k p^2 = \frac{m^2(m^2 - 1)}{12}$$

ve

$$D(n, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k p^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

Eşitlikleri yani Sonuç 3.1 ortaya çıkar.

İspat 3.1: Tümevarım yöntemini her iki ifade için ayrı ayrı uygularsak

a) $n \in \mathbb{N}$ ve n çift sayı için;

$n=2$ için

$$K(2) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k-1)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{k=1}^{n-2p} k^2 = \sum_{k=1}^1 (2k-1)^2 = \frac{4 \cdot 3}{12} = 1$$

$$1=1$$

$t \in \mathbb{N}$ ve $t > 1$ için $n=2t$ olsun bu durumda eşitliğimizi doğru kabul edelim

$$K(2t) = \sum_{k=1}^t (2k-1)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{t-1} \sum_{k=1}^{2t-2p} k^2 = \frac{(2t)^2((2t)^2 - 1)}{12}$$

$t \in \mathbb{N}$ ve $t > 1$ için $n=2t+2$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$K(2t+2) = \sum_{k=1}^{t+1} (2k-1)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^t \sum_{k=1}^{2t-2p+2} k^2$$

$$K(2t+2) = \sum_{k=1}^t (2k-1)^2 + (2t+1)^2 + 2 \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2t} k^2 + \sum_{k=1}^{2t-2} k^2 + \sum_{k=1}^{2t-4} k^2 + \dots + \sum_{k=1}^4 k^2 + \sum_{k=1}^2 k^2}_{t \text{ tane}} \right)$$

$$K(2t+2) = \sum_{k=1}^t (2k-1)^2 + 2 \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2t-2} k^2 + \sum_{k=1}^{2t-4} k^2 + \dots + \sum_{k=1}^4 k^2 + \sum_{k=1}^2 k^2}_{(t-1) \text{ tane}} \right) + (2t+1)^2 + 2 \sum_{k=1}^{2t} k^2$$

$$K(2t+2) = \sum_{k=1}^t (2k-1)^2 + 2 \sum_{p=1}^{t-1} \sum_{k=1}^{2t-2p} k^2 + (2t+1)^2 + 2 \sum_{k=1}^{2t} k^2$$

$$K(2t+2) = \frac{4t^2(4t^2-1)}{12} + (2t+1)^2 + \frac{4t(2t+1)(4t+1)}{6}$$

$$K(2t+2) = (2t+1) \left[\frac{t^2(2t-1) + 6t + 3 + 2t(4t+1)}{3} \right]$$

$$K(2t+2) = (2t+1) \left[\frac{2t^3 - t^2 + 6t + 3 + 8t^2 + 2t}{3} \right]$$

$$K(2t+2) = (2t+1) \left[\frac{2t^3 + 7t^2 + 8t + 3}{3} \right]$$

$$K(2t+2) = (2t+1) \left[\frac{(t+1)^2(2t+3)}{3} \right]$$

$$K(2t+2) = \frac{(2t+2)^2 [(2t+2)^2 - 1]}{12}$$

ve ispatımız tamamlanmış olur.

b) $n \in \mathbb{N}$ ve n tek sayı için;

i) $n=3$ için

$$K(3) = \sum_{k=1}^1 (2k)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^1 \sum_{k=1}^{3-2p} k^2 = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6 = \frac{9 \cdot 8}{12}$$

bulunur.

ii) $t \in \mathbb{N}$ ve $t > 1$ için $n=2t+1$ olsun bu durumda eşitliğimizi doğru kabul edelim

$$K(n) = \sum_{k=1}^t (2k)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^t \sum_{k=1}^{2t+1-2p} k^2 = \frac{(2t+1)^2 \cdot [(2t+1)^2 - 1]}{12} \text{ olur.}$$

iii) $t \in \mathbb{N}$ ve $t > 1$ için $n=2t+3$ olsun bu durumda ifademizin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} K(n) &= \sum_{k=1}^{t+1} (2k)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{t+1} \sum_{k=1}^{2t+3-2p} k^2 \\ &= \left[\sum_{k=1}^t (2k)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^t \sum_{k=1}^{2t+1-2p} k^2 \right] + (2t+2)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{2t+1} k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2t+1)^2 \cdot [(2t+1)^2 - 1]}{12} + (2t+2)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{2t+1} k^2 \\
&= \frac{(2t+1)^2 \cdot [(2t+1)^2 - 1]}{12} + (2t+2)^2 + 2 \cdot \frac{(2t+1)(2t+2)(4t+3)}{6} \\
&= \frac{(2t+1)^2 \cdot (2t)(2t+2)}{12} + (2t+2)^2 + 4 \cdot \frac{(2t+1)(2t+2)(4t+3)}{12} \\
&= (2t+2) \left[\frac{2t(2t+1)^2 + 12(2t+2) + 4(2t+1)(4t+3)}{12} \right] \\
&= (2t+2) \left[\frac{8t^3 + 8t^2 + 2t + 24t + 24 + 32t^2 + 40t + 12}{12} \right] \\
&= (2t+2) \left[\frac{8t^3 + 40t^2 + 66t + 36}{12} \right] \\
&= (2t+2) \left[\frac{(2t+3)^2 \cdot (2t+4)}{12} \right] \\
&= (2t+3)^2 \left[\frac{(2t+2)(2t+4)}{12} \right] \\
&= (2t+3)^2 \left[\frac{(2t+3)^2 - 1}{12} \right]
\end{aligned}$$

ve ispatımız tamamlanmış olur.

$$K(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k-1)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{k=1}^{n-2p} k^2 & : \text{ n çift sayı} \\ \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2k)^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=1}^{n-2p} k^2 & : \text{ n tek sayı} \end{cases} = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \quad n \in \mathbb{N} \text{ ve } n > 1 \text{ için}$$

İspat 3.2:

i) Doğrudan ikinci tarafa eşit olduğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
D(m, n) &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^k p \cdot (p + n - m) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^k p^2 + pn - pm \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + n \frac{k \cdot (k+1)}{2} - m \frac{k \cdot (k+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k(k+1)(2k+1) + 3nk(k+1) - 3mk(k+1)}{6} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 3nk^2 + 3nk - 3mk^2 - 3mk}{6} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2k^3 + k^2(3+3n-3m) + k(1+3n-3m)}{6} \\
&= \frac{1}{6} \left[2 \left(\frac{(m-1)m}{2} \right)^2 + (3+3n-3m) \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + (1+3n-3m) \frac{(m-1)m}{2} \right] \\
&= \frac{(m-1)m}{6} \left[\frac{(m-1)m}{2} + (3+3n-3m) \frac{(2m-1)}{6} + (1+3n-3m) \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{(m-1)m}{6} \left[\frac{3m^2 - 3m + 6m - 3 + 6nm - 3n - 6m^2 + 3m + 3 + 9n - 9m}{6} \right] \\
&= \frac{(m-1)m}{6} \left[\frac{-3m^2 - 3m + 6nm + 6n}{6} \right] \\
&= \frac{(m-1)m}{6} \left[\frac{-m(m+1) + 2n(m+1)}{2} \right] \\
&= \frac{(m-1)m(m+1)(2n-m)}{12} \\
D(m,n) &= \frac{m(2n-m)(m^2-1)}{12}
\end{aligned}$$

ii) Doğrudan ikinci tarafa eşit olduğunu gösterebiliriz. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > 1, m > 1$ için dikdörtgen $(m \times n)$ nokta ızgarasında $m > n$ için

$$\begin{aligned}
D(m,n) &= \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=m-n}^k p(p+n-m) \\
&= \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=m-n}^k p^2 + p(n-m) = \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=1}^{k+n-m+1} (p-n+m-1)^2 + (p-n+m-1)(n-m) \\
&\quad \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=1}^{k+n-m+1} p^2 + n^2 + m^2 + 1 - 2pn + 2pm - 2p - 2nm + 2n - 2m + pn - pm - n^2 + nm + nm - m^2 - n + m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=1}^{k+n-m+1} p^2 + 1 - 2pn + 2pm - 2p + 2n - 2m + pn - pm - n + m \\
&= \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=1}^{k+n-m+1} p^2 + p(-2n + 2m - 2 + n - m) + 1 + n - m \\
&= \sum_{k=m-n}^{m-1} \sum_{p=1}^{k+n-m+1} p^2 + p(m - n - 2) + 1 + n - m \\
&= \sum_{k=m-n}^{m-1} \frac{(k+n-m+1)(k+n-m+2)(2k+2n-2m+3)}{6} + \frac{(k+n-m+1)(k+n-m+2)}{2}(m-n-2) \\
&\quad + (k+n-m+1)(1+n-m)
\end{aligned}$$

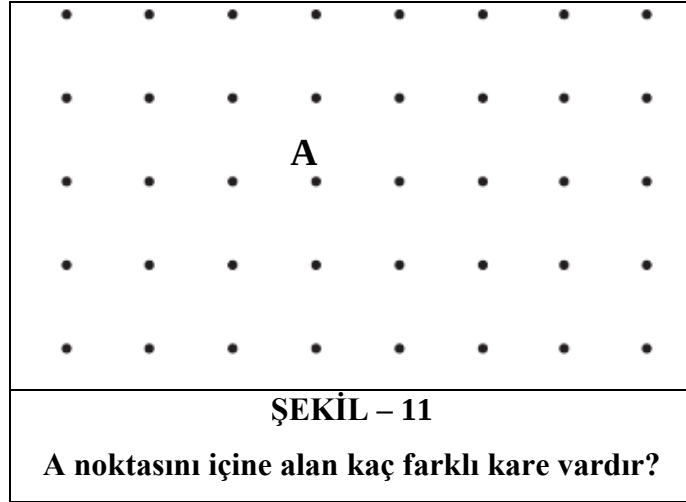
$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2}(m-n-2) + k(1+n-m) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n 2k^3 + 3k^2(m-n-1) + k(1+3n-3m) \\
&= \frac{1}{6} \left\{ 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(m-n-1) + \frac{n(n+1)}{2}(1+3n-3m) \right\} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(2n+1)(m-n-1)}{2} + \frac{(1+3n-3m)}{2} \right\} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{-n^2 + n + 2nm - 2m}{2} \right\} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{-n(n-1) + 2m(n-1)}{2} \right\} \\
D(m, n) &= \frac{n(2m-n)(n^2-1)}{12}
\end{aligned}$$

iii) $(m \times n)$ nokta ızgarasında $m=n$ ise her iki ifade için de kare nokta ızgaralardaki toplam kare sayısı olan

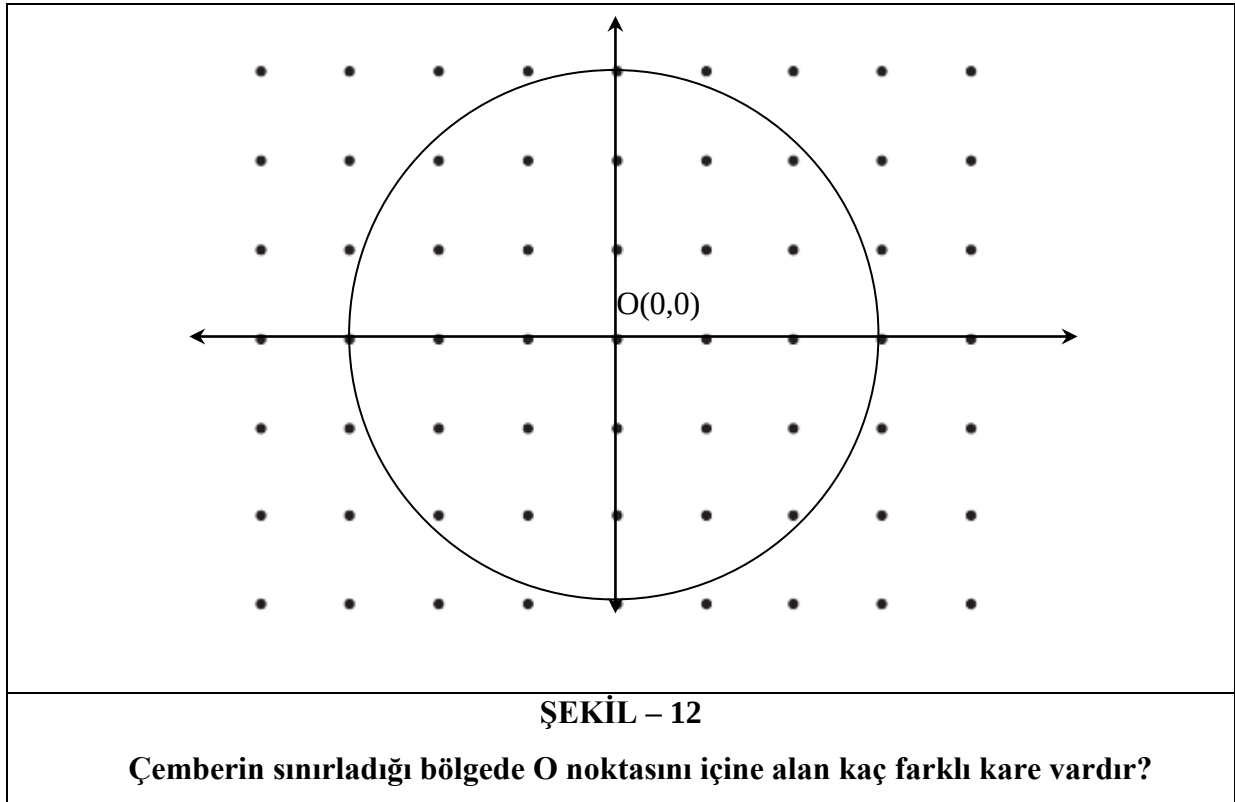
$$D(m, m) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{p=1}^k p^2 = \frac{m^2(m^2-1)}{12} \text{ ve } D(n, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k p^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Eşitlikleri yani Sonuç 3.1 ortaya çıkar. İspatı açıktır.

Tartışma 3.1. $n \times n$ kare nokta ızgarası veya $m \times n$ dikdörtgen nokta ızgarasında belirli bir noktayı içine alan kare sayısını hesaplamak için bir yöntem geliştirebiliriz.



Tartışma 3.2. Nokta ızgarasının noktaları bileşenleri tam sayı olacak şekilde koordinat sistemine yerleştirildiğinde r yarıçaplı ve merkezi orijinde olan çemberin iç bölgesini $x^2 + y^2 < r^2$ ile ifade edebiliriz. Bu çemberin sınırladığı bölge içinde kalan noktaların birleştirilmesiyle elde edilen karelerin kaç tanesinin iç bölgesinde $O(0,0)$ noktasının bulunduğunu hesaplayabiliriz.



TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve değerli yardımlarını esirgemeyen Matematik öğretmenim Sayın Eşref GÜREL' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamın her bölümünde beni teşvik eden ve çalışmama en uygun ortamın oluşturulmasını sağlayan aileme destekleri için sonsuz teşekkür ediyorum.

Ayrıca büyük bir özveride bulunarak, projemin hazırlanmasında her türlü olanağı sağlayan Denizli Bilim ve Sanat Merkezi Müdürü Sayın Süleyman ARSLAN' a teşekkürlerimi borç bilirim.

M. KART

KAYNAKLAR:

<http://homepage.mac.com/efithian/Geometry/Activity-03.html> by Ephraim Fithian

<http://projecteuler.net/index.php?section=problems147/184>

<http://vidyaonline.net/writeup/dotpaper.pdf>

<http://www.mmmproject.org/ls/tp6.htm>

Lappan, G., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Friel, S. N., and Phillips, E. D. (2005). Looking for Pythagoras (Connected Mathematics 2). Developed as part of the Connected Mathematics Project. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

mathschallenge.net, Problem ID: 36 (Feb 2001) Difficulty: 2 Star

Mirasyedilioğlu, Ş., Akpınar, A., (2009) Matematik 11, s. 105-121, Ankara

New Zealand Ministry of Education /http://nzmaths.co.nz/resource/you-can-count-squares?parent_node

Picciotto, Henri, W. Anita A new algebra: tools, themes, concepts, This article, published in the Journal of Mathematical Behavior (v 12, #1, March 1993,) summarizes the thinking behind the textbook, [www_MathEdPage_org.htm](http://www.MathEdPage.org.htm)

Streilein, Assistant Professor NVCC/ <http://www.nvcc.edu/home/tstreilein/150lesson4.pdf>

Yılmaz, N., Gülbahar, M., Çilem A., Doğan, T., (2011) Matematik 11, s. 122 – 141 Ankara

Anahtar kelimeler

Nokta, düzlem, kare, tümevarım, toplam sembolü, sayma yöntemi, tam kare sayılar,

PROJE RAPORU

PROJENİN ADI **ÜÇGEN, KARE, KÜP VE** **GEOMETRİK DİZİLER**

PROJENİN AMACI

Bir şeklin veya geometrik cismin kendisine eş birimlere ayrılması ve ayrılan bu birimlerin belirli bir kurala göre çıkarılması sonucu oluşan fraktaldan aynı kurala bağlı olarak daha büyük sonlu fraktallar oluşturulduğunda ortaya çıkan geometrik dizileri genelleştirmek.

B. ÖZ

Denizli – 2012

PROJE ÖZETİ

Birim kare veya birim üçgen kullanarak daha büyük kareler veya üçgenler oluşturduk. Oluşturduğumuz büyük karenin veya üçgenin içindeki birimleri belirli bir kurala göre taradık ve aynı kurala bağlı kalarak daha büyük modeller oluşturduk. Herhangi bir aşamadaki modelimizde taralı kare veya üçgen sayısını bulmak için üslü sayıların oluşturduğu toplamsal bir ifade ortaya koyduk. Bu ifadeyle geometrik dizilerin toplamını kullanarak belirli yöntem elde ettik.

Eş küplerden daha büyük bir küp oluşturduk. Büyük küpün merkezinde veya köşelerinde bulunan küpleri belirli bir kurala göre yerinden aldık. Daha sonra bu küp modelinden aynı kurala bağlı kalarak daha büyük küpler oluşturduk. Büyük küpten giden küp sayısını geometrik dizilerin toplamı yardımıyla hesaplayan bir formül geliştirdik.

İÇİNDEKİLER

Özet	2
İçindekiler	3

Birinci Bölüm

GİRİŞ

1. Temel Tanım ve özellikler	5
------------------------------------	---

İkinci Bölüm

YÖNTEM

2.1 Problem	8
2.1 Sonuç.....	12
2.2 Problem.....	13
2.3 Problem.....	14
2.4 Problem	15
2.5 Problem.....	16
2.6 Problem	17
2.7 Problem.....	18
2.7.1 Problem.....	18
2.7.2 Problem.....	19
2.2 Sonuç.....	19
2.7.3 Problem.....	20
2.7.4 Problem.....	20

Üçüncü Bölüm

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

3.1 Sonuç.....	23
3.2 Sonuç.....	23
3.3 Sonuç.....	23
3.4 Sonuç.....	24
3.1 İspat.....	24
3.2 İspat.....	25
3.3 İspat.....	25
3.4 İspat.....	25
3.1 Tartışma.....	26
Teşekkür.....	27
Kaynaklar	28

BİRİNCİ BÖLÜM

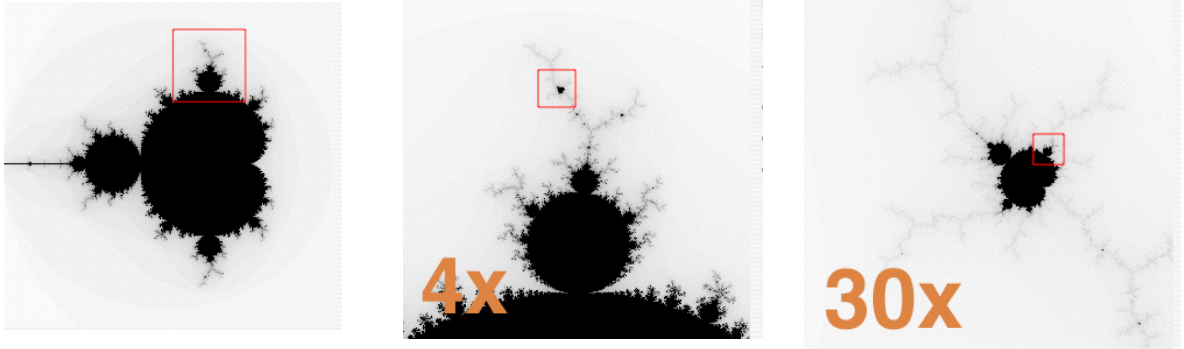
GİRİŞ

Bu bölümde projemizle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilecektir.

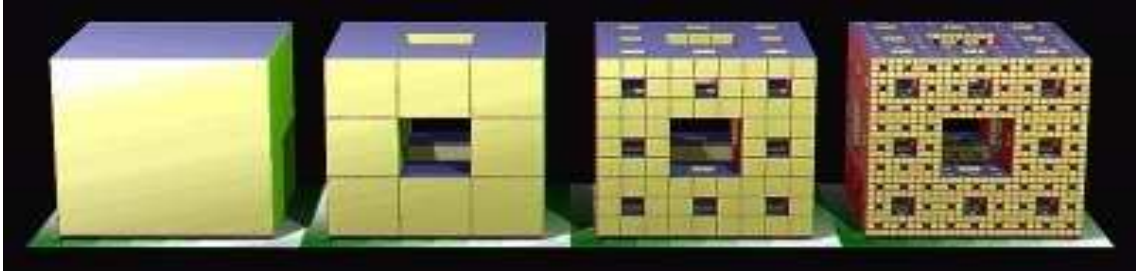
Bu konunun seçiliş nedeni daha önce şekil – sayı ilişkisi üzerinde yeterli ve kesin sonuç veren çalışmaların eksikliğidir. Bu yöntemler tam olarak genelleştirilemediği için pratik olarak uygulanamamakta, aşama sayısı arttığında hesaplama yapmak zorlaşmakta ve hatalar çok büyük olmaktadır.

Fraktal parçalanmış yada kırılmış anlamına gelen Lâtince “fractuuss” kelimesinden gelmiştir. İlk olarak 1975’de Polonya asıllı matematikçi Benoit Mandelbrot tarafından ortaya atıldığı varsayılır. Kendi kendini tekrar eden ama sonsuza kadar küçülen şekilleri, kendine benzer bir cisimde cismi oluşturan parçalar yada bileşenler cismin bütününcü inceler. Düzensiz ayrıntılar yada desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelerde sonsuza kadar sürebilir; tam tersi de her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde, gene cismin bütününe benzemesi olayıdır. Eğrelti otu, kar taneleri, piramit adı verilen sebze brokoli, kalın hamurlu pizza ve galaksilerin yapısı örnek olarak verilebilir.

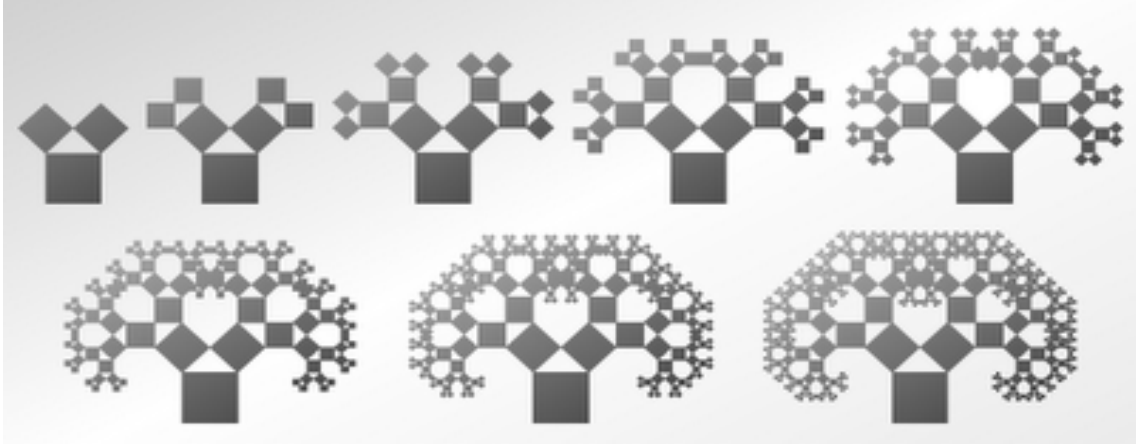
Tanım 1.1 : Bir şeklin orantılı olarak küçültülmüş veya büyütülmüş modelleriyle inşa edilen örüntülere fraktal adı verilir.



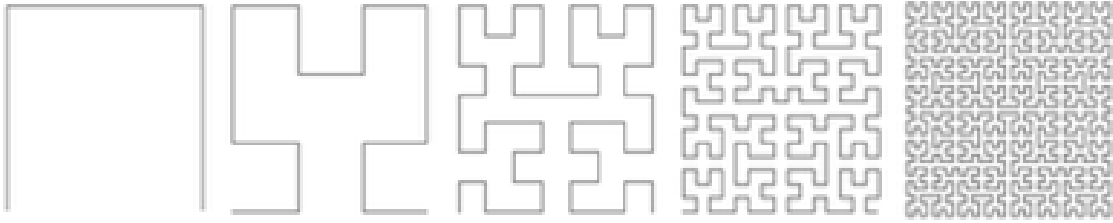
Şekil 1.1
FRAKTAL



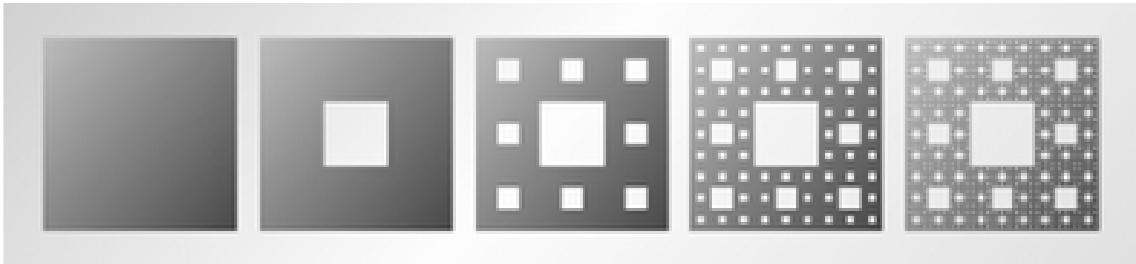
Şekil 1.2



Şekil 1.3



Şekil 1.4



Şekil 1.5

Tanım 1.2 : Belirli bir kurala göre birbirini takip eden sıralı sayılara sayı dizisi denir.

Tanım 1.3 : Ardışık iki terim arasındaki farkı sabit olan diziler aritmetik dizidir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = a_n + r$ olacak şekilde bir r gerçekteki sayı varsa (a_n) dizisi bir aritmetik dizi ve r sayısı bu aritmetik dizinin ortak farkıdır. Aritmetik dizinin genel terimi $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ şeklindedir.

Tanım 1.4 : Ardışık terimleri arasındaki oranları sabit olan diziler, geometrik dizidir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = r \cdot a_n$ ($a_n \neq 0$) olacak şekilde $r \neq 0$ gerçekteki sayı varsa (a_n) dizisi geometrik dizi r sayısı bu geometrik dizinin ortak çarpanıdır. Geometrik dizinin genel terimi $a_n = a_1 r^{n-1}$ şeklindedir.

Özellik 1. 5.

i) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

ii) Bir geometrik dizinin ilk n terim toplamı $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

Not 1.6: Çalışmamız boyunca ilk elde edilen şekil veya cisme üreteç adını vereceğiz.

İKİNCİ BÖLÜM

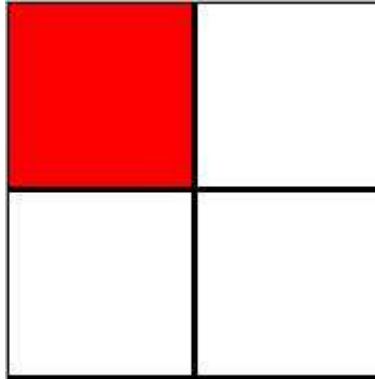
YÖNTEM

Problem 2.1: Bir kare (2×2) 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır. Daha sonra taralı olmayan 3 kare de 4 küçük kareye bölünerek taranır. Bu işlem 6 kez tekrarlandığında kaç tane birim kare oluşur?

ÇÖZÜM:

Problemi öncelikle birim kare üzerinde oluşturalım ve problemin aşama aşama yapısını şekillerle görelim

a) 1. AŞAMA



Şekil 2.1

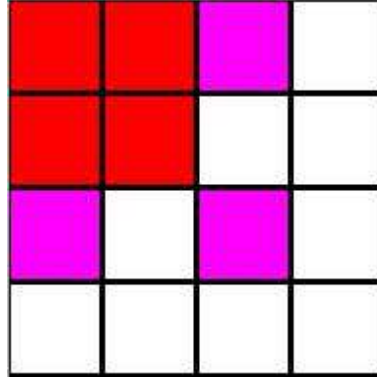
(2×2) 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır (Üreteç)

Bu aşamada 1×1 şeklinde bir kare oluşur.

$$1 \times 1 \Rightarrow 1 \times 1 \times 1 = 3^0 \cdot 4^0 = 1 \text{ br}^2$$

TOPLAM: 1 br^2

b) 2. AŞAMA



Şekil 2.2

Taralı olmayan 3 kare de 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır

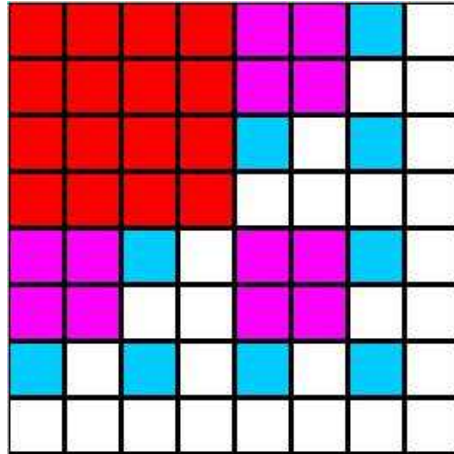
Bu aşamada 1×1, 2×2 olmak üzere iki farklı kare oluşur.

$$1 \times 1 \Rightarrow 3 \times 1 \times 1 = 3^1 \cdot 4^0 = 3 \text{ br}^2$$

$$2 \times 2 \Rightarrow 1 \times 2 \times 2 = 3^0 \cdot 4^1 = 4 \text{ br}^2$$

TOPLAM : $3+4=7 \text{ br}^2$ oluşur.

c) 3. AŞAMA



Şekil 2.3

Taralı olmayan 9 kare de 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır

Bu aşamada 1×1, 2×2, 3×3 olmak üzere üç farklı kare oluşur.

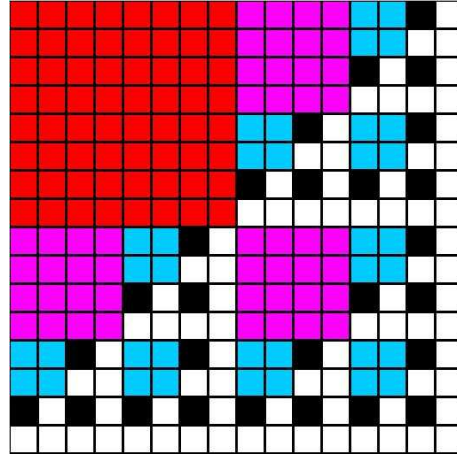
$$1 \times 1 \Rightarrow 9 \times 1 \times 1 = 3^2 \cdot 4^0 = 9 \text{ br}^2$$

$$2 \times 2 \Rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 3^1 \cdot 4^1 = 12 \text{ br}^2$$

$$4 \times 4 \Rightarrow 1 \times 4 \times 4 = 3^0 \cdot 4^2 = 16 \text{ br}^2$$

TOPLAM: $9+12+16= 37 \text{ br}^2$

d) 4. AŞAMA



Şekil 2.4

Taralı olmayan 27 kare de 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır

Bu aşamada 1×1, 2×2, 4×4 ve 8×8 olmak üzere 4 farklı kare oluşur.

$$1 \times 1 \Rightarrow 27 \times 1 \times 1 = 3^3 \cdot 4^0 = 27 \text{ br}^2$$

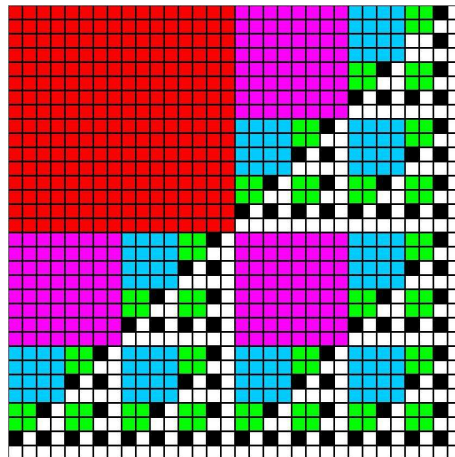
$$2 \times 2 \Rightarrow 9 \times 2 \times 2 = 3^2 \cdot 4^1 = 36 \text{ br}^2$$

$$4 \times 4 \Rightarrow 3 \times 4 \times 4 = 3^1 \cdot 4^2 = 48 \text{ br}^2$$

$$8 \times 8 \Rightarrow 1 \times 8 \times 8 = 3^0 \cdot 4^3 = 64 \text{ br}^2$$

$$\text{TOPLAM : } 27 + 36 + 48 + 64 = 175 \text{ br}^2$$

e) 5. AŞAMA :



Şekil 2.5

Taralı olmayan 81 kare de 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır

Bu aşamada 1×1, 2×2, 4×4, 8×8 ve 16×16 olmak üzere 5 farklı kare oluşur.

$$1 \times 1 \Rightarrow 81 \times 1 \times 1 = 3^4 \cdot 4^0 = 81 \text{ br}^2$$

$$2 \times 2 \Rightarrow 27 \times 2 \times 2 = 3^3 \cdot 4^1 = 108 \text{ br}^2$$

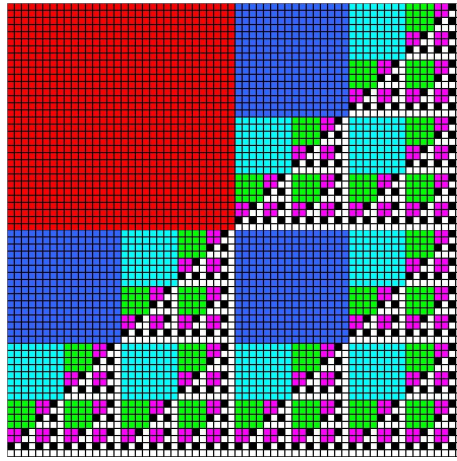
$$4 \times 4 \Rightarrow 9 \times 4 \times 4 = 3^2 \cdot 4^2 = 144 \text{ br}^2$$

$$8 \times 8 \Rightarrow 3 \times 8 \times 8 = 3^1 \cdot 4^3 = 192 \text{ br}^2$$

$$16 \times 16 \Rightarrow 1 \times 16 \times 16 = 3^0 \cdot 4^4 = 256 \text{ br}^2$$

$$\text{TOPLAM : } 81+108+144+192+256 = 781 \text{ br}^2$$

f) 6. AŞAMA :



Şekil 2.6

Taralı olmayan 81 kare de 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır

Bu aşamada 1×1, 2×2, 4×4, 8×8, 16×16 ve 32×32 olmak üzere 6 farklı kare oluşur.

$$1 \times 1 \Rightarrow 243 \times 1 \times 1 = 3^5 \cdot 4^0 = 243 \text{ br}^2$$

$$2 \times 2 \Rightarrow 81 \times 2 \times 2 = 3^4 \cdot 4^1 = 324 \text{ br}^2$$

$$4 \times 4 \Rightarrow 27 \times 4 \times 4 = 3^3 \cdot 4^2 = 432 \text{ br}^2$$

$$8 \times 8 \Rightarrow 9 \times 8 \times 8 = 3^2 \cdot 4^3 = 576 \text{ br}^2$$

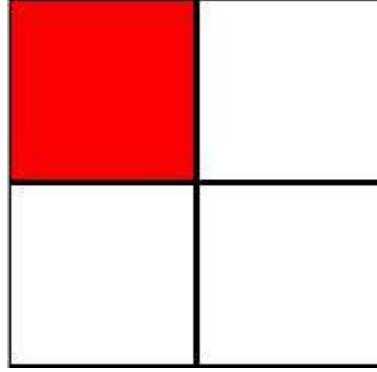
$$16 \times 16 \Rightarrow 3 \times 16 \times 16 = 3^1 \cdot 4^4 = 768 \text{ br}^2$$

$$32 \times 32 \Rightarrow 1 \times 32 \times 32 = 3^0 \cdot 4^5 = 1024 \text{ br}^2$$

$$\text{TOPLAM : } 243+324+432+576+768+1024=3367 \text{ br}^2$$

Sonuç 2.1: Şimdi yukarıda yaptığımız işlemleri bir sayı modeli üzerinde tartışalım.

Eğer bir kare (2×2) 4 küçük birim kareye bölünerek 1 kare taranır. Daha sonra taralı olmayan 3 kare de 4 küçük kareye bölünerek 1 kare taranırsa ve bu işlem 6 kez tekrarlanırsa;



Şekil 2.7

2×2 kare içinde x , $n \in \mathbb{N}$, $x \geq n$ ve x problemin aşama sayısını göstermek üzere; $n=1,2,3,\dots$ için;

$$K(x) = \sum_{k=1}^n 3^{x-n} \cdot 4^{n-1}$$

TARALI OLMAYAN
KARE SAYISI

KARENİN İÇİNDEKİ
BİRİM KARE SAYISI

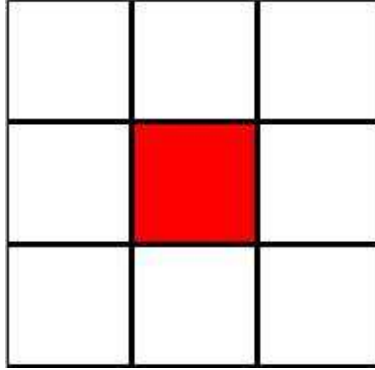
$$K(x) = \sum_{k=1}^n 3^{x-n} \cdot 4^{n-1} = 3^{x-1} \cdot 4^0 + 3^{x-2} \cdot 4^1 + 3^{x-3} \cdot 4^2 + \dots + 3^1 \cdot 4^{x-2} + 3^0 \cdot 4^{x-1}$$

$$\frac{(4-3)}{4-3} (3^{x-1} \cdot 4^0 + 3^{x-2} \cdot 4^1 + 3^{x-3} \cdot 4^2 + \dots + 3^1 \cdot 4^{x-2} + 3^0 \cdot 4^{x-1})$$

$$K(x) = \sum_{k=1}^n 3^{x-n} \cdot 4^{n-1} = \frac{4^x - 3^x}{1} = 4^x - 3^x$$

şeklindeki sayıların toplamı bize toplam birim kare sayısını verir. Şimdi bu modelimizi farklı özelliklerdeki fraktalar için uygulayalım.

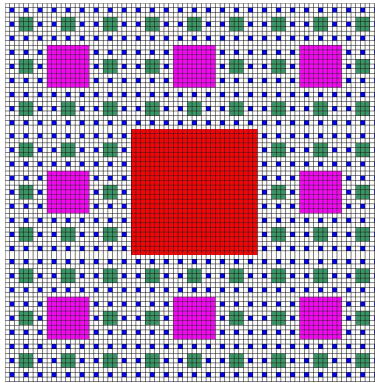
Problem 2.2: Bir kare (3×3) 9 küçük birim kareye bölünerek merkezdeki 1 kare taranır. Daha sonra taralı olmayan 8 kare de 9 küçük kareye bölünerek merkezdeki 1 kare taranır. Bu işlem 4 kez tekrarlandığında kaç tane birim kare oluşur?



Şekil 2.8

(3×3) 9 küçük birim kareye bölünerek 1 birim kare taranır.

Üreteç



Şekil 2.9

4. aşamada kare

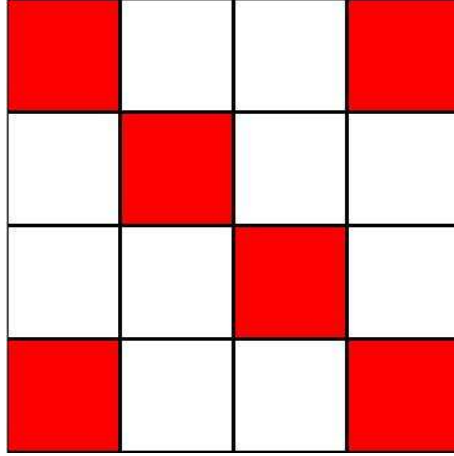
ÇÖZÜM:

3×3 kare içinde 1 karenin taranmasıyla ve bu işlemin 4 kez tekrarlanması sonucu $4 \geq n$ ve $n=1,2,3,4$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^4 8^{4-k} \cdot 9^{k-1} = 9^4 - 8^4 = 2465$$

Şeklindeki sayıların toplamı bize taralı birim karelerin toplamını verir.

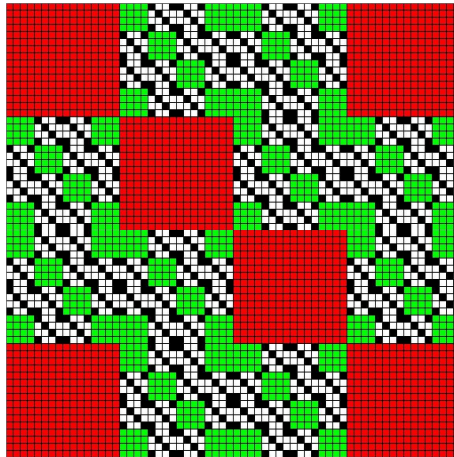
Problem 2.3: Bir kare (4×4) 16 küçük birim kareye bölünerek 6 birim kare taranır. Daha sonra taralı olmayan 10 kare de 16 küçük kareye bölünerek 6 birim kare taranır. Bu işlem 3 kez tekrarlandığında kaç tane birim kare oluşur?



Şekil 2.10

(4×4) 16 küçük birim kareye bölünerek 6 birim kare taranır.

Üreteç



Şekil 2.11

3. aşamada kare

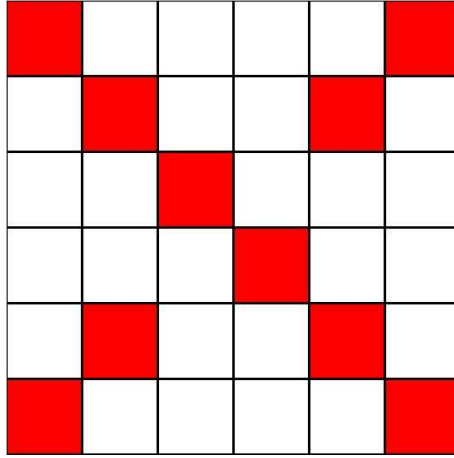
ÇÖZÜM:

4×4 kare içinde 6 karenin taranmasıyla ve bu işlemin 3 kez tekrarlanması sonucu $3 \geq n$ ve $n=1,2,3$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^3 6 \cdot 10^{3-k} \cdot 16^{k-1} = 16^3 - 10^3 = 3096$$

Şeklindeki sayıların toplamı bize taralı birim karelerin toplamını verir.

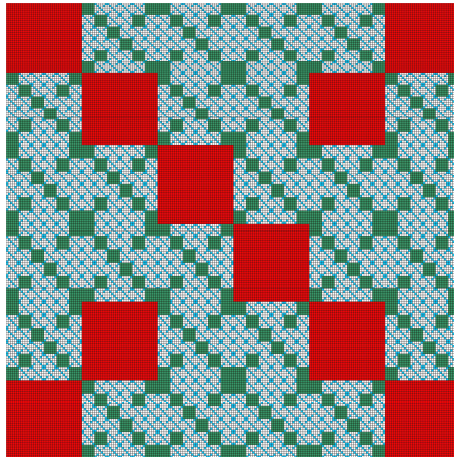
Problem 2.4: Bir kare (6×6) 36 küçük birim kareye bölünerek 10 birim kare taranır. Daha sonra taralı olmayan 26 kare de 36 küçük kareye bölünerek 10 birim kare taranır. Bu işlem 3 kez tekrarlandığında kaç tane birim kare oluşur?



Şekil 2.12

(6×6) 36 küçük birim kareye bölünerek 10 birim kare taranır.

(Üreteç)



Şekil 2.13

3. aşamada kare

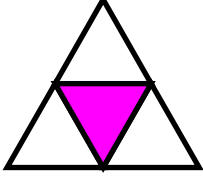
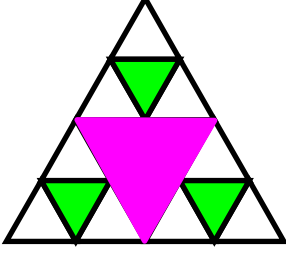
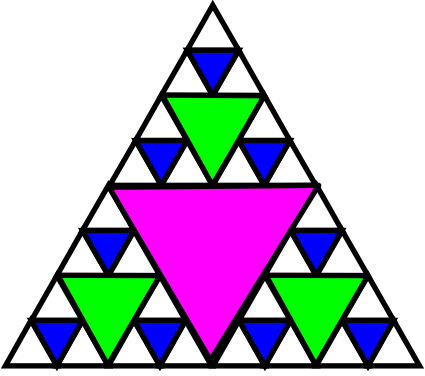
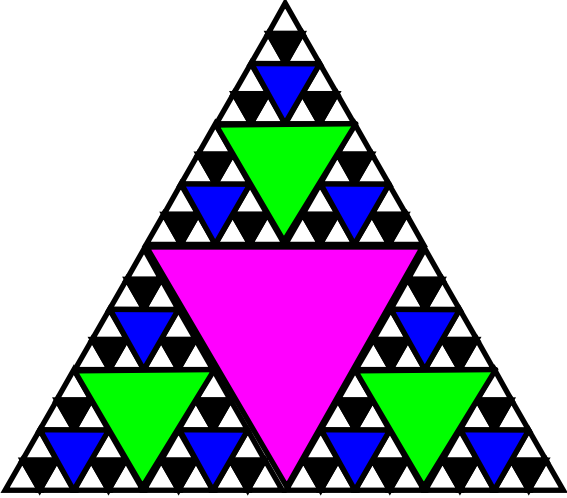
ÇÖZÜM:

6×6 kare içinde 10 karenin taranmasıyla ve bu işlemin 3 kez tekrarlanması sonucu $3 \geq n$ ve $n=1,2,3$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^3 10 \cdot 26^{3-k} \cdot 36^{k-1} = 36^3 - 26^3 = 29080$$

Şeklindeki sayıların toplamı bize taralı birim karelerin toplamını verir.

Problem 2.5: Bir kare (2×2) 4 küçük birim üçgene bölünerek 1 birim üçgen taranır. Daha sonra taralı olmayan 3 üçgen de 4 küçük üçgene bölünerek her birinden 1 birim üçgen taranır. Bu işlem 5 kez tekrarlandığında kaç tane birim üçgen taranır?

	
Şekil 2.14 (2×2) 4 küçük birim üçgene bölünerek 1 birim üçgen taranır. (Üreteç)	Şekil 2.15 2. aşamada üçgen
	
Şekil 2.16 3. aşamada üçgen	Şekil 2.17 4. aşamada üçgen

1. aşamada 2×2 üçgende 1 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^1 3^{1-k} \cdot 4^k = 4^1 - 3^1 = 1$

2. aşamada 4×4 üçgende 7 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^2 3^{2-k} \cdot 4^k = 4^2 - 3^2 = 7$

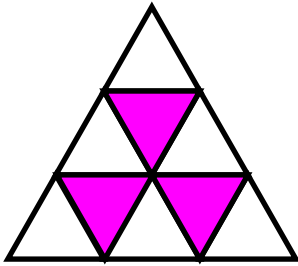
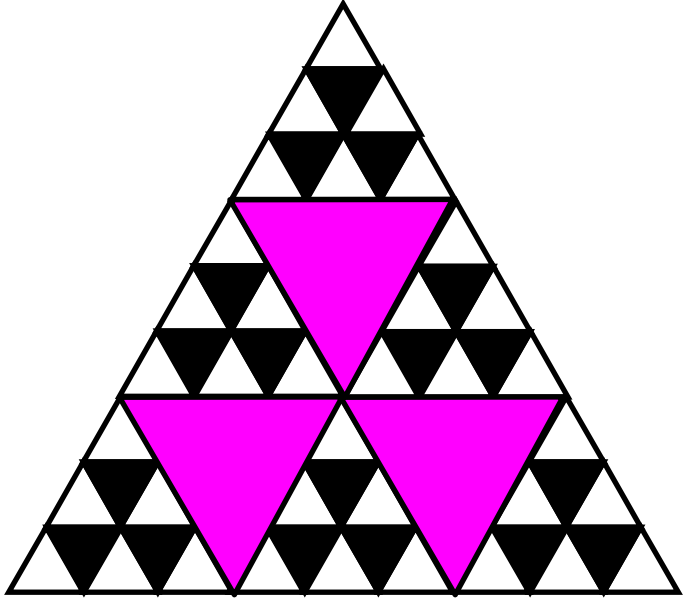
3. aşamada 8×8 üçgende 37 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^3 3^{3-k} \cdot 4^k = 4^3 - 3^3 = 37$

4. aşamada 16×16 üçgende 175 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^4 3^{4-k} \cdot 4^k = 4^4 - 3^4 = 175$

Buna göre 5. aşamada $\sum_{k=1}^5 3^{5-k} \cdot 4^k = 4^5 - 3^5 = 781$ taralı üçgen elde ederiz.

Kare uygulamalarında geliştirdiğimiz yöntem üçgende (Sierpinski üçgeninde veya herhangi bir üçgende) de uygulanabilir.

Problem 2.6: Bir kare (3×3) 9 küçük birim üçgene bölünerek 1 birim üçgen taranır. Daha sonra taralı olmayan 6 üçgen de 9 küçük üçgene bölünerek her birinden 3 birim üçgen taranır. Bu işlem 4 kez tekrarlandığında kaç tane birim üçgen taranır?

	
Şekil 2.18 (3×3) 9 küçük birim üçgene bölünerek 3 birim üçgen taranır. (Üreteç)	Şekil 2.19 2. aşama

Kare tarama fikrinden yola çıkarak;

1. aşamada 3×3 üçgende 3 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^1 6^{1-k} \cdot 9^k = 9^1 - 6^1 = 3$

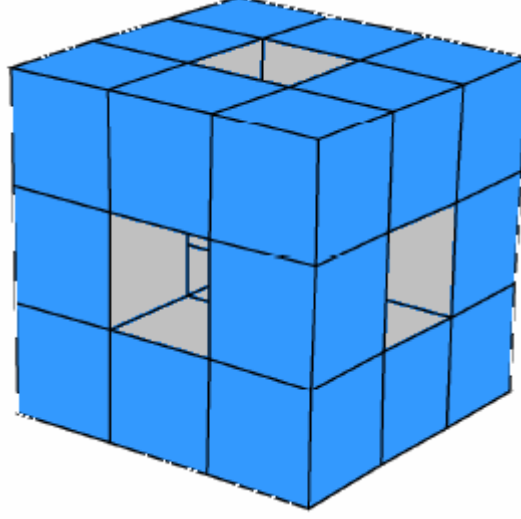
2. aşamada 9×9 üçgende 45 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^2 6^{2-k} \cdot 9^k = 9^2 - 6^2 = 45$

3. aşamada 27×27 üçgende 513 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^3 6^{3-k} \cdot 9^k = 9^3 - 6^3 = 513$

4. aşamada 81×81 üçgende 5265 br taralı üçgen $\sum_{k=1}^4 6^{4-k} \cdot 9^k = 9^4 - 6^4 = 5265$

Problem 2.7: Bir küp ($n \times n \times n$) n^3 tane birim küpün kare merkezleri boyunca $m \times m \times m$ küplerin atılmasıyla oluşturduğumuz fraktalların k . aşamasını oluşturmak için kaç tane küp kullanılır?

Problem 2.7.1: Bir küp ($3 \times 3 \times 3$) 27 küçük birim küpe bölünerek merkezleri boyunca karşılık gelen ($1 \times 1 \times 1$) küplerden 7 tanesi atılır.



Şekil 2.20

($3 \times 3 \times 3$) küpün mekezi boyunca ($1 \times 1 \times 1$) birim küpler atılır.

Üreteç

2. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 9 br ve hacmi $9^3 = 27^2 = 729$ br küptür. $329 = 7.47$ tane küp gider ve 400 küp kalır.

$$K(2) = 7 \cdot \sum_{k=1}^2 20^{2-k} \cdot (27)^{k-1} = 27^2 - 20^2 = 329 \text{ giden küp sayısı}$$

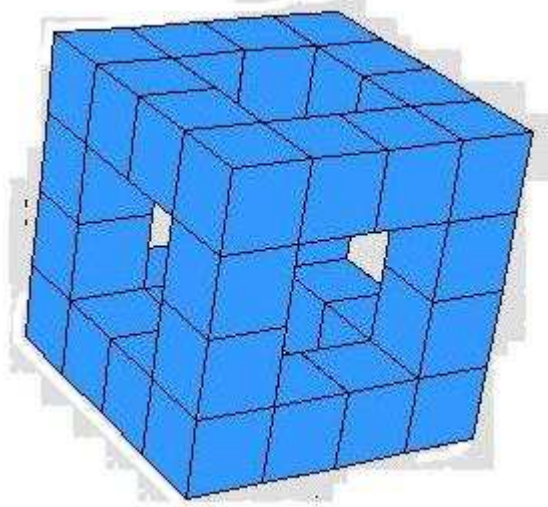
3. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 27 br ve hacmi $27^3 = 27^3 = 19683$ br küptür. $11683 = 7.1669$ tane küp gider ve 8000 küp kalır.

$$K(3) = 7 \cdot \sum_{k=1}^3 20^{3-k} \cdot (27)^{k-1} = 27^3 - 20^3 = 11683 \text{ giden küp sayısı}$$

4. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 81 br ve hacmi $81^3 = 27^4 = 531441$ br küptür. $371441 = 7.47.1129$ tane küp gider ve 160000 küp kalır.

$$K(4) = 7 \cdot \sum_{k=1}^4 20^{4-k} \cdot (27)^{k-1} = 27^4 - 20^4 = 371441 \text{ giden küp sayısı}$$

Problem 2.7.2: Bir küp ($4 \times 4 \times 4$) 64 küçük birim küpe bölünerek merkezleri boyunca karşılık gelen ($2 \times 2 \times 2$) küplerden 1 aşamada 32 küp vardır.



Şekil 2.21

($4 \times 4 \times 4$) küpün merkezi boyunca ($2 \times 2 \times 2$) birim küpler atılır.

(Üreteç)

2. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 16 br ve hacmi $16^3 = 64^2 = 4096$ br küptür. $3072 = 32 \cdot 96$ tane küp gider ve 1024 küp kalır.

$$K(2) = 32 \cdot \sum_{k=1}^2 32^{2-k} \cdot (64)^{k-1} = 64^2 - 32^2 = 3072 \text{ giden küp sayısı}$$

3. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 64 br ve hacmi $64^3 = 64^3 = 262144$ br küptür. $229376 = 32 \cdot 7168$ tane küp gider ve 32768 küp kalır.

$$K(3) = 32 \cdot \sum_{k=1}^3 32^{3-k} \cdot (64)^{k-1} = 64^3 - 32^3 = 229376 \text{ giden küp sayısı}$$

4. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 256 br ve hacmi $256^3 = 64^4 = 16777216$ br küptür. $15728640 = 32 \cdot 491520$ tane küp gider ve 1048576 küp kalır.

$$K(4) = 32 \cdot \sum_{k=1}^4 32^{4-k} \cdot (64)^{k-1} = 64^4 - 32^4 = 15728640 \text{ giden küp sayısı}$$

Problemin çözümü için merkezden alınan küplerin hesabının yapılması gerekir.

Sonuç 2.2. $m \times m \times m$ küpten $n \times n \times n$ küp küpün iç bölgesinden alınırsa 1. aşamada giden küplerin sayısı,

$$n^2(3m - 2n)$$

Formülü ile hesaplanır.

Buna göre kalan küp sayısına p dersek ,

$$p = m^3 - n^2(3m - 2n)$$

Şeklinde gösterilir.

Herhangi bir aşamadaki giden küp sayısı;

$$K(x) = n^2(3m - 2n) \sum_{k=1}^x p^{x-k} \cdot (m^3)^{k-1}$$

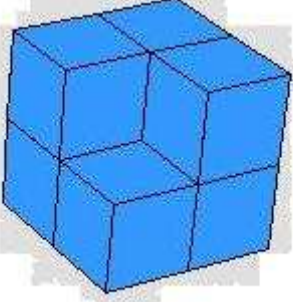
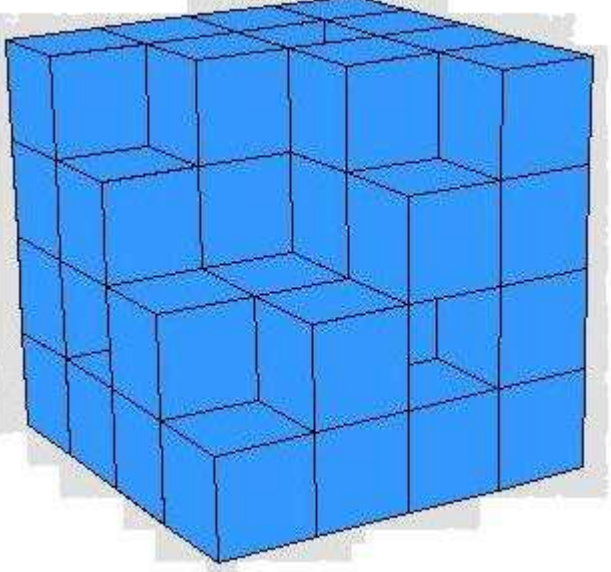
Yukarıdaki ifadede $(4 \times 4 \times 4) = 64$ küçük birim küpe bölünerek merkezleri boyunca karşılık gelen $(2 \times 2 \times 2)$ küpler atılırsa 4 aşamada yani $x=4$ için;

$$K(4) = 32 \sum_{k=1}^4 32^{4-k} \cdot (64)^{k-1} = 15728640 \text{ bulunur.}$$

5. aşamada ise $x=5$ için

$$K(5) = 32 \sum_{k=1}^5 32^{5-k} \cdot (64)^{k-1} = 1040187392 \text{ bulunur.}$$

Problem 2.7.3: Bir küp $(2 \times 2 \times 2)$ 8 küçük birim küpe bölünerek bir köşeden $(1 \times 1 \times 1)$ küp atılırsa 5. aşamada kaç küp atılır?

	
Şekil 2.22 (2×2×2) küpün köşesinden 1. aşamada (1×1×1) birim küp atılır. (Üreteç)	Şekil 2.22 2. aşama

2. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 4 br dir.

$$K(2) = \sum_{k=1}^2 7^{2-k} \cdot (8)^{k-1} = 8^2 - 7^2 = 15 \text{ giden küp sayısı}$$

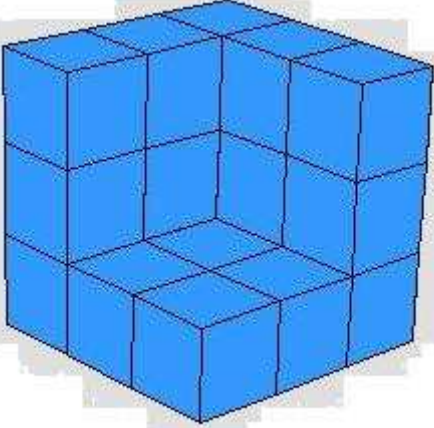
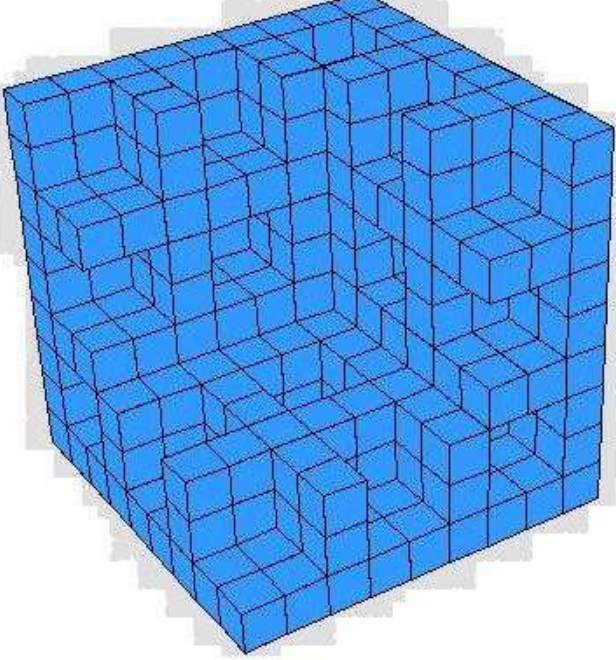
3. aşamada ise;

$$K(3) = \sum_{k=1}^3 7^{3-k} \cdot (8)^{k-1} = 8^3 - 7^3 = 169 \text{ giden küp sayısı}$$

4. aşamada ise;

$$K(4) = \sum_{k=1}^4 7^{4-k} \cdot (8)^{k-1} = 8^4 - 7^4 = 1695 \text{ giden küp sayısı}$$

Problem 2.7.4: Bir küp ($2 \times 2 \times 2$) 8 küçük birim küpe bölünerek bir köşeden ($1 \times 1 \times 1$) küp atılırsa 5. aşamada kaç küp atılır?

	
Şekil 2.23 ($3 \times 3 \times 3$) küpün köşesinden 1. aşamada ($2 \times 2 \times 2$) birim küp atılır. (Üreteç)	Şekil 2.24 2. aşamada

$$K(x) = 8 \sum_{k=1}^x 19^{x-k} \cdot (27)^{k-1}$$

2. aşamada ise küpün bir kenarının uzunluğu 4 br dir.

$$K(2) = 8 \sum_{k=1}^2 19^{2-k} \cdot (27)^{k-1} = 27^2 - 19^2 = 368 \text{ giden küp sayısı}$$

3. aşamada ise;

$$K(3) = 8 \cdot \sum_{k=1}^3 19^{3-k} \cdot (27)^{k-1} = 27^3 - 19^3 = 12824 \text{ giden küp sayısı}$$

4. aşamada ise;

$$K(4) = 8 \cdot \sum_{k=1}^4 19^{4-k} \cdot (27)^{k-1} = 27^4 - 19^4 = 401120 \text{ giden küp sayısı}$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Sonuç 3.1: $b \in \mathbb{N}$ ve $\forall b > 1$ için boyutları $b \times b$ olan bir kare için m ($b^2 - a = m$) karenin taranmasıyla ve bu işlemin x kez tekrarlanması sonucu a taralı olmayan kare sayısı, b^2 karenin içindeki toplam birim kare sayısı olmak üzere taralı birim kare sayısı;

$$K(x) = m \cdot \sum_{k=1}^x a^{x-k} \cdot b^{2(k-1)} = b^{2x} - a^x$$

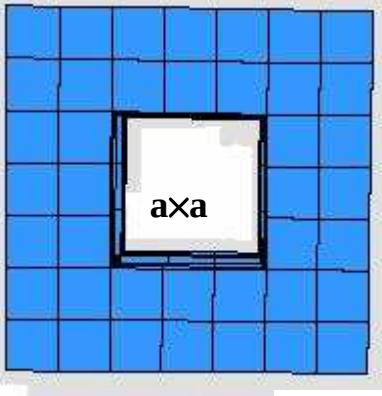
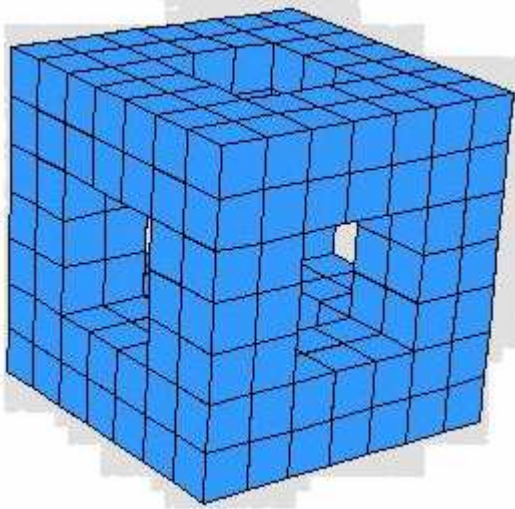
Şeklindeki sayıların toplamıdır.

Sonuç 3.2: $b \in \mathbb{N}$, $\forall b > 1$ için boyutları $b \times b$ olan bir eşkenar üçgende m ($b^2 - a = m$) tane üçgenin taranmasıyla ve bu işlemin x kez tekrarlanması sonucu a taralı olmayan üçgen sayısı, b^2 üçgenin içindeki birim üçgen sayısı olmak üzere taralı birim üçgen sayısı; $b^2 - a = m$ olmak üzere

$$U(x) = m \cdot \sum_{k=1}^x a^{x-k} \cdot b^{2(k-1)} = b^{2x} - a^x$$

Şeklindeki sayıların toplamıdır.

Sonuç 3.3: $b \times b \times b$ boyutlarındaki bir küpün merkezi boyunca (veya iç bölgesi boyunca) yüzeyde $a \times a$ kare görüntüsüne sahip küplerin alınmasıyla ve bu işlemin kalan her küp için x kez uygulanması sonucu kalan birim küp sayısı;

 $b \times b \times b$	
Şekil 3.1	Şekil 3.2

$b \times b \times b$ boyutlarındaki bir küpün merkezi boyunca (veya iç bölgesi boyunca) yüzeyde $a \times a$ kare görüntüsüne sahip küpler küpün içinden alındığında 1. aşamada;

$$a^2(3b - 2a)$$

birim küp gider.

1 aşamada kalan küp sayısı

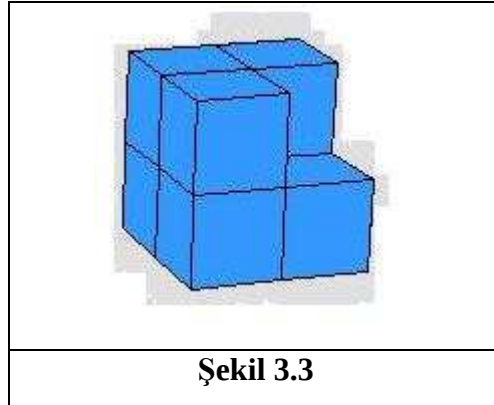
$$p = b^3 - a^2(3b - 2a)$$

İle bulunur.

Bu işlem x kez tekrar ederse giden küp sayısını aşağıdaki eşitlikle bulabiliriz.

$$T(x) = a^2(3b - 2a) \sum_{k=1}^x p^{x-k} \cdot (b^3)^{k-1} = b^{3x} - p^x$$

Sonuç 3.4: $b \times b \times b$ boyutlarındaki bir küpün herhangi bir köşesinden $a \times a \times a$ küp çıkarılırsa



Şekil 3.3

1. aşamada kalan küp sayısı $b^3 - a^3$ olduğundan

x aşama sonra giden küp sayısı

$$T(x) = a^3 \sum_{k=1}^x (b^3 - a^3)^{x-k} \cdot (b^3)^{k-1} = b^{3x} - (b^3 - a^3)^x$$

Olur.

İspat 3.1: $a, b \in \mathbb{N}$, $b > a$, $a, b \neq 0$ ve $0 \neq x \in \mathbb{N}$ x üzerinden tümevarım uygularsak.

i) $x=1$ için $m. \sum_{k=1}^1 a^{1-k} \cdot b^{2(k-1)} = m = b^2 - a^1$

ii) $x=n$ için eşitliğimizi doğru kabul edelim

$$m. \sum_{k=1}^n a^{n-k} \cdot b^{2(k-1)} = b^{2n} - a^n$$

iii) $x=n+1$ için ispatlayalım

$$m. \sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k} \cdot b^{2(k-1)} = m.a^0 \cdot b^{2n} + m.a \sum_{k=1}^n a^{n-k} \cdot b^{2(k-1)}$$

$$(b^2 - a)a^0 \cdot b^{2n} + a(b^{2n} - a^n) = b^{2n+2} - ab^{2n} + ab^{2n} - a^{n+1} = b^{2(n+1)} - a^{n+1} \quad \text{ve} \quad \text{ispatımız}$$

tamamlanır.

İspat 3.2: İspatı açıktır. İspat 3.1 uygulanır.

İspat 3.3: $a, b \in \mathbb{N}$, $b > a$, $a, b \neq 0$ ve $0 \neq x \in \mathbb{N}$,

Kalan küp sayısı $p = b^3 - a^2(3b - 2a)$ olmak üzere;

i) x üzerinde tümevarım uygularsak,

$$x=1 \text{ için } a^2(3b-2a) \sum_{k=1}^1 p^{1-k} \cdot (b^3)^{k-1} = a^2(3b-2a) = b^3 - p^1 \text{ eşitliği sağlanır.}$$

ii) $x=n$ için eşitliğimizi doğru kabul edelim

$$a^2(3b-2a) \sum_{k=1}^n p^{n-k} \cdot (b^3)^{k-1} = b^{3n} - p^n \text{ olsun.}$$

iii) $x=n+1$ için ispatlayalım

$$a^2(3b-2a) \sum_{k=1}^{n+1} p^{n+1-k} \cdot (b^3)^{k-1} = a^2(3b-2a)b^{3n} + pa^2(3b-2a) \sum_{k=1}^n p^{n-k} \cdot (b^3)^{k-1}$$

$$a^2(3b-2a)b^{3n} + [b^3 - a^2(3b-2a)]b^{3n} - p^{n+1}$$

$$a^2(3b-2a)b^{3n} + b^{3n}b^3 - a^2(3b-2a)b^{3n} - p^{n+1} = b^{3(n+1)} - p^{n+1}$$

İspat 3.4: $a, b \in \mathbb{N}$, $b > a$, $a, b \neq 0$ ve $0 \neq x \in \mathbb{N}$ olmak üzere

Yukarıdaki ifadede 1. aşamadaki kalan küp sayısı olan $p = b^3 - a^3$ alınırsa ispatımız tamamlanır.

Tartışma 3.1: Düzgün dörtyüzlülerden oluşan üç boyutlu Sierpinski fraktalında bir düzgün dörtyüzlüyü birim olarak kabul edersek düzlemdeki Sierpinski üçgeninde ve Tabanı kare piramitten oluşan 3 boyutlu Sierpinski fraktalında yukarıda vermiş olduğumuz eşitlikler geçerlidir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve değerli yardımlarını esirgemeyen Matematik öğretmenim Sayın Eşref GÜREL' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamın her bölümünde beni teşvik eden ve çalışmama en uygun ortamın oluşturulmasını sağlayan aileme destekleri için sonsuz teşekkür ediyorum.

Ayrıca büyük bir özveride bulunarak, projemin hazırlanmasında her türlü olanağı sağlayan Denizli Bilim ve Sanat Merkezi Müdürü Sayın Süleyman ARSLAN'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Büşra ÖZ

KAYNAKLAR:

Conway's Game of Life: Lines to Fractals, <https://webfiles.uci.edu/bwisialo/www/gameoflife2.html#Images>

Crisler, N., Fisher, P., & Froelich, G. (1994). Discrete mathematics through applications. New York: W. H. Freeman and Company.

Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, E. (1993), Precalculus, a graphing approach. Lexington, MA: D. C. Heath and Company.

Magdy M. Ibrahim, Robert J. Krawczyk, Illinois Institute of Technology, College of Architecture, Chicago, IL USA, Generating Fractals Based on Spatial Organizations,

Mirasyedilioğlu, Ş., Akpınar, A., (2009) Matematik 11, s.146 – 157, Ankara

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author. Colorado Model Content Standards for Mathematics(1995)

Weisstein, Eric W. "Fractal." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html>

Paul Bourke, March 1993, Geometric models of the Menger sponge, <http://paulbourke.net/fractals/gasket/>

Yılmaz, N., Gülbahar, M., Çilem A., Doğan, T., (2011) Matematik 11, s. 162 – 171, Ankara

HAZIRLAYAN:

DANIŞMAN :

B. ÖZ

EŞREF GÜREL

DENİZLİ BİLİM VE SANAT MERKEZİ

DENİZLİ BİLİM VE SANAT MERKEZİ

MATEMATİK ÖĞRETMENİ

$n \times n$ BOYUTUNDA HER SATIR VE SÜTUN
TOPLAMI SABİT OLAN 0-1 MATRİSLERİNİN
SAYISI

HAZIRLAYANLAR

T. B. AKŞAHİN

Y. B. UYSAL

DANIŞMAN:

BARIŞ ARSLAN

KONYA BİLİM VE SANAT MERKEZİ

-2015-

PROJE RAPORU

Proje Adı: $n \times n$ boyutunda her satır ve sütun toplamı sabit olan 0-1 matrislerinin sayısı.

Projenin Amacı: $n \times n$ boyutunda satır ve sütun toplamı 2 olan 0-1 matrislerinin sayısını özyineli fonksiyonlar yardımıyla bulma.

GİRİŞ:

Richard P. Stanley'in Enumerative Combinatorics Volume 1 kitabının ikinci baskısının 119. Sayfasındaki 20. sorudan esinlenerek proje çalışmasına başladık. Kitaptaki soru şu şekildedir:

★ $m \times n$ boyutunda 0-1 matrislerinden her satır ve sütununda tek sayıda bir bulunan matrislerin sayısı kaçtır? Her satır ve sütununda çift sayıda bir bulunan matrislerin sayısı kaçtır?

Bu problem için küçük boyuttaki matrisler dışında kapalı bir formül veya özyineli sayma fonksiyonu içeren bir çözüm henüz bulunamamış olduğu için, bu problemin daha özel durumlarıyla ilgili çalışmaya başladık. $m \times n$ boyutunda 0-1 matrisleri (binary matris) yerine $n \times n$ boyutunda kare matrisleri aldık. Ayrıca her satır ve sütununda tek sayıda veya çift sayıda 1 bulunan matrisler yerine, tam olarak bir tane 1 içeren ve tam olarak iki tane 1 içeren matrisler üzerine çalışmaya başladık.

Bu projede iki tane problemi ele aldık. Birinci problemde her satır ve sütununda bir tane 1 bulunan matrislerin sayısı, ikinci problemde iki tane 1 bulunan matrislerin sayısı üzerine çalıştık. Birinci problem çok daha kolay olduğu için kapalı bir formül bulabildik. Fakat ikinci problem için kapalı bir formül bulamasak da formülü özyineli fonksiyonla ifade ettik.

Satır ve sütun toplamı sabit olan 0-1 matrisleri üzerine yapmış olduğumuz literatür taraması sonucu; Tan Zhonghua, Gao Shanzhen, Heinrich Niederhausen tarafından yazılan 'ENUMERATION OF (0-1) – MATRICES WITH CONSTANT ROW AND COLUMN SUMS' başlıklı Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 2006, 21(4): 479-486 makalesinde, her satır ve sütununda iki tane 1 bulunan 0-1 kare matrislerin sayısı $f_2(n)$ olmak üzere Teorem 2 de aşağıda verilmiştir.

Teorem 2. $f_2(0) = 1$, $f_2(1) = 0$ ve $f_2(2) = 1$ olmak üzere,

$n \geq 2$ için,

$$f_2(n) = 2\binom{n}{2}f_2(n-1) + \binom{n}{2}(n-1)f_2(n-2)$$

Teoremin ispatı makalede yapılmıştır. Bu teoremi, makaledekinden farklı yöntem ve teknikler kullanarak ispatladık.

PROBLEM 1: n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda (0-1) – matrislerinin kaç tanesinin her satır ve sütununda bir tane 1 bulunur?

Öncelikle küçük n değerleri için hesaplama yapalım: $n = 1$ için istenilen koşulda 1 durum vardır.

$n = 2$ için, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere 2 matris vardır.

$n = 3$ için, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Küçük n değerleri için yaptığımızı $n \times n$ boyutundaki matrisler için genelleleyelim. Önce bir kaç tanım verelim:

TANIM 1: Tüm elemanları sıfır ve birlerden oluşan matrislere (0-1) matris (Binary matris) denir. Ayrıca bu matrisler, Boolean matrisler diye de adlandırılır.

TANIM 2: S bir küme olmak üzere, S den S ye tanımlanan birebir ve örten fonksiyonlara permütasyon denir.

Cauchy'nin gösterimine göre; tanım kümesindeki elemanlar birinci satıra, görüntü kümesindeki elemanlar ikinci satıra yazılır. Örneğin $\{1,2,3,4\}$ kümesinin bir permütasyonu, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$ ve $f(4) = 2$ anlamındadır.

Her satır ve sütununda bir tane 1 bulunan ve diğer elemanları sıfır olan kare matrisler permütasyonlar şeklinde yazılabilir. Örneğin:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisini ele alalım.}$$

Birinci satırdaki 1, ikinci sütunda olduğundan $f(1) = 2$

İkinci satırdaki 1, üçüncü sütunda olduğundan $f(2) = 3$

Üçüncü satırdaki 1, birinci sütunda olduğundan $f(3) = 1$

Dördüncü satırdaki 1, dördüncü sütunda olduğundan $f(4) = 4$

Öyleyse bu matrise karşılık gelen permütasyon, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Her satır ve her sütununda bir tane 1 bulunan $n \times n$ boyutunda (0-1) – matrisleri ile $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin permütasyonları arasında bire bir eşleme mevcuttur. $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin elemanları $n!$ değişik şekilde sıralanabilir.

Her satır ve her sütununda k tane 1 bulunan $n \times n$ boyutundaki (0-1) – matrislerinin sayısını $f_k(n)$ ile gösterirsek. Birinci problem için, $n \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki kapalı formülü elde ederiz.

$$f_1(n) = n!$$

PROBLEM 2: n pozitif bir tam sayı olmak üzere $n \times n$ boyutunda (0-1) – matrislerinin kaç tanesinin her satır ve sütununda iki tane 1 bulunur?

Önce küçük n değerleri için istenilen koşuldaki matrislerin sayısını hesaplayalım:

$n = 1$ için, istenilen koşulda matris yoktur. $f_2(1) = 0$ dir.

$n = 2$ için, istenilen koşulda 1 matris vardır. $f_2(2) = 1$ dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3$ için, istenilen koşulda 6 matris vardır. $f_2(3) = 6$ dir.

Birinci problemde $n = 3$ için, $f_1(3) = 3! = 6$ bulmuştuk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerde 1 gördüğümüz yere 0 ve 0 gördüğümüz yere 1 yazarsak;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$f_2(3) = 6$ sonucuna ulaşırız.

$n = 4$ için, istenilen koşulda 90 tane matris vardır. $f_2(4) = 90$ dir.

Bütün bu durumları öncelikle matris formunda yazmak zor olduğu için, birinci problemdeki permütasyon eşlemelerine benzer şekilde yazmaya çalışalım. Örnek olarak 4×4 boyutunda aşağıdaki matrisi alalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Birinci satırdaki ilk 1, birinci sütunda olduğundan, $1 \rightarrow 1$

Birinci satırdaki ikinci 1, ikinci sütunda olduğundan, $1 \rightarrow 2$

İkinci satırdaki ilk 1, birinci sütunda olduğundan, $2 \rightarrow 1$

İkinci satırdaki ikinci 1, üçüncü sütunda olduğundan, $2 \rightarrow 3$

Üçüncü satırdaki ilk 1, ikinci sütunda olduğundan, $3 \rightarrow 2$

Üçüncü satırdaki ikinci 1, dördüncü sütunda olduğundan, $3 \rightarrow 4$

Dördüncü satırdaki ilk 1, üçüncü sütunda olduğundan, $4 \rightarrow 3$

Dördüncü satırdaki ikinci 1, dördüncü sütunda olduğundan, $4 \rightarrow 4$

Bu verileri alt alta permütasyonlara benzer bir şekilde iki satır şeklinde yazalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matris 4×4 boyutunda olduğu için, birinci satırda 1, 2, 3, 4 sayıları ikişer defa tekrarlanır. İkinci satıra önce matriste gördüğümüz ilk 1, sonra ikinci 1 yazıldığından bu satırdaki diziyi ikişerli grupladığımızda artan sıraya göre aşağıdaki sıralı ikilileri elde ederiz:

(1,2) (1,3) (2,4) (3,4)

Tersinden verilen bu ikililer her satır ve sütununda iki tane 1 bulunan 4×4 boyutundaki matrise karşılık gelir. Örneğin bu dörtlüdeki (1,2) birinci satırdaki, (1,3) ikinci satırdaki, (2,4) üçüncü satırdaki ve (3,4) dördüncü satırdaki '1' lerin konumlarını belirler.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1,2) (1,3) (2,4) (3,4) dörtlüsünü;

(12) (13)	(24) (34)
-----------	-----------

 şeklinde gösterelim.

Bu tip gösterimdeki matrisleri iki farklı durumda inceleyelim;

1. DURUM: Herhangi iki satırdaki her iki '1' in de konumları aynı olan matrislerin kümesini A ile gösterelim. Herhangi üç veya daha fazla satırdaki birlerin sayıları aynı olamaz çünkü her satırda tam olarak 2 tane bir içeren matrisleri bulmaya çalışıyoruz. Bu tip matrislere birkaç örnek verelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;">| | |
| --- | --- |
| (12) (12) | (24) (34) |$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;">| | |
| --- | --- |
| (23) (14) | (23) (14) |$$

2. DURUM: Herhangi iki satırdaki ‘1’ lerin konumları farklı olan matrislerin kümesini F ile gösterelim. Başka bir deyişle F kümesi, A kümesine ait olmayan matrislerin kümesidir. Bu tip matrislere birkaç örnek verelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline (13) & (12) \\ \hline (24) & (34) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline (23) & (12) \\ \hline (14) & (34) \\ \hline \end{array}$$

4 x 4 boyutundaki A kümesine ait olan matrislerin sayısı 18 dir. Bu matrislere karşılık gelen dörtlüler Tablo 1 de ve matrisler Tablo 2 de gösterilmiştir.

(12)	(12)	(34)	(34)
(12)	(34)	(12)	(34)
(12)	(34)	(34)	(12)
(13)	(13)	(24)	(24)
(13)	(24)	(13)	(24)
(13)	(24)	(24)	(13)
(14)	(14)	(23)	(23)
(14)	(23)	(14)	(23)
(14)	(23)	(23)	(14)
(23)	(23)	(14)	(14)
(23)	(14)	(23)	(14)
(23)	(14)	(14)	(23)
(24)	(24)	(13)	(13)
(24)	(13)	(24)	(13)
(24)	(13)	(13)	(24)
(34)	(34)	(12)	(12)
(34)	(12)	(34)	(12)
(34)	(12)	(12)	(34)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

TABLE 2

4 x 4 boyutunda A kümesinde olan matrislerin sayısını hesaplamak için, 2 x 2 boyutundaki matrislerin sayısından faydalanarak şöyle bir yöntem geliştirdik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matriste aynı konumda olan koyu renkle gösterilen 1 lerin bulunduğu satır ve sütunları silerek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ boyutunda her satır ve sütununda 2 tane bir bulunan matrisi elde ederiz.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matriste aynı konumda olan koyu renkle gösterilen 1 lerin bulunduğu satır ve sütunları silerek,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ boyutunda her satır ve sütununda 2 tane bir bulunan matrisi elde ederiz.}$$

Bu gözlemlerden yola çıkarak bir genelleme yaparak aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

ÖNERME 1: $n \times n$ boyutundaki her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan ve tanımlanmış olduğumuz A tipindeki matrislerin sayısı $A_2(n)$ olmak üzere;

$$n \geq 3 \text{ için,}$$

$$A_2(n) = \binom{n}{2}(n-1)f_2(n-2)$$

Burada; $f_2(1) = 0$, $f_2(2) = 1$ ve $f_2(3) = 6$ dır.

İSPAT: $n \times n$ boyutundaki A tipindeki matrislerden i . ve j . satırlardaki 1 lerin konumları aynı olsun. Örneğin, aşağıdaki $n \times n$ boyutundaki matriste 2. ve 4. Satırlardaki 1 lerin konumları aynı olsun. Bu koyu renkle yazılan birlerin bulunduğu satır ve sütunları silersek, $(n - 2) \times (n - 2)$ boyutunda her satır ve sütununda 2 tane bir bulunan (0-1) matrislerini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Matrisin i . satırdaki, n elemanlı (0-1) dizisini; $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ olarak alalım. Bu dizideki 1'ler $\binom{n}{2}$ değişik şekilde seçilebilir. j . Satırdaki mavi çizgi için $(n - 1)$ farklı durum vardır. Mavi satırları ve sarı sütunları çıkardığımızda, $f_2(n - 2)$ sayıda $(n - 2) \times (n - 2)$ boyutunda her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan matris yerleştirilebilir. Sonuç olarak;

$$A_2(n) = \binom{n}{2}(n - 1)f_2(n - 2) \text{ dir.}$$

Özel olarak;

$$A_2(4) = \binom{4}{2}(4 - 1)f_2(2)$$

$$A_2(4) = 6.3.1$$

$$A_2(4) = 18 \text{ dir.}$$

4×4 boyutundaki F kümesine ait olan matrislerin sayısı 72 dir. Bu matrislere karşılık gelen dörtlüler Tablo 3 de ve matrisler Tablo 4 de gösterilmiştir.

(12) (13)	(24) (34)	(12) (14)	(23) (34)	(12) (23)	(14) (34)
(12) (13)	(34) (24)	(12) (14)	(34) (23)	(12) (23)	(34) (14)
(13) (12)	(24) (34)	(14) (12)	(23) (34)	(23) (12)	(14) (34)
(13) (12)	(34) (24)	(14) (12)	(34) (23)	(23) (12)	(34) (14)

(12) (24)	(13) (34)	(12) (34)	(13) (24)	(12) (34)	(14) (23)
(12) (24)	(34) (13)	(12) (34)	(24) (13)	(12) (34)	(23) (14)
(24) (12)	(13) (34)	(34) (12)	(13) (24)	(34) (12)	(14) (23)
(24) (12)	(34) (14)	(34) (12)	(24) (13)	(34) (12)	(23) (14)

(13) (14)	(23) (24)	(13) (23)	(14) (24)	(13) (24)	(12) (34)
(13) (14)	(24) (23)	(13) (23)	(24) (14)	(13) (24)	(34) (12)
(14) (13)	(23) (24)	(23) (13)	(14) (24)	(24) (13)	(12) (34)
(14) (13)	(24) (23)	(23) (13)	(24) (14)	(24) (13)	(34) (12)

(13) (24)	(14) (23)	(13) (34)	(12) (24)	(14) (23)	(12) (34)
(13) (24)	(23) (14)	(13) (34)	(24) (12)	(14) (23)	(34) (12)
(24) (13)	(14) (23)	(34) (13)	(12) (24)	(23) (14)	(12) (34)
(24) (13)	(23) (14)	(34) (13)	(24) (12)	(23) (14)	(34) (12)

(14) (23)	(13) (24)	(14) (24)	(13) (23)	(14) (34)	(12) (23)
(14) (23)	(24) (13)	(14) (24)	(23) (13)	(14) (34)	(23) (12)
(23) (14)	(13) (24)	(24) (14)	(13) (23)	(34) (14)	(12) (23)
(23) (14)	(24) (13)	(24) (14)	(23) (13)	(34) (14)	(23) (12)

(23) (24)	(13) (14)	(23) (34)	(12) (14)	(24) (34)	(12) (13)
(23) (24)	(14) (13)	(23) (34)	(14) (12)	(24) (34)	(13) (12)
(24) (23)	(13) (14)	(34) (23)	(12) (14)	(34) (24)	(12) (13)
(24) (23)	(14) (13)	(34) (23)	(14) (12)	(34) (24)	(13) (12)

TABLO 3

4 x 4 boyutunda F kümesinde olan matrislerin sayısını hesaplamak için, 3 x 3 boyutundaki matrislerin sayısından faydalanarak şöyle bir yöntem geliştirdik:

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matriste birinci satırda iki tane 1 vardır. Kırmızı renkle yazılan 1'in bulunduğu satır ve sütunu silelim. Sildiğimiz satır ve sütundaki diğer 1'lerin yatay ve dikey kesişiminde bulunan, mor renkle yazılmış '0' yerine '1' yazalım.

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{purple}{1} & \textcolor{purple}{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{purple}{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{purple}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu prosedürü sürdürerek 3 x 3 boyutunda her satır ve sütununda tam olarak 2 tane 1 bulunan matrisler elde edilir. Her X ve Y tipindeki matrisler arasında bire bir eşleme vardır. X tipindeki matrislerin sayısı Y tipindeki matrislerin sayısına eşittir.

Benzer şekilde Mavi renkle yazılan 1'in bulunduğu satır ve sütunu silelim. Sildiğimiz satır ve sütundaki diğer 1'lerin yatay ve dikey kesişiminde bulunan, yeşil renkle yazılmış '0' yerine '1' yazalım.

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{1} & 0 & 0 \\ \textcolor{green}{0} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} \textcolor{green}{0} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Y = \begin{bmatrix} \textcolor{green}{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde, 3 x 3 boyutunda her satır ve sütununda tam olarak 2 tane 1 bulunan matrisler elde edilir.

Bu gözlemlerden yola çıkarak bir genelleme yaparak aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

ÖNERME 2: $n \times n$ boyutundaki her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan ve tanımlamış olduğumuz F kümesine ait matrislerin sayısı $F_2(n)$ olmak üzere;

$$n \geq 2 \text{ için,}$$

$$F_2(n) = 2 \binom{n}{2} f_2(n-1)$$

Burada; $f_2(2) = 1$ ve $f_2(3) = 6$ dır.

İSPAT: F kümesine ait her satır ve sütununda 2 tane bir içeren $n \times n$ boyutunda bir matris alalım. Birinci satırdaki 1 lerin konumları diğer hiçbir satırdaki 1 lerle aynı değildir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & \textcolor{blue}{1} & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Birinci satırdaki iki tane 1, $\binom{n}{2}$ değişik şekilde seçilebilir. Bu satırı silip, kırmızı olan 1'in bulunduğu sütunu silebiliriz veya mavi 1'in olduğu sütunu silebiliriz. Her sildiğimiz sütun için,

$\binom{n}{2}f_2(n-1)$ durum olduğunu gösterelim. Kırmızı 1'in bulunduğu sütunu sildiğimizde:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & \textcolor{blue}{1} & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \textcolor{violet}{0} & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Sildiğimiz satır ve sütundaki diğer 1'lerin yatay ve düşey kesişimindeki sıfırı mor renkle gösterelim. $(n-1) \times (n-1)$ boyutunda aşağıdaki matrisi elde ederiz;

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \textcolor{violet}{0} & . & . & . \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Mor renkteki '0' ın yerine '1' yazarak $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutunda, her satırında 2 tane 1 bulunan Y matrislerini elde ederiz.

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Sadece 1 tane elemanın rolünü değiştirdiğimizden her X matrisine karşılık bir Y matrisi bulabiliriz. Başka bir deyişle her X matrisi ile Y matrisi arasında bire bir eşleme vardır. Y tipindeki matrislerin sayısı $f_2(n - 1)$ olduğu için X tipindeki matrislerin sayısı da $f_2(n - 1)$ dir. X tipindeki matrislerden faydalanarak $\binom{n}{2} f_2(n - 1)$ tane $(n \times n)$ boyutunda F kümesine ait matris olduğunu gösterelim:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

X matrisi $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutundadır. Her X tipindeki matris için, $(n \times n)$ boyutunda F kümesine ait matris elde etmek için aşağıda belirtilen tekniği kullanalım:

- ★ $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutundaki soluna bir sütun, üstüne bir satır ekleyelim. Mor renkteki sıfırın bulunduğu satırın en soluna ve mor renkte bulunan sütunun en üstüne birer tane 1 ekleyelim.
- ★ Oluşturduğumuz $(n \times n)$ boyutundaki matrisin, 1. satır ve 1. sütundaki elemanına 1 yazalım.

Yeni oluşturduğumuz matrisi Z ile gösterelim:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Bu tekniği kullanarak, $\binom{n}{2}f_2(n-1)$ tane $(n \times n)$ boyutunda F kümesine ait matrisler elde edilir.

Benzer şekilde birinci satırdaki mavi renkli 1'in bulunduğu satır ve sütunu silerek ve aynı tekniği kullanarak, $\binom{n}{2}f_2(n-1)$ tane $(n \times n)$ boyutunda F kümesine ait matrisler elde edilir.

Sonuç olarak;

$$F_2(n) = \binom{n}{2}f_2(n-1) + \binom{n}{2}f_2(n-1)$$

$$F_2(n) = 2\binom{n}{2}f_2(n-1) \text{ dir.}$$

Özel olarak;

$$F_2(4) = 2\binom{4}{2}f_2(3)$$

$$F_2(4) = 2.6.6$$

$$F_2(4) = 72$$

Ayrıca 4×4 boyutundaki her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan matrislerin sayısı A kümesine ve F kümesine ait matrislerin toplamı olduğu için;

$$f_2(4) = A_2(4) + F_2(4)$$

$$f_2(4) = 18 + 72$$

$$f_2(4) = 90$$

Her satır ve sütununda tam olarak iki tane 1 bulunan (4×4) boyutundaki (0-1) matrislerinden 90 tane vardır.

TEOREM 1: $n \times n$ boyutundaki her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan (0-1) matrislerinin sayısı $f_2(n)$ ise,

$$f_2(0) = 1, f_2(1) = 0 \text{ ve } f_2(2) = 1 \text{ olmak üzere,}$$

$$n \geq 2 \text{ için,}$$

$$f_2(n) = 2\binom{n}{2}f_2(n-1) + \binom{n}{2}(n-1)f_2(n-2) \text{ dir.}$$

İSPAT: Herhangi iki satırdaki her iki ‘1’ in de konumları aynı olan $(n \times n)$ boyutundaki matrislerin sayısını $A_2(n)$ ile bunun dışında olan matrislerin sayısını $F_2(n)$ ile gösterelim. $n \times n$ boyutundaki her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan (0-1) matrislerinin sayısı $f_2(n)$ olduğundan;

$$f_2(n) = F_2(n) + A_2(n) \text{ dir.}$$

Önerme 1 ve Önerme 2 den,

$$f_2(n) = 2\binom{n}{2}f_2(n-1) + \binom{n}{2}(n-1)f_2(n-2)$$

Sonucu elde edilir. $n = 0$ durumu boş matris olduğundan $f_2(0) = 1$ dir. 1×1 boyutunda her satır ve sütununda 2 tane 1 bulunan matris olmadığı için $f_2(1) = 0$ dır. $n = 2$ durumunda $F_2(2) = 0$ ve $A_2(2) = 1$ olduğundan $f_2(2) = 1$ dir.

‘The On-Line Encylopdia of Intiger Sequences’ sitesinde A001499 kodunda bu dizinin elemanları verilmektedir. Bu dizinin elemanlarını bazıları bu siteden alınarak aşağıda verilmiştir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(n)	1	0	1	6	90	2040	67950	3110940	187530840

n	9	10	11	12
f(n)	14398171200	1371785398200	158815387962000	21959547410077200

KAYNAKLAR:

Enumerative Combinatorics, Volume1<<http://math.mit.edu/~rstan/ec/ec1.pdf>>, son erişim tarihi 06/11/2014

Enumeration of (0-1)-Matrices with Constand Row and Column Sums,
<http://www.math.zju.edu.cn/amjcu/B/200604/479-486_8_05E1455.pdf>, son erişim tarihi 15/01/2015

Algorithms for constructing (0-1)-matrices with prescribedrow and column sum vectors,
< <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X06003980>>, son erişim tarihi 08/01/2015

The On-Line Encylopdia of Intiger Sequences, < <https://oeis.org/A001499/list> >, son erişim tarihi 20/01/2015

İKİ FARKLI BİÇİMDE SAYMA

HAZIRLAYANLAR

G. YAĞCI

DANIŞMAN:

BARIŞ ARSLAN

PROJE RAPORU

Proje Adı : İki Farklı Biçimde Sayma

Projenin Amacı :

Bu projede sayma ile ilgili bazı özdeşliklerin ispatları üzerinde çalışıldı. Amaç bu özdeşlikleri iki farklı biçimde sayma metodunu kullanarak kanıtlamak ve elde edilen sonuçlar yardımıyla bazı sayma problemleri için genellemeler yapmaktır.

GİRİŞ:

Toplama kuralı, çarpma kuralı, içirme dışarma prensibi, bire bir eşleme tekniği, güvercin yuvası ilkesi, üreteç fonksiyonu ile sayma, kombinatorikte oldukça sık kullanılan yöntemlerden bazılarıdır. Bunların dışında çifte sayma tekniği, bir başka deyişle iki farklı biçimde sayma tekniği sayma problemleri için oldukça önemli bir yöntemdir. İki farklı biçimde sayma ilkesi, bir kümenin elemanlarını iki değişik yolla sayarak elde edilen ifadeleri birbirine eşitlemekten ibarettir.

Bu proje dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, bazı tanım ve ön bilgilere yer verilmiştir. Bu bölümde, n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısının $\binom{n}{k}$ olduğu, tüm alt kümelerinin sayısının 2^n olduğu ve $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ özdeşliğinin doğru olduğunun kanıtları iki farklı biçimde sayma yöntemi kullanılarak yapılmıştır.

İkinci bölümde Sayma ile ilgili problemlerde oldukça sık kullanılan $n \times n$ boyutunda bir ızgarada sadece kuzey ve doğu adımlarını kullanarak $(0,0)$ noktasından (n,n) noktasına kaç farklı yoldan gidilir problemi ele alınmış ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, $n \times n$ boyutunda bir satranç tahtasına k özdeş taş, herhangi iki taş aynı satır veya sütuna gelmeyecek şekilde kaç farklı şekilde yerleştirilir problemi ele alınmıştır. Önce $k = 2$ için problem iki farklı biçimde sayarak çözülmüştür. $k = 3$ durumu için elde edilen sayma fonksiyonu $k=2$ için elde edilmiş sayma fonksiyonu türünden yazılarak yinelenen sayma fonksiyonları yardımı ile k taş için üreteç fonksiyonu bulunmuştur.

Dördüncü bölümde sonuç bölümüne yer verilmiştir. Bu bölümde elde edilen özdeşlikler ve problemlerin sonuçları yazılmıştır. Bunların dışında iki farklı biçimde sayma yöntemine uygun bazı ilginç özdeşliklere yer verilmiştir.

TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER:

TANIM I : n ve k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, $\binom{n}{k}$ binom katsayıları şu şekilde tanımlanır.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 2.1} = \frac{n!}{k! (n-k)!}, \quad k > n \text{ ise, } \binom{n}{k} = 0 \text{ dır.}$$

TEOREM I : n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{k}$ dır.

İSPAT: $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinin elemanları değişik şekilde sıralanabilir. Bu sıralamalara permütasyon denir. Bu permütasyonların sayısı $n!$ dir. Çünkü ilk terim n sayıdan herhangi biridir, ikinci terim $n-1$ sayıdan biridir ve bu şekilde devam edilirse,
$$n.(n-1) \dots 1 = n! \text{ sonucu elde edilir.}$$

Şimdi bu permütasyonları farklı bir şekilde sayalım :

B, A kümesinin k elemanlı bir alt kümesi olsun. Böylece B kümesinin $k!$ tane permütasyonu vardır. Benzer şekilde B kümesinde olmayan elemanların da $(n-k)!$ tane permütasyonu vardır. Bu $(n-k)!$ permütasyonlardan herhangi birini $k!$ lerden herhangi birinin sağına yapıştırırsak n elemandan oluşan A nın sıralı bir dizisini elde ederiz ki bu da A nın bir permütasyonudur. A nın tüm permütasyonlarını elde etmek için B kümesi ile bu prosedürü tekrarlarız. Bu işlemi her k elemanlı alt küme için yaparız. Böylece toplam olası permütasyonların sayısı $T. k! (n-k)!$ dır. Burada T , k elemanlı alt kümelerin sayısıdır. Bu ifade $n!$ sayısına eşit olmalıdır.

$$n! = T. k! (n-k) \text{ ise, } T = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k} \text{ dır.}$$

İki farklı şekilde sayarak, n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısının $\binom{n}{k}$ olduğunu göstermiş olduk.

TEOREM II: n elemanlı bir kümenin 2^n farklı alt kümesi vardır.

İspat: $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesini alalım. A kümesinin eleman sayısı sıfır ise, alt kümesi sadece boş kümedir ve $2^0 = 1$ dir. A kümesi bir elemandan oluşuyor ise alt kümeleri boş küme ve kendisidir. $2^1 = 2$ dir. A kümesinin alt küme sayısının 2^n olduğunu doğru kabul edelim. $n+1$ elemanlı bir kümenin alt küme sayısının 2^{n+1} olduğunu gösterelim.

$B = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ kümesini ele alalım. A 'nın her alt kümesi B 'nin de bir alt kümesidir. A 'nın alt kümesi olmayıp B 'nin alt kümesi olan kümelerde $n+1$ elemanı olmalıdır. A 'nın alt kümelerinden her birine $n+1$ elemanını ekleyelim. Böylece B 'nin alt küme sayısı $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ olur.

TEOREM III: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

İSPAT: İki farklı biçimde sayma yöntemi kullanarak teoremi ispatlayalım.

- 1) $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesini ele alalım. Bu kümenin 0 elemanlı, 1 elemanlı, ... ve n elemanlı alt kümelerini $n+1$ parçaya ayırarak sayalım.

n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{k}$ dir. (Teorem I)

Sıfır elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{0}$, bir elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{1}$, ... n elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{n}$ olduğundan tüm alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ 'dir.

- 2) A 'nın herhangi bir alt kümesinde 1,2,3,... n elemanlarının bulunup bulunmama durumuna göre seçim yapılır. x , A 'nın bir elemanıdır veya x , A 'nın bir elemanı değildir. Olmak üzere her eleman için iki durum vardır. Dolayısıyla çarpmanın temel ilkesine göre 2^n tane alt küme vardır.

ÖNERME-I: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$, $1 \leq r \leq n$

İSPAT- I : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$ Kombinasyon tanımında $n!$ yerine $n (n-1)!$ yazalım;

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n.(n-1)!}{r! (n-r)!} = \frac{[r+(n-r)].(n-1)!}{r! (n-r)!} = \frac{r.(n-1)!}{r! (n-r)!} + \frac{(n-r).(n-1)!}{r! (n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! (n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r! (n-r-1)!} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \end{aligned}$$

Şimdi bu ispatı iki farklı sayma yöntemini kullanarak yapalım:

İSPAT- II : n çocuk arasından geziye gidecek r çocuğun seçimi kaç farklı şekilde yapılabilir? Problemini ele alalım iki değişik şekilde sayalım;

n çocuk arasından geziye gidecek r çocuk $\binom{n}{r}$ değişik şekilde seçilir. n çocuk arasında ismi Ali olan biri olsun. Ali geziye gidebilir veya gitmeyebilir. Ali geziye gideceklerin arasında ise, n çocuk arasından geziye gidecek r çocuk $\binom{n-1}{r-1}$ değişik şekilde seçilir çünkü içlerinden biri Ali dir. Ali geziye gideceklerin arasında değil ise, geriye kalan $n - 1$ kişi arasından $\binom{n-1}{r}$ değişik şekilde geziye gidecek çocuk seçilebilir.

n çocuk arasından geziye gidecek r çocuk toplam, $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ değişik şekilde seçilir. Birinci saymada elde edilen sonuç ikinci saymadaki sonuca eşit olacağından;

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \text{ sonucu elde edilir.}$$

$$\text{ÖNERME-II: } \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n}{r+1} \quad , \quad 1 \leq r \leq n$$

İSPAT:

n üzerinden tümevarım uygulayalım;

$n = 1$ için

$$\binom{r}{r} = \binom{r+1}{r+1} \text{ eşitliği doğrudur.}$$

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+n-2}{r} = \binom{r+n-1}{r+1} \text{ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.}$$

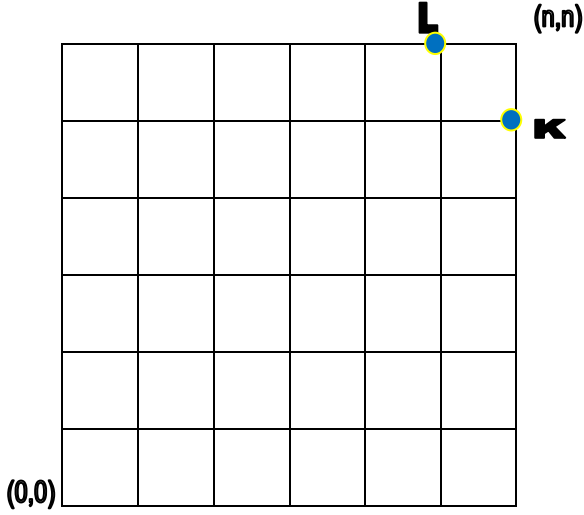
$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+n-2}{r} + \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{r+1} + \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n}{r+1} \text{ (Önerme 1 den)}$$

Sonuç olarak $1 \leq r \leq n$ için,

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n}{r+1} \text{ eşitliği doğrudur.}$$

BAZI ÖZDEŞLİKLER VE KANITLARI:

ÖZDEŞLİK I: $2 \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n}$

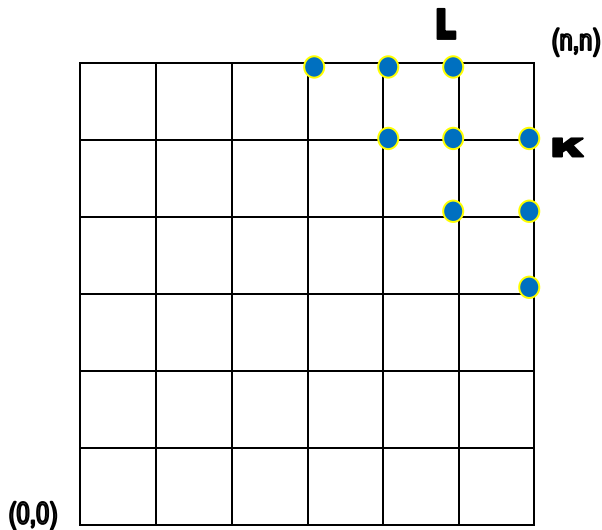


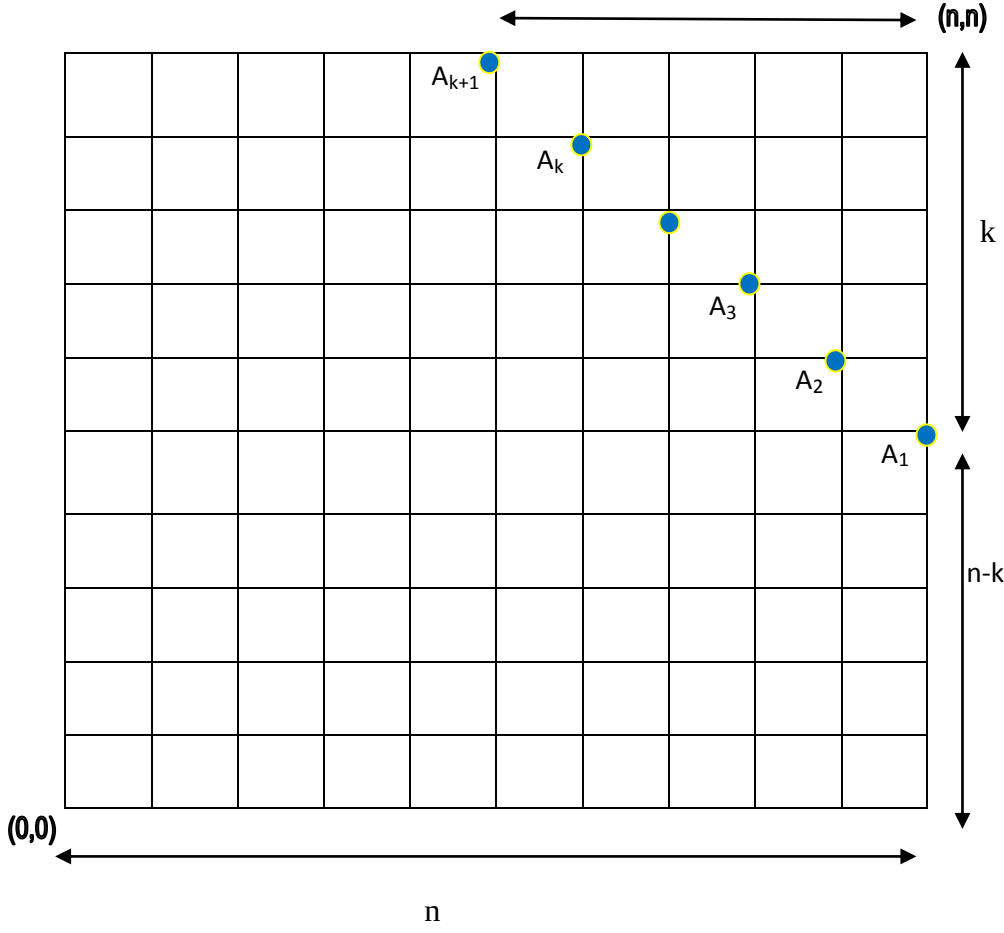
Yukarıdaki ızgarada (0,0) noktasından (n,n) noktasına kuzey ve doğu adımları kullanılarak kaç değişik yoldan gidilebilir? Problemini iki farklı biçimde sayarak bulalım.

- 1) n adım kuzey, n adım doğu olmak üzere toplam 2n adım arasından n adım $\binom{2n}{n}$ değişik biçimde seçilir.
- 2) (n,n) noktasına gitmek için K veya L noktalarından geçmek zorundayız. K ya uğrayarak (n,n) noktasına $\binom{2n-1}{n-1}$, L ye uğrayarak $\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$, değişik yoldan gidilir. Simetriden dolayı K noktasından ve L noktasından geçerek gidilen yolların sayısı eşittir.

Toplam $2 \binom{2n-1}{n-1}$ farklı yol vardır. 1) ve 2) de elde edilen sonuçlar eşit olacağından özdeşlik kanıtlanmış olur.

Bu prosedürü k+1 nokta için genelelim. k+1 noktadan geçerek (n,n) noktasına ulaşalım.





$1 \leq k < n$ ve k tek sayı olmak üzere,

Yukarıdaki şekilde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, A_{k+1}$ noktalarından geçerek (n,n) noktasına ulaşalım:

A_1 noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n} \cdot \binom{k}{0}$ farklı yol vardır.

A_2 noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-1} \cdot \binom{k}{1}$ farklı yol vardır.

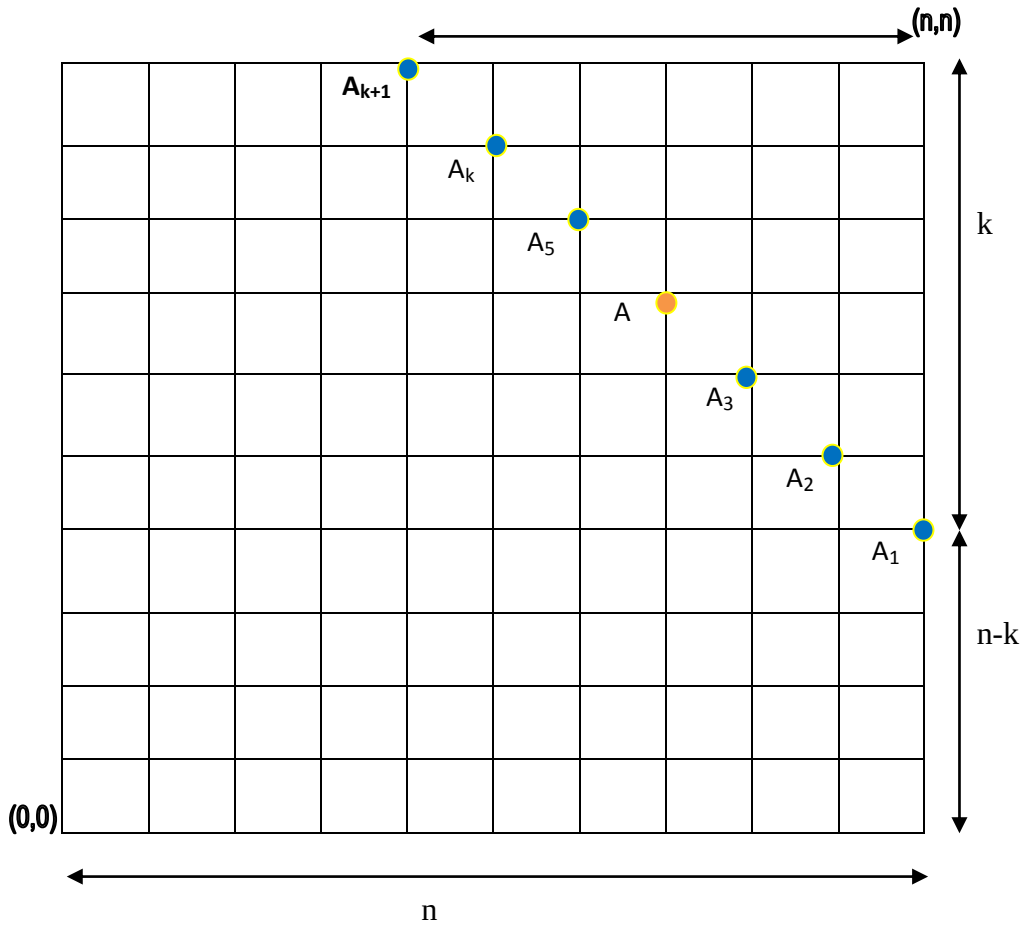
A_3 noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-2} \cdot \binom{k}{2}$ farklı yol vardır.

.

$A_{(k+1)/2}$ noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-(k-1)/2} \cdot \binom{k}{(k-1)/2}$ farklı yol vardır.

Geriye kalan noktalardan geçenler bu yolların simetrisi olduğundan, bulunan bu yolların sayısını 2 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitliğin sol tarafını elde ederiz.

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \binom{2n-k}{n-i} \binom{k}{i} = \binom{2n}{n} \quad 1 \leq k < n \text{ ve } k \text{ tek sayı,} \quad (2)$$



$1 \leq k < n$ ve k çift sayı olmak üzere,

A_1 noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n} \cdot \binom{k}{0}$ farklı yol vardır.

A_2 noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-1} \cdot \binom{k}{1}$ farklı yol vardır.

A_3 noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-2} \cdot \binom{k}{2}$ farklı yol vardır.

.

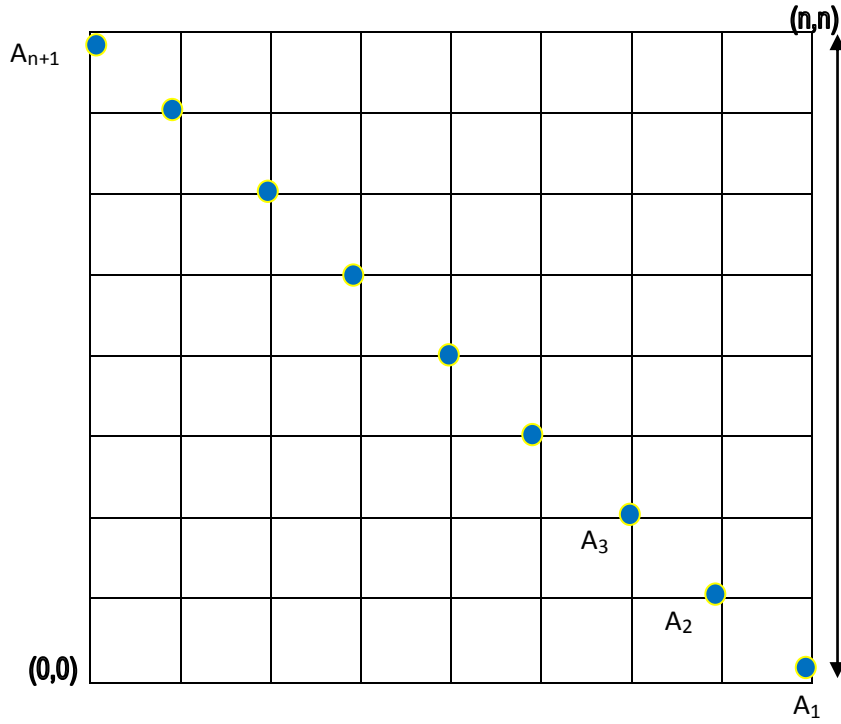
$A_{k/2}$ noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-(k/2-1)} \cdot \binom{k}{(k/2-1)}$ farklı yol vardır.

$A_{k/2+1}$ noktasına uğrayarak $\binom{2n-k}{n-(k/2)} \cdot \binom{k}{k/2}$ farklı yol vardır.

$A_{k/2}$ noktasına kadar olanların simetrikleri olduğundan 2 ile çarpıp, $A_{k/2+1}$ noktasından geçenleri eklemeliyiz.

$$\binom{2n-k}{n-k/2} \binom{k}{k/2} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{k/2-1} \binom{2n-k}{n-i} \binom{k}{i} = \binom{2n}{n} \quad ; 1 < k < n, k \text{ çift sayı} \quad (3)$$

Özel olarak $k = n$ ve n herhangi pozitif bir doğal sayı olduğu durumu inceleyelim.



A_1 noktasına uğrayarak $\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{0}$ farklı yol vardır.

A_2 noktasına uğrayarak $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{1}$ farklı yol vardır.

A_3 noktasına uğrayarak $\binom{n}{3} \cdot \binom{n}{3}$ farklı yol vardır

.....

A_n noktasına uğrayarak $\binom{n}{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}$ farklı yol vardır.

A_{n+1} noktasına uğrayarak $\binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n}$ farklı yol vardır

Toplam sembolü kullanarak bu ifadeleri toplayalım:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad , n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

ÖZDEŞLİK II: $\binom{n^2}{2} - 2n \cdot \binom{n}{2} = \frac{(n^2 - n)^2}{2}$

n	●							
.								
.								
.								
4					●			
3								
2								
1								
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	.	.	.	A _n

Şekildeki $n \times n$ boyutlu satranç tahtasına iki özdeş taş aynı satır veya sütunda olmayacak şekilde kaç değişik şekilde yerleştirilir? Problemini iki farklı biçimde sayarak çözelim.

- 1) İki taşın bulunabileceği bütün durumlardan taşların aynı satır ve sütuna geldiği durumlar çıkarılır. Toplam n^2 durumdan iki seçim $\binom{n^2}{2}$ değişik biçimde yapılır. İki taş, herhangi bir satırda $\binom{n}{2}$ şekilde bulunabilir. n tane satır olduğundan $n \cdot \binom{n}{2}$ durum vardır. Aynısı hem satır hem de sütun için geçerlidir. Dolayısıyla $\binom{n^2}{2} - 2n \cdot \binom{n}{2}$ durum elde edilir.
- 2) İki taşın aynı satır veya sütunda olmadığı durumları sayalım. İlk taşı (A_1, n) konumuna Şekil-1 deki gibi yerleştirelim. İkinci taşı yerleştirebileceğimiz $(n - 1)^2$ yer vardır. Benzer şekilde ilk taşı n satırındaki diğer yerlere de yerleştirebiliriz. O halde $n(n - 1)(n - 1)$ kadar durum vardır. İlk taşı $(A_1, n - 1)$ konumuna Şekil-2 deki gibi yerleştirilirse ikinci taş sarı ile boyalı bölgelere gelebilir fakat bu kombinasyonlar daha önce sayıldığı için tekrar sayılmamalıdır. Böylece ikinci taş $(n - 1)(n - 2)$ değişik şekilde yerleştirilebilir. İkinci satırın her bir karesine konulan birinci taş için durumların sayısı eşit olduğundan toplam $n(n - 1)(n - 2)$ değişik şekilde yerleştirilebilir.

Benzer şekilde ilk taşı sırasıyla üçüncü, dördüncü ve n inci satırlara yerleştirerek aynı prosedürü sürdürürsek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$n(n-1)(n-1) + n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-3) + \dots + n(n-1)(n-n)$$

$$= n(n-1)[(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + (n-n)]$$

$$= n(n-1) \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= n(n-1) \cdot \frac{n^2-n}{2}$$

$$= \frac{n(n-1) \cdot n(n-1)}{2}$$

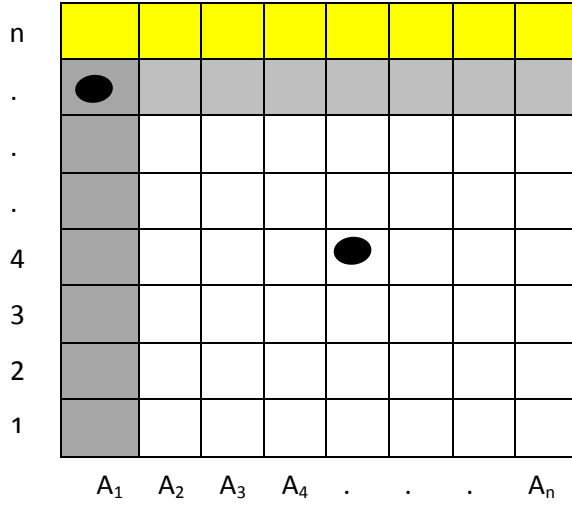
$$= \frac{(n^2-n)^2}{2}$$

1) ve 2) de bulunan sonuçlar eşit olacağından ;

$$\binom{n^2}{2} - 2n \cdot \binom{n}{2} = \frac{(n^2-n)^2}{2} \text{ dir.}$$

n	●							
.								
.								
.								
4				●				
3								
2								
1								
	A_1	A_2	A_3	A_4	.	.	.	A_n

Şekil 1

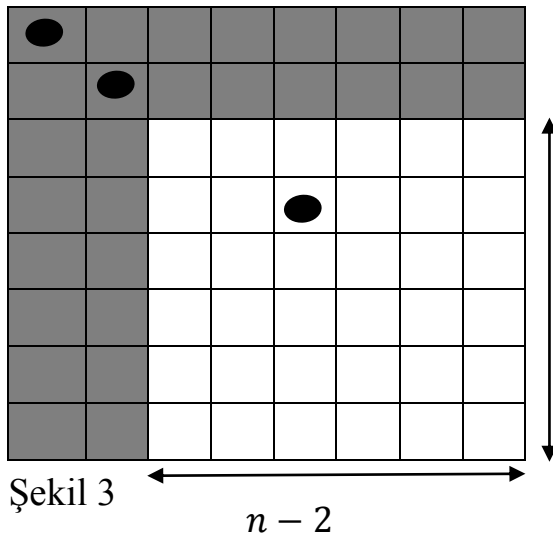


Şekil 2

PROBLEM:

$n \times n$ boyutunda bir satranç tahtasına k özdeş taş, herhangi iki taş aynı satır veya sütuna gelmeyecek şekilde kaç farklı şekilde yerleştirilir?

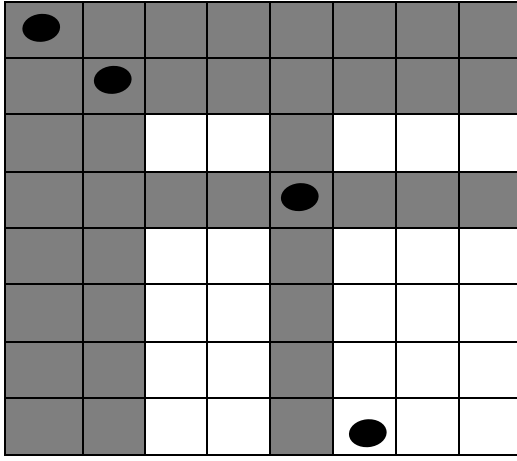
Problemi $k = 2$ için çözmüştük. Bulduğumuz bu sonucu kullanarak, $k = 3$ taş için problemi çözmeye çalışalım. İlk iki taşı aynı satır ve sütuna gelmeyecek şekilde Şekil-3 de olduğu gibi yerleştirelim ve 3. taşı bu taşların bulunduğu satır ve sütunların dışında bir bölgeye koyalım.



$k = 2$ ye karşılık gelen sayma fonksiyonunu $F_{2(n)}$ ile gösterelim. $F_{2(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{2}$

Üçüncü taş için $(n - 2)^2$ farklı durum vardır. Şimdi $(n - 2)^2 \cdot F_2(n)$ çarpımını düşünelim. Üç taşın aynı satır ve sütunda olmadığı durumların sayısıdır fakat bunların içinde birden fazla saydığımız aynı üçlü kombinasyonlar vardır. Taşları sırasıyla A, B ve C diye adlandıralım. Birbiriyle aynı satır ve sütunda olmayan ilk iki taş A ve B üçüncü yerleştirdiğimiz C olabilir, İlk ikisi A ve C üçüncüsü B, ve son olarak ilk ikisi B ve C üçüncüsü A olabilir. Kısaca $\binom{3}{2} = 3$ olduğundan yerleştirdiğimiz üç taşı üçer kez saymış olduğumuzdan $(n - 2)^2 \cdot F_2(n)$ çarpımını üçe bölmeliyiz.

$$F_3(n) = \frac{1}{3} \cdot (n - 2)^2 \cdot F_2(n)$$



Şekil-4

$F_3(n)$ den faydalanarak $F_4(n)$ sayma fonksiyonunu bulmak için 4. taşı koymak için $(n - 3)^2$ farklı seçeneğimiz vardır. Benzer şekilde $(n - 3)^2 \cdot F_3(n)$ çarpımını $\binom{4}{3} = 4$ sayısına bölerek $F_4(n)$ sayma fonksiyonunu bulabiliriz.

$$F_{4(n)} = \frac{1}{4} \cdot (n - 3)^2 \cdot F_{3(n)}$$

Benzer mantıkla bu prosedürü sürdürerek k taş için $F_{k(n)}$ fonksiyonunu $F_{k-1(n)}$ türünden elde edebiliriz.

$$F_{k(n)} = \frac{1}{k} \cdot (n - k + 1)^2 \cdot F_{k-1(n)}$$

Bulduğumuz bu eşitliklerde $n \geq k$ olmalıdır. $k > n$ ise, $F_{k(n)} = 0$ dır. Çünkü bu durumda $n \times n$ boyutunda bir satranç tahtasına k taş aynı satır veya sütuna gelmeyecek şekilde yerleştirilemez. Yukarıda bulduğumuz sonuçları alt alta yazalım.

$$F_{2(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{2} \text{ olmak üzere,}$$

$$F_{3(n)} = \frac{1}{3} \cdot (n - 2)^2 \cdot F_{2(n)}$$

$$F_{4(n)} = \frac{1}{4} \cdot (n - 3)^2 \cdot F_{3(n)}$$

.

$$F_{k(n)} = \frac{1}{k} \cdot (n - k + 1)^2 \cdot F_{k-1(n)}$$

Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa çarpalım:

$$F_{k(n)} = \frac{2}{k!} \cdot (n - 2)^2 \cdot (n - 3)^2 \dots \cdot (n - k + 1)^2 \cdot F_{k(n)}$$

$$F_{k(n)} = \frac{2}{k!} \cdot (n - 2)^2 \cdot (n - 3)^2 \dots \cdot (n - k + 1)^2 \cdot \frac{(n^2 - n)^2}{2}$$

$$F_{k(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{k!} \cdot (n - 2)^2 \cdot (n - 3)^2 \dots \cdot (n - k + 1)^2$$

En son bulduğumuz bu eşitliği çarpım sembolü ile tekrar yazalım:

$n \geq k = 2$ olmak üzere,

$$F_{2(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{2}$$

$n \geq k \geq 3$ olmak üzere,

$$F_{k(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{k!} \prod_{i=2}^{k-1} (n - i)^2$$

SONUÇ VE TARTIŞMA:

İki farklı biçimde sayma metodu ile aşağıdaki özdeşlikler elde edilmiştir:

$$2\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n} \quad , n > 0 \text{ ve } n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \binom{2n-k}{n-i} \binom{k}{i} = \binom{2n}{n} \quad ; 1 \leq k < n \text{ ve } k \text{ tek tam sayı ,}$$

$$\binom{2n-k}{n-k/2} \binom{k}{k/2} + 2. \sum_{i=0}^{k/2-1} \binom{2n-k}{n-i} \binom{k}{i} = \binom{2n}{n} \quad ; 1 < k < n , k \text{ çift tam sayı}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n^2}{2} - 2n. \binom{n}{2} = \frac{(n^2-n)^2}{2} \quad n \geq 2 \text{ ve } n \in \mathbb{N}$$

SONUÇ – I: $n \times n$ boyutunda bir satranç tahtasına k özdeş taş, herhangi iki taş aynı satır veya sütuna gelmeyecek şekilde kaç farklı şekilde yerleştirilir? Problemine karşılık gelen sayma fonksiyonu $F_{k(n)}$ olmak üzere;

$$F_{2(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{2}$$

$n \geq k \geq 3$ ise,

$$F_{k(n)} = \frac{(n^2 - n)^2}{k!} \prod_{i=2}^{k-1} (n - i)^2$$

MIT’de Matematik Profesörü olan Richard P. Stanley’nin Enumerative Combinatorics

kitabının I. Bölümünde iki farklı biçimde sayarak kanıtlanacak kolaydan zora bazı alıştırmalar bulunmaktadır .Bunlardan bazıları şunlardır:

$$4^n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

$$\sum_{i+j+k=n} \binom{i+j}{i} \binom{j+k}{j} \binom{k+i}{k} = \sum_{r=0}^n \binom{2r}{r}$$

Bunlara benzer özdeşlikler değişik sayma yöntemleri kullanarak ispatlanabilir. Sayma, basit ilkelerle yola çıkarak ilginç sonuçların elde edildiği matematiğin eğlenceli bir dalıdır.

KAYNAKLAR:

Enumerative Combinatorics, Volume1 <<http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/ec1.pdf>> ,son erişim tarihi 16/01/2012

Nesin,A., (2009), Matematiğe Giriş 3- Sayma, Nesin Matematik Köyü, İstanbul.

Double Counting <[http://en.wikipedia.org/wiki/Double_counting_\(proof_technique\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Double_counting_(proof_technique))> , son erişim tarihi 16/01/2012.

Combinatorics/Subsets of a set-The Binomial Coefficient.

<http://en.wikibooks.org/wiki/Combinatorics/Subsets_of_a_set-The_Binomial_Coefficient> , son erişim tarihi 16/01/2012.

İlköğretim

Proje

Örnekleri

- ❖ Tübitak Bu Benim Eserim Projeler Örnekleri
- ❖ E-Twinning Proje Örneği
- ❖ Diğer Proje Örnekleri

PROJE RAPORU

PROJENİN ADI 123D SAYMA METODU

**M. İNAMLIK
M.GÜNEŞ**

**DANIŞMAN :
EŞREF GÜREL
PAMUKKALE BİLİM VE SANAT MERKEZİ
MATEMATİK ÖĞRETMENİ**

DENİZLİ – 2014
**(Bu Proje Bu Benim Eserim Yarışmasında Ankarada Finale Katılıp
Birinciler kategorisinde ödül almıştır.)**

PROJENİN AMACI

Doğrusal olarak sıralanmış ardışık renk gruplarını belirli bir kurala göre yer değiştirmek ve hareket sayısını hesaplamak için bir metot geliştirmek.

PROJE ÖZETİ

Doğrusal olarak sıralanmış ardışık renk gruplarını belirli bir kurala göre yer değiştirmek ve bu yer değiştirme için hamle sayısını hesaplamak için bir metot geliştirmek problemimizin temelini oluşturmaktadır.

Aralarında bir boşluk bulunan “Zıplayan kurbağalar” oyunu 3 yeşil ve 3 kahverengi kurbağanın yer değiştirmesi stratejisine dayanan ilginç bir strateji oyunudur. Doğru hamle ile kaç toplam kaç hamlede tamamlandığını saydık. Çalışmamızın bundan sonraki aşamasında kurbağa yerine renkli bloklar kullanarak renkli blok sayısı değiştiğinde, aralarındaki boşluk sayısı değiştiğinde ve tek bir noktada kesişen eksenlerde yer değiştirme ve hamle sayısının nasıl değiştiğini genellemeye çalıştık.

Bu aşamada saymamızı genellemek için bazı kurallar oluşturmamız gerekti

- 1.Renkler birbirinin üzerine gelemmez.
- 2.Renkler farklı renkte olsa bile eğer önünde boşluk varsa birbirinin üzerinden atlayabilir. Bunun dışındaki bütün hamlelerde tek bir atlama yapılabilir.

Araştırma yaptığımız kaynaklarda farklı durumlar için uygulamalar yapıldığını gördük ancak eşit olmayan renkler, birden fazla boşluk bulunması ve boşluklarda kesişen birden fazla eksen için hiçbir çalışmanın yapılmadığını fark ettik ve bu konu ile ilgili çalışmalar yaparak genellemeler yaptık.

KULLANILAN YÖNTEM:

1. Örnek olay
2. Deney
3. Problem çözme

PROJE BÜTÇESİ:

Renkli blok:40 TL

Tahta panel:25 TL

3 parça tahta düzlem:40 TL

Afiş :100TL

olmak üzere toplam 205 TL harcama yapıldı.

PROJE ÇALIŞMASININ TAKVİMİ:

1-30 Ekim: Problemin tespiti ve kaynak taraması.

1-30 Kasım: Problemlerin çözümü ve sayı modeli üzerinde araştırma yapılması.

Kaynaklardan elde edilen çözümlerin değerlendirilmesi.

1-30 Aralık: Sayı şekil modelinin kurulması ve genellemelerin yapılması.

1-20 Ocak: Sayı şekil modelinin farklı durumlara uyarlanması ve sonuçların yazılması

İÇİNDEKİLER

Özet	2
İçindekiler	3

Birinci Bölüm

GİRİŞ

1. Temel Tanım ve özellikler	4
------------------------------------	---

İkinci Bölüm

YÖNTEM

2.1 Problem	6
2.2 Problem.....	7
2.3 Problem	8
2.4 Problem	9
2.5 Problem	10

Üçüncü Bölüm

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

3.1 Sonuç	11
3.2 Sonuç.....	11
Teşekkür.....	12
Kaynaklar	13

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde projemizle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilecektir.

Tanım 1.1: İçerdikleri değişkenlere verilecek bütün gerçel sayı değerleri için doğru olan denklemlere özdeşlik denir.

Örneğin iki kare farkı özdeşliği

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

veya tam kare özdeşliğini

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Buna örnek verebiliriz.

İKİNCİ BÖLÜM

YÖNTEM

Problem 2.1: Aralarında bir boşluk bulunan 1 mavi ve 1 kırmızı bloğun yer değiştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

İzlenecek işlem basamakları şunlardır.

1.		K	M	
2.			M	K
3.		M		K

3 hamlede işlem tamamlanır. Yani,

$$H = 1(1 + 2)$$

$$H = 1.3 = 3 \text{ hamle}$$

Problem 2.2: Aralarında bir boşluk bulunan 2 mavi ve 2 kırmızı bloğun yer değiştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

İzlenecek işlem basamakları şunlardır.

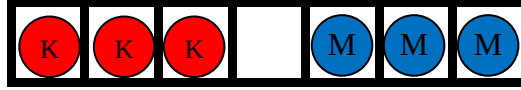
1.		K		K	M	M		5.		K	M	K	M	
2.		K	M	K		M		6.		K	M	K		M
3.		K	M	K	M			7.		K		K	M	M
4.		K	M		M	K		8.		K	K		M	M

8 hamlede işlem tamamlanır. Yani

$$H = 2. (2 + 2)$$

$$H = 2.4 = 8 \text{ hamle}$$

Problem 2.3: Aralarında bir boşluk bulunan 1 mavi ve 1 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

İzlenecek işlem basamakları şunlardır.

1.		9.	
2.		10.	
3.		11.	
4.		12.	
5.		13.	
6.		14.	
7.		15.	
8.			

15 hamlede işlem tamamlanır.

$$H = 3. (3 + 2)$$

$$H = 3.5 = 15 \text{ hamle.}$$

Problem 2.4: Aralarında iki boşluk bulunan 1 mavi ve 1 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

İzlenecek işlem basamakları şunlardır.

1.		4.	
2.		5.	
3.			

5 hamlede işlem tamamlanır.

$$H = 1. (1 + 2.2)$$

$$H = 1.5 = 5 \text{ hamle.}$$

Problem 2.5: Aralarında iki boşluk bulunan 2 mavi ve 2 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

İzlenecek işlem basamakları şunlardır.

1.		K		K		M	M		7.			M	K	M	K		
2.		K		K	M			M	8.		M		K	M	K		
3.		K			M	K		M	9.		M	M	K		K		
4.			K		M	K		M	10.		M	M	K			K	
5.				K	M	K		M	11.		M	M		K		K	
6.			M	K		K		M	12.		M	M			K	K	

15 hamlede işlem tamamlanır.

$$H = 2. (2 + 2.2)$$

$$H = 2.6 = 12 \text{ hamle.}$$

Problem 2.6: Aralarında iki boşluk bulunan 3 mavi ve 3 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

$$H = 3. (3 + 2.2)$$

$$H = 3.7 = 21 \text{ Hamle yapılır.}$$

Problem 2.7: Aralarında iki boşluk bulunan 4 mavi ve 4 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?

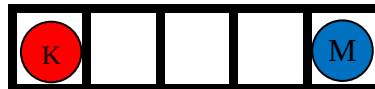


ÇÖZÜM:

$$H = 4. (4 + 2.2)$$

$$H = 4.8 = 32 \text{ Hamle yapılır.}$$

Problem 2.8: Aralarında üç boşluk bulunan 1 mavi ve 1 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

İzlenecek işlem basamakları şunlardır.

1.		K			M			5.		M		K			
2.		K		M				6.		M			K		
3.			K	M				7.		M				K	
4.		M	K												

7 hamlede işlem tamamlanır.

$$H = 1. (1 + 2.3)$$

$$H = 1.7 = 7 \text{ hamle.}$$

Problem 2.9: Aralarında iki boşluk bulunan 2 mavi ve 2 kırmızı bloğun yer değiştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?

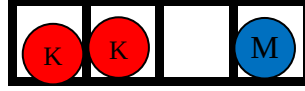
**ÇÖZÜM:**

16 hamlede işlem tamamlanır.

$$H = 2. (2 + 2.3)$$

$$H = 2.8 = 16 \text{ hamle.}$$

Problem 2.10: Aralarında bir boşluk bulunan 1 mavi ve 2 kırmızı bloğun yer değiştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?

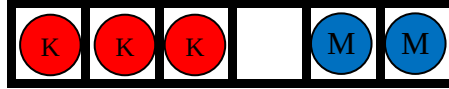
**ÇÖZÜM:**

5 hamlede işlem tamamlanır. Yani,

$$H = 2.1 + 2 + 1$$

$$H = 2 + 3 = 5 \text{ hamle}$$

Problem 2.11: Aralarında bir boşluk bulunan 2 mavi ve 3 kırmızı bloğun yer değiştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?

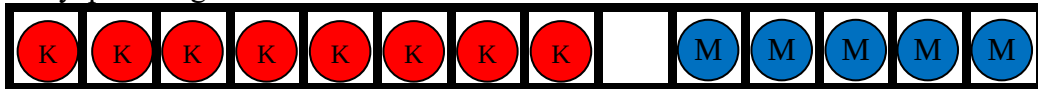
**ÇÖZÜM:**

5 hamlede işlem tamamlanır. Yani,

$$H = 2.3 + 2 + 3$$

$$H = 6 + 5 = 11 \text{ hamle yapılmalıdır.}$$

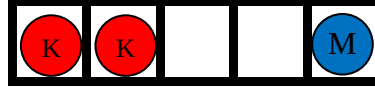
Problem 2.12: Aralarında bir boşluk bulunan 5 mavi ve 8 kırmızı bloğun yer değiştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?

**ÇÖZÜM:**

$$H = 5.8 + 5 + 8$$

$$H = 40 + 13 = 53 \text{ hamle yapılmalıdır.}$$

Problem 2.13 Aralarında iki boşluk bulunan 1 mavi ve 2 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



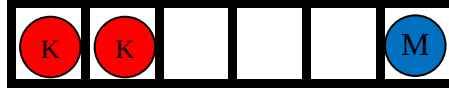
ÇÖZÜM:

5 hamlede işlem tamamlanır. Yani,

$$H = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (2 + 1)$$

$$H = 2 + 6 = 8 \text{ hamle yapılmalıdır.}$$

Problem 2.14: Aralarında üç boşluk bulunan 1 mavi ve 2 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

5 hamlede işlem tamamlanır. Yani,

$$H = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (2 + 1)$$

$$H = 2 + 9 = 11 \text{ hamle yapılmalıdır.}$$

Problem 2.15: Aralarında 4 boşluk bulunan 3 mavi ve 6 kırmızı bloğun yer değıştirmesi için kaç hamle yapılması gerekir?



ÇÖZÜM:

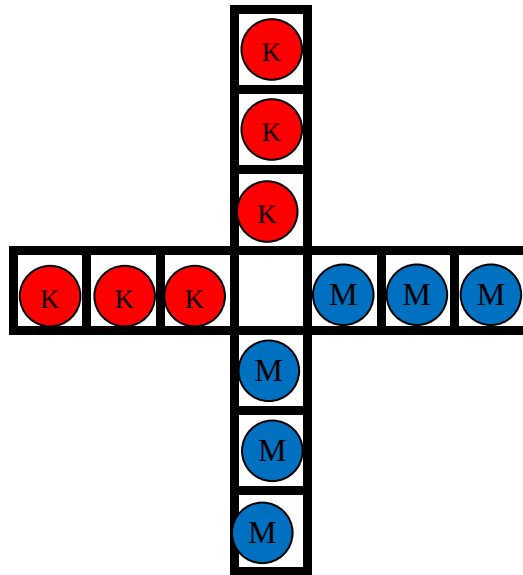
$$H = 3 \cdot 6 + 4 \cdot (3 + 6)$$

$$H = 18 + 4 \cdot 9$$

$$H = 18 + 36 = 54$$

hamle yapılmalıdır.

Problem 2.16: Bir boşlukta kesişen aralarında bir boşluk bulunan 3 mavi ve 3 kırmızı bloğun bulunduğu iki eksenle yer değıştirme kaç hamlede tamamlanır.



$$H = 2.3.5 = 30 \text{ hamle.}$$

A crossword puzzle grid with 10 across and 1 down highlighted in blue. The grid contains 15 squares. The 10 across word is 'KIM' and the 1 down word is 'MOM'. The intersection square at (5,5) contains the letter 'M'.

$$H = 3.4.6 = 72 \text{ hamle.}$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışmamızda hamle sayısını H ile ve eksen sayısını D ile gösterirsek.

Sonuç 3.1: Arasında bir boşluk bulunan n tane kırmızı ve n tane mavi bloğun yer değiştirme hareketini tamamlamak için;

$$H=n.(n+2)$$

hamle yapılır.

Sonuç 3.2: Arasında bir boşluk bulunan n tane kırmızı ve m tane mavi blok yer değiştirme hareketini tamamlamak için;

$$H=m.n+m+n$$

hamle yapılır.

Sonuç 3.3: Arasında p boşluk bulunan n tane kırmızı ve n tane mavi blok yer değiştirme hareketini tamamlamak için;

$$H=n.(n+2p)$$

hamle yapılır.

Sonuç 3.4: Arasında p boşluk bulunan n tane yeşil ve m tane mavi blok yer değiştirme hareketini tamamlamak için;

$$H=m.n+p.(m+n)$$

hamle yapılır.

Sonuç 3.5: Arasında p boşluk bulunan n tane yeşil ve m tane mavi blok D tane eksen üzerinde tek bir boşlukta kesiştiğinde yer değiştirme hareketini tamamlamak için;

$$H=D.(m.n+p.(m+n))$$

hamle yapılır.

.

KAYNAKLAR:

[1] <http://akidsheart.com/math/mathgames/leapfrog.htm>

[2] beingamathematician.wikispaces.com/file/view/Frogs+Investigation

[3] http://britton.disted.camosun.bc.ca/frog_puzzle.htm

[4] <http://nrich.maths.org/6282>

[5] <http://www.minioyun.com/oyunlar/ziplayan-kurbagalar.asp>

ASAL EKLERSEM KARE OLUR MU?

HAZIRLAYANLAR

M. Kaş

Y. E. Nacar

DANIŞMAN:

ZEHRA ÇİÇEK AKKUZU

Kayseri Çetin Şen Bilim ve Sanat Merkezi

(Bu Proje Bu Benim Eserim Yarışmasında Ankara’da Finale Katılıp

Birinciler kategorisinde ödül almıştır.)

ASAL EKLERSEM KARE OLUR MU?

Kurum: Kayseri Çetin Şen Bilim ve Sanat Merkezi

Projeyi Hazırlayanlar: Murat Kaş - Yusuf Erdem Nacar

Proje Danışmanı: Zehra Çiçek Akkuzu

Projenin Amacı: $n \in \mathbb{N}$, p bir asal sayı olmak üzere; $n.(n+p)$ çarpımının tam kare olup olmayacağını eğer mümkünse hangi durumlarda olabileceğini bulmak.

Yöntem: Çalışmaya küçük p asal sayılarından başlayarak, her p için n yerine sistematik şekilde 1 den başlayarak doğal sayıları yazıp $n.(n+p)$ sayısının kare sayı olduğu durumları bakarak bir ilişki arayarak başladık.

$p=2$ için

$n=0 \quad p=2 \rightarrow n.(n+p)=0.(0+2) = 0$ durumu kare sayı oldu.

$p=3$ için

$n=1 \quad p=3 \rightarrow 1.(1+3) = 4$ durumu kare sayı oldu.

$p=5$ için;

$n=1 \quad p=5 \rightarrow 1.(1+5) = 6$

$n=2 \quad p=5 \rightarrow 2.(2+5) = 14$

$n=3 \quad p=5 \rightarrow 3.(3+5) = 24$

$n=4 \quad p=5 \rightarrow 4.(4+5) = 36$

$p=7$ için;

$n=1 \quad p=7 \rightarrow 1.(1+7) = 8$

$n=2 \quad p=7 \rightarrow 2.(2+7) = 18$

$n=3 \quad p=7 \rightarrow 3.(3+7) = 30$

$n=4 \quad p=7 \rightarrow 4.(4+7) = 44$

$n=5 \quad p=7 \rightarrow 5.(5+7) = 60$

$n=6 \quad p=7 \rightarrow 6.(6+7) = 78$

$n=8 \quad p=7 \rightarrow 8.(8+7) = 120$

$n=9 \quad p=7 \rightarrow 9.(9+7) = 144$

Buradan sonraki denemelerimizde fark ettik ki $n.(n+p)$ çarpımında n yerine herhangi bir k doğal sayısının karesi ve p yerine yine aynı k sayısının iki katının bir fazlasını $(2k+1)$ yazdığımızda sonuç kare sayı oluyor. Buradan yola çıkarak bu şekilde seçilen her p ve n sayıları için doğru olup olmadığını deneyerek aşağıdaki tabloyu oluşturduk.

k	$n = k^2$	$p = 2k+1$	$n.(n+p)$
1	1	3	4
2	4	5	36
3	9	7	144
4	16	9	400
5	25	11	900
6	36	13	1764
7	49	15	3136
8	64	17	5184
...	...	...	...

O halde;

$$n.(n+p) = k^2.(k^2+2k+1) = k^2.(k+1)^2 = [\sqrt{n} . (\sqrt{n} + 1)]^2 \text{ olur.}$$

Buradan n ile p arasındaki bağıntıyı bulalım.

$$n = k^2, \quad p = 2k+1 \text{ olduğundan}$$

$$k = \frac{p-1}{2} \text{ olur. } n = k^2 = \left[\frac{p-1}{2} \right]^2 \text{ olur. Yani her } p \text{ asal sayısı için } n = \left[\frac{p-1}{2} \right]^2 \text{ olacak şekilde}$$

seçilirse $n.(n+p)$ çarpımı kare sayı olur. Ancak bu çözümde p herhangi bir tek sayı seçilebiliyor, asal olması gerekmiyor. Bu yüzden sorumuzu p asalı için değil p tek sayısı için çözmüş olduk. Ancak bu çözümün tek çözüm olup olmadığını bilmiyorduk. Daha büyük n ler için de farklı çözümler olabilirdi. Bu yüzden cebirsel çözüm yolları aradık.

Önce n ile p 'nin aralarında asal olup olmadığını inceledik.

n , p 'nin katı olsun.

$n = px$ olur. Bunu denklemde n 'nin yerine koyalım:

$$n.(n+p) = px.(px+p) \quad \text{parantezin içindikileri } p \text{ parantezine alalım}$$

$$= px.p(x+1)$$

$$= p^2.x.(x+1)$$

Bu durumda ardışık iki sayı (n ve $(n+1)$)'nin çarpımı kare sayı oluşturamayacağından dolayı, n p 'nin katı iken $n.(n+p)$ kare sayı olamaz. O halde n ile p aralarında asaldır. n ile p aralarında asal olduğu için n ile $(n+p)$ de aralarında asal olur. Ortak çarpanları olmadığı için ve çarpımlarının kare sayı olmasını istediğimiz için n ve $(n+p)$ 'nin ayrı ayrı kare sayılar olmaları gerekmektedir.

$$n = k^2, (n+p) = m^2 \text{ olsun.}$$

$$(n+p) - n = m^2 - k^2 = p \text{ dir.}$$

İki kare farkı formülünden $m^2 - k^2 = (m+k).(m-k) = p$ olur. p bir asal sayı olduğunda $(m+k) = p$, $(m-k) = 1$ olur. Ancak p tek sayı olduğunda bunu söyleyemeyiz.

p asal olduğunda,

$$\begin{array}{r} m+k = p \\ +m-k = 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2m = p + 1$$

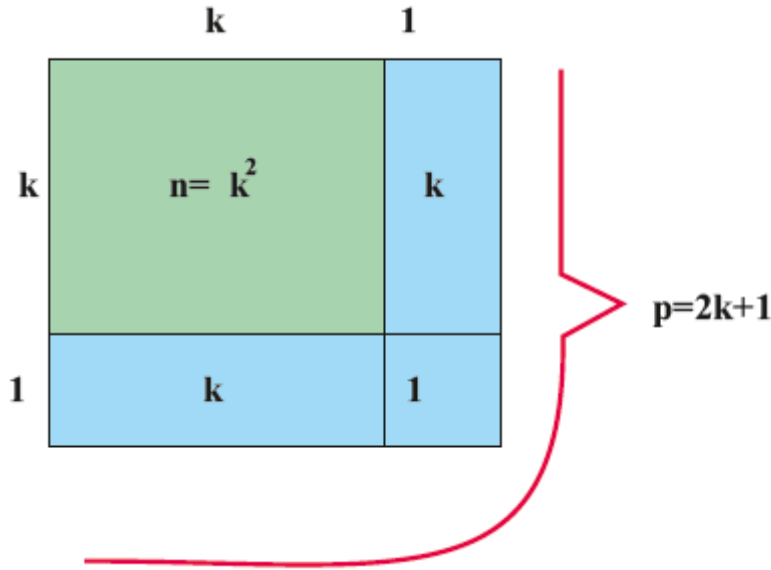
$$m = \frac{p+1}{2}$$

$$m^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 = n+p \text{ olur.}$$

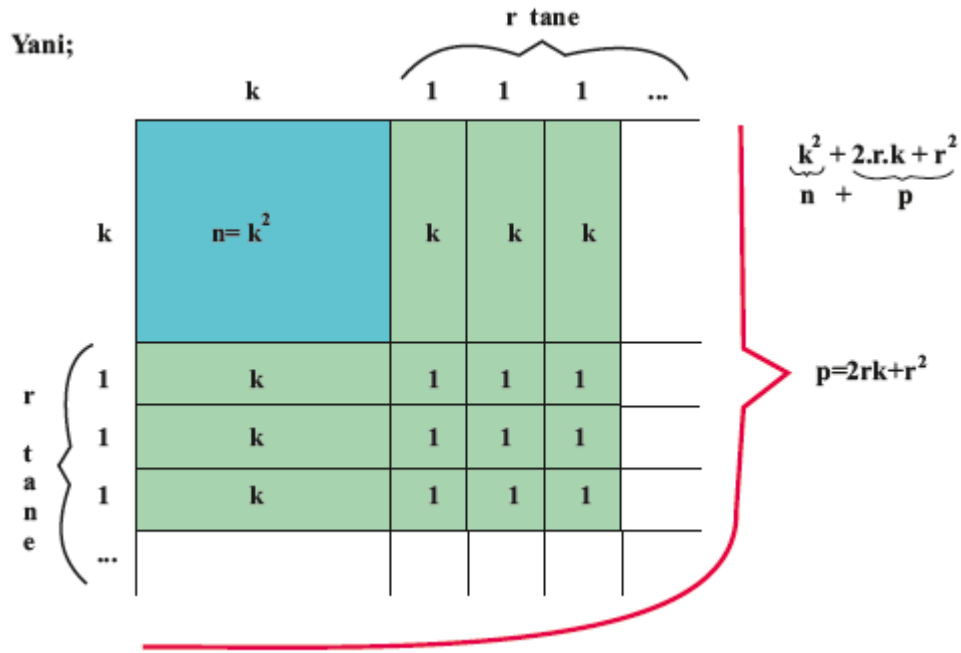
$$n = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - p = \frac{p^2+2p+1}{4} - p = \frac{p^2-2p+1}{4} = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

Sonuçta aynı sonucu bulduk ancak bu çözüm p asalı için tek çözümdür.

Aynı soruyu geometrik olarak çözdük. n ve $n+p$ nin asal olduklarını bildiğimiz için n kare sayıdır. n 'yi kare olarak alıp ona ne eklersek yeniden bir kare sayı elde ederiz diye düşündük.



Burada geometrik olarak k^2 'ye $2k+1$ eklediğimizde kare sayı olduğunu göstermiş olduk. Ancak karenin kenarlarına her 1 birim eklediğimizde tekrar kare sayı olur.



Ancak $2rk + r^2$ asal sayı olamayacağından ilk bulduğumuz çözüm tektir.

Sonuç:

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için;

1. $n.(n+p)$ çarpımı; her p asal sayısı için ancak $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ şeklinde ise, kare sayı olur.
2. Bu şekilde seçilen n ve p için; $n.(n+p) = [\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} + 1)]^2$ olur.

KARE SAYILARI SEKİZE BÖLDÜK

HAZIRLAYANLAR

Z. A. Doğan

DANIŞMAN:

ZEHRA ÇİÇEK AKKUZU

Kayseri Çetin Şen Bilim ve Sanat Merkezi

(Bu Proje Bu Benim Eserim Yarışmasında Ankara’da Finale Katılıp

Birinciler kategorisinde ödül almıştır.)

KARE SAYILARI SEKİZE BÖLDÜK

Kurum: Kayseri Çetin Şen Bilim ve Sanat Merkezi

Projeyi Hazırlayanlar: Z. A. Doğan

Proje Danışmanı: Zehra Çiçek Akkuzu

Projenin Amacı:

Bu çalışmada kare sayıları 8 ile bölümünden kalanlarına göre üçgen sayılar cinsinden yazmayı amaçladık.

Yöntem:

Kare sayıları incelerken bazı kare sayıların 8 ile bölümünden 1 kalanını verdiğini gördük. Bunların hepsi tek kare sayılar idi.

Tek olan sayıları $8.n+1$ şeklinde ifade etmeye çalışırken;

(K: Kare, Ü: Üçgen Sayı)

1	= $8.0+1$	$K_1 = 8.Ü_0+1$
9	= $8.1+1$	$K_3 = 8.Ü_1+1$
25	= $8.3+1$	$K_5 = 8.Ü_2+1$
49	= $8.6+1$	$K_7 = 8.Ü_3+1$
81	= $8.10+1$	$K_9 = 8.Ü_4+1$
121	= $8.15+1$	$K_{11} = 8.Ü_5+1$
169	= $8.21+1$	$K_{13} = 8.Ü_6+1$
225	= $8.28+1$	$K_{15} = 8.Ü_7+1$
289	= $8.36+1$	$K_{17} = 8.Ü_8+1$

Şeklinde yazıldığını ve 0,1,3,6,10,15,21,28,36... sayılarının üçgen sayı olduğunu gördük.

Buradan tek kare sayıları, üçgen sayı cinsinden ifade edebileceğimize düşündük ve karşımıza;

- $K_n = 8.Ü_{(n-1)/2} + 1$

eşitliğinin çıktığını gördük.

Bundan sonra diğer kare sayıları incelemeye başladık.

Çift olan bu kare sayıların 8 e bölümünden kalanın 0 veya 4 olduğunu gördük.

8 e bölümünden kalanı 4 olan sayıları

8.n+4 şeklinde yazmaya başladığımızda aşağıdaki tablo ile karşılaştık;

(K: Kare, Ü: Üçgen Sayı)

4	=8.0+4	= 8.(4.0)+4=32.0+4	$K_2 = 32\ddot{U}_0+4$
36	=8.4+4	= 8.(4.1)+4=32.1+4	$K_6 = 32\ddot{U}_1+4$
100	=8.12+4	= 8.(4.3)+4=32.3+4	$K_{10} = 32\ddot{U}_2+4$
196	=8.24+4	= 8.(4.6)+4=32.6+4	$K_{14} = 32\ddot{U}_3+4$
324	= 8.40+4	=8.(4.10)+4=32.10+4	$K_{18} = 32\ddot{U}_4+4$
484	= 8.60+4	=8.(4.15)+4=32.15+4	$K_{22} = 32\ddot{U}_5+4$
676	= 8.84+4	=8.(4.21)+4=32.21+4	$K_{26} = 32\ddot{U}_6+4$
900	= 8.112+4	=8.(4.28)+4=32.28+4	$K_{30} = 32\ddot{U}_7+4$

Böylece 8 ile bölümünden 4 kalanını veren sayılarda, üçgen sayı cinsinden yazıldığını ve aşağıdaki eşitlikte verilen şekliyle bir formül elde edilebildiğini gördük.

$$K_n = 32.\ddot{U}_{(n-2)/4} + 4$$

8 ile bölümünden 0 kalanını veren sayıları

8.n+0 şeklinde yazmaya başladık. Bunları yazarken de aşağıdaki tablo bize fikir verdi.

(K: Kare, Ü: Üçgen Sayı)

16=8.2+0	= 8.(2.1)=16.1	$K_4 = 16.K_1=16(\ddot{U}_1+\ddot{U}_0)$
64=8.8+0	= 8.(2.4)=16.4	$K_8 = 16.K_2=16(\ddot{U}_2+\ddot{U}_1)$
144=8.18+0	= 8.(2.9)=16.9	$K_{12} = 16.K_3=16(\ddot{U}_3+\ddot{U}_2)$
256=8.32+0	= 8.(2.16)=16.16	$K_{16} = 16.K_4=16(\ddot{U}_4+\ddot{U}_3)$
400= 8.50+0	=8.(2.25)=16.25	$K_{20} = 16.K_5=16(\ddot{U}_5+\ddot{U}_4)$
576= 8.72+0	=8.(2.36)=16.36	$K_{24} = 16.K_6=16(\ddot{U}_6+\ddot{U}_5)$
784= 8.98+0	=8.(2.49)=16.49	$K_{28} = 16.K_7=16(\ddot{U}_7+\ddot{U}_6)$

Bu tabloya göre;

$$K_n = 16K_{(n/4)} + 4$$

Şeklinde bir kare sayıyı başka bir kare sayı cinsinden ifade ettik.

Daha sonra her kare sayının iki üçgen sayının toplamı şeklinde yazılabildiğini $K_n = \ddot{U}_n + \ddot{U}_{(n-1)}$ düşünerek $K_{n/4}$ ifadesini $\ddot{U}_{n/4} + \ddot{U}_{(n-4)/4}$ şeklinde yazdık ve sonuçta

$K_n = 16(\ddot{U}_{(n/4)} + \ddot{U}_{(n-4)/4})$ şeklinde bir eşitlik elde ettik.

Sonuçların Değerlendirilmesi

Yaptığımız çalışmanın sonunda bütün kare sayıların 8 ile bölümünden kalanlarına göre üçgen sayılar cinsinden yazılabildiğini gördük.

Yani bize verilecek herhangi bir n . kare sayıyı, üçgen sayılar cinsinden yazmak için öncelikle verilen kare sayının mod 8'e göre kaç olduğunu bilmemiz gerektiğinden sırasıyla kaçınıcı kare sayının mod 8'e göre hangi değeri aldığını gösteren aşağıdaki listeyi yazdık ve buradan bir formül elde ettik.

Buna göre herhangi bir K_n kare sayısı;

$$K_1 = 2^1 = 1 \equiv 1 \pmod{8} \quad K_5 = 2^5 = 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$K_2 = 2^2 = 1 \equiv 4 \pmod{8} \quad K_6 = 2^6 = 1 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$K_3 = 2^3 = 1 \equiv 1 \pmod{8} \quad K_7 = 2^7 = 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$K_4 = 2^4 = 1 \equiv 0 \pmod{8} \quad K_8 = 2^8 = 1 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$n \equiv 1 \text{ veya } 3 \pmod{4} \text{ ise,} \quad K_n = 8 \cdot \ddot{U}_{(n-1)/2} + 1$$

$$n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise,} \quad K_n = 32 \cdot \ddot{U}_{(n-2)/4} + 4$$

$$n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise,} \quad K_n = 16 \cdot (\ddot{U}_{n/4} + \ddot{U}_{(n-4)/4})$$

eşitlikleriyle ifade edilmektedir.

VAN YUSUF GÖKÇENAY BİLİM VE SANAT MERKEZİ

BU BENİM ESERİM ANKARA FİNAL SERGİSİ 2015

PROJENİN ADI:ÖRÜNTÜLERİ GENELLEME YÖNTEMLERİ

PEOJEYİ HAZIRLAYAN:A.AKIN

PROJE DANIŞMANI:Pınar ÇALIŞKAN

PROJENİN AMACI:Genel terim denklemi $1,2,3,...,n$. dereceden olan örüntülerin genel formülünü hesaplamada bir yöntem keşfettim ve bu yöntemin Ortaokul ve Lise matematik müfredatına eklenmesinin öğrencilere çok faydalı olacağını düşündüm.

Örüntüler konusu ilköğretimden beri sürekli karşımıza çıkan bir konudur.Matematik evreni anlamamıza yarayan bir araçtır ve hemen hemen her yerde karşımıza çıkan evrendeki olayların sıralamasını herkesin anlayabileceği bir dile çevirme yöntemi olan örüntüler konusunun iyi kavranılması önemlidir. Örüntü konusunda genel terimi ve genel toplamı bulma konusu Türkiyede öğrenim gören öğrenciler ve matematik öğretmenleri için yapılan araştırmaları incelendiğinde çözümünde örüntünün sayıları arasındaki ilişkileri bulmak için , Araştırmada öğrencilerin kullandıkları genelleme stratejileri; Parçalarısıayma veya modelleme, Yinelemeli veya Eklemeli , Fark ile çarpma , Orantı, Tahmin ve Kontrol stratejileridir. (Eğitim ve Bilim 2012,cilt37 sayı165)

Matematik öğretmenlerinin ve arkadaşlarımla örüntü çözme yöntemi üzerine yapılan araştırmalarımda da çoğunlukla ilişkileri tahminetme yöntemine başvurulduğu gözlemledim. Ve farkettimki kimse bu konuda çok iyiyim diyemiyor yani o soruyla karşılaşmadan önceki ruh hali,kafadinginliği,bir soruyu çözebilmemiz için gerekli olan açık zihin ortamını olması gerekiyor ki daha karışık ilişkili olan örüntülerin genel formülünü bulalım.Fakat süre sınırlaması olan önemli bir sınav ortamında bu her zaman sağlanamayabiliyor. Bu nedenle bu değişken artan örüntülerin hepsini genellemek istedim.Ayrıcaprojeminin gerekliliğini desteklemek amacıyla örüntü soruları anketi hazırladım ve uyguladım sonuçları eklerde inceleyebilirsiniz. Denklemi $1,2,3,...,n$. Dereceden olan örüntülerin genel formülünü hesaplamada bir yöntem keşfettim ve bu yöntemin Ortaokul ve Lise matematik müfredatına eklenmesinin öğrencilere çok faydalı olacağını düşündüm.

Yöntem:Örüntünün terimleri $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$ de örüntünün terimleri ve örüntünün terimleri arasındaki farkları

$y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_{n+1} - y_n$ ve $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ olmak üzere

örüntünün farklarını adım adım incelemekle başlıyor. Taki farklar kaçınıcı kez farkda sabitleniyorsa o adım örüntünün denkleminin kaçınıcı dereceden olduğunu belirleyecek ve ben örüntünün değerlerini (örüntünün (x,y) ikililerini denklemden yerine yazıp denklemini çözünce çıkan denklemlerle örüntünün genel formülüne ulaşacağım.

Örnek2: 3,9,19,33,.....kuralıyla verilen örüntünün 15. Adımı kaçtır?

3	9	19	33	
<u> </u>				
6	10	14		1.farklar
<u> </u>		<u> </u>		
4	4			2. Farklar

Farklar 2.sıradasabitlendi bu durumda denklemler 2.dereceden bir bilinmeyenli yani $ax^2+bx+c=y$ formundadır.

Şimdi (x,y)=(1,3),(2,9),(3,19),(4,33) ikililerini denklemden yerine yazarsak

$$a+b+c=3$$

$$4a+2b+c=9$$

$$9a+3b+c=19$$

$16a+4b+c=33$ denklemler sistemi çözülürse $a=2, b=0$ ve $c=1$ ve denklemden yerine yazılırsa örüntünün genel denklemleri

$2x^2+1$ bulunur ki buda örüntünün tüm terimlerini verir. Ve 15. Terim $2 \cdot 15 \cdot 15 + 1 = 451$ olur.

Sonuç: Bu bulgularımı genelleştirsem

$X = X_1, X_2, \dots, X_n$ örüntü terimlerinin sıra numarası

$y = y_1, y_2, \dots, y_n$ de örüntünün terimleri ve

$y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_{n+1} - y_n = f_n$ farkları diyelim

$f = f_1, f_2, \dots, f_n$ olmak üzere

Örüntünün farklarının sabitlendiği sıra numarasına göre f_n

f_1 ise örüntünün genel teriminin denklemi $a_0 + a_1 X = y_1$

f_2 ise $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = y_2$

.....

f_n ise genel teriminin denklemi $y_n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$ şeklinde genelleştirebiliriz.

KURUM: İZMİT BİLİM VE SANAT MERKEZİ
Projenin Adı: LANE ÇAZ PAL SAYILARI
Hazırlayanlar: Ç. KILIÇ – Z. KAZAKLI
Danışman: DUYGU ALYEŞİL KABAKÇI

Projenin Amacı: 0'dan farklı 3 rakamı kullanarak yazılan 3 basamaklı sayıların toplamı olan 4 basamaklı sayıları bulacak formül geliştirmek.

Giriş : Matematikle ilgili sorular çözerken aklımıza 0'dan farklı 3 rakamı kullanarak yazılan 3 basamaklı sayıların toplamı olan 4 basamaklı sayılar nasıl sayılardır? Bu sayıları bulacak bir kural bulabilir miyiz? Soruları aklımıza geldi. Bu nedenle literatür taraması yaptık ve araştırmaya başladık.

KULLANILAN RAKAMLAR FARKLIYSA :

Rakamları toplamı 6 olan sayılar için: Toplam :1332	Örneğin; 1-2-3
Rakamları toplamı 7 olan sayılar için: Toplam 1554	Örneğin;1-2-4
Rakamları toplamı 8 olan sayılar için : Toplam 1776	Örneğin;1-2-5, 1-3-4
Rakamları toplamı 9 olan sayılar için : Toplam 1998	Örneğin;1-2-6, 1-3-5 vb...
Rakamları toplamı 10 olan sayılar için : Toplam 2220	Örneğin;1-2-7,1-3-6 vb...
Rakamları toplamı 11 olan sayılar için : Toplam 2442	Örneğin;1-2-8... vb...
Rakamları toplamı 12 olan sayılar için : Toplam 2664	Örneğin;1-2-9... vb...
Rakamları toplamı 13 olan sayılar için : Toplam 2886	Örneğin;1-3-9... vb...
Rakamları toplamı 14 olan sayılar için : Toplam 3108	Örneğin;1-4-9... vb...
Rakamları toplamı 15 olan sayılar için : Toplam 3330	Örneğin;1-5-9... vb...
Rakamları toplamı 16 olan sayılar için : Toplam 3552	Örneğin;1-6-9... vb...
Rakamları toplamı 17 olan sayılar için : Toplam 3774	Örneğin;1-7-9... vb...
Rakamları toplamı 18 olan sayılar için : Toplam 3996	Örneğin;1-8-9... vb...
Rakamları toplamı 19 olan sayılar için : Toplam 4218	Örneğin;2-8-9... vb...
Rakamları toplamı 20 olan sayılar için : Toplam 4440	Örneğin;3-8-9... vb...
Rakamları toplamı 21 olan sayılar için : Toplam 4662	Örneğin;4-8-9... vb...
Rakamları toplamı 22 olan sayılar için : Toplam 4884	Örneğin;5-8-9... vb...
Rakamları toplamı 23 olan sayılar için : Toplam 5106	Örneğin;6-8-9... vb...
Rakamları toplamı 24 olan sayılar için : Toplam 5328	Örneğin;7-8-9... vb...

KULLANILAN RAKAMLARIN İKİSİ AYNIYSA:

Rakamları toplamı 10 olan sayılar için toplam :	1110	1-1-8... vb...
Rakamları toplamı 11 olan sayılar için toplam :	1221	1-1-9... vb...
Rakamları toplamı 12 olan sayılar için toplam :	1332	2-2-8... vb...
Rakamları toplamı 13 olan sayılar için toplam :	1443	2-2-9... vb...
Rakamları toplamı 14 olan sayılar için toplam :	1554	2-6-6... vb...
Rakamları toplamı 15 olan sayılar için toplam :	1665	3-6-6... vb...
Rakamları toplamı 16 olan sayılar için toplam :	1776	2-7-7... vb...
Rakamları toplamı 17 olan sayılar için toplam :	1887	3-7-7... vb...
Rakamları toplamı 18 olan sayılar için toplam :	1998	2-8-8... vb...
Rakamları toplamı 19 olan sayılar için toplam :	2109	3-8-8... vb...
Rakamları toplamı 20 olan sayılar için toplam :	2220	6-6-8... vb...
Rakamları toplamı 21 olan sayılar için toplam :	2331	3 -9-9... vb...
Rakamları toplamı 22 olan sayılar için toplam :	2442	4-9-9... vb...
Rakamları toplamı 23 olan sayılar için toplam :	2553	5-9-9... vb...
Rakamları toplamı 24 olan sayılar için toplam :	2664	6-9-9... vb...
Rakamları toplamı 25 olan sayılar için toplam :	2775	7-9-9...vb...

Rakamları toplamı 26 olan sayılar için toplam 28868-9-9... vb...

Olduğu görüldü.

Herhangi bir sayının, bu sayılardan olup olmadığını bulacak formülümüz şu şekildedir.

Eğer sayı “abbc” şeklindeyse $a+c < 10$ ve “ $a+c =b$ ” olmalıdır.

Eğer sayı “abcd” şeklinde ise $15 > a+d > 10$ olmalıdır. Ve abcd 4 basamaklı sayısında,

ab iki basamaklı bir sayı olmak üzere;

$$ab-a=ed$$

$$e+d=xc$$

$b=c+1$ koşulunu sağlamalıdır.

ÖRNEK:

1554, 3 sayının yerlerinin değiştirilmesi sonucu oluşan 3 basamaklı sayıların toplamı sonucu mu oluşmuştur?

$1+4<10$ dolayısıyla $a+c=b$ işlemini kullanarak ($1+4=5$) bu şekilde bir sayı olduğunu buluyoruz.

Demek ki

ÖRNEK:

4218, 3 sayının yerlerinin değiştirilmesi sonucu oluşan 3 basamaklı sayıların toplamı sonucu mu oluşmuştur?

$4+8>10$ dolayısıyla;

$42-4=38$

38'in 8'i birler basamağındadır.

$3+8=11$

11'in 1'i onlar basamağında, bir fazlası yüzler basamağındadır. Bunun sonucunda 4218'in bu şekilde bir sayı olduğunu anlıyoruz.

Kullanılan Yöntemler: Matematiksel ve mantıksal araştırma yöntemi, Tümevarım yöntemi.

Projenin Bütçesi: 10 TL (Kırtasiye malzemeleri)

Proje Çalışma Takvimi: 1 Ekim-31Ekim : Proje konusunun belirlenmesi

1 Kasım-30 Kasım: Projelerin uygulanması,Araştırma yapılması

3 Aralık- 31 Aralık: Sonuçların Değerlendirilmesi

2 Ocak- 25 Ocak : Proje Özeti yazımı

27- Ocak 3 Şubat : Başvuru yapılması

Projenin Sonucu: Bu projenin sonunda dik kenarları Fibonacci dizisinin elemanları olan dik üçgenlerin Hipotenüslerini Pisagor bağıntısı kullanılmadan bulacak bir formül bulundu. Böylece dik üçgenler ve Fibonacci dizileri arasında bir bağ kurularak matematik dünyasında keşif yapmış olundu.

Kaynaklar

- Yrd.Doç.Dr.Özdemir .M ”Sayılar Teorisi” altın nokta 2013
- Wolfgang Blum “Neden Ve Nasıl Matematik” Tudem
8. sınıf Matematik Ders Kitabı
- Edward H. Julius (2006) “**Sihirli Matematik Oyunları**”Güncel Yayıncılık
- Pappas Theoni (2000) **Yaşayan Matematik** Mavi Ada Yayınları
- Sertöz Sinan (2004) **Matematiğin Aydınlık dünyası** Tübitak yayınları
- Gündüz, S.(2004) **Matematik projeleri ve sınıf etkinlikleri** Toroslu kitaplığı
- Baran Ziya (2005) **Akıl Oyunları** Bilgi vizyon yayınları.
- www. projeokulu.net, *earged.meb.gov.tr/bubenimeserim/*
- <http://www.biltek.tubitak.gov.tr/bulusumvar>

Proje No: 2014019739

Proje Adı: İzo üçgen Önerisi

İli: KOCAELİ

Okulun Adı: İZMİT BİLİM VE SANAT MERKEZİ

Öğrenci Adı-Soyadı: H. A. KAYA

Danışman Öğretmen Adı-Soyadı: DUYGU ALYEŞİL KABAKÇI

Projenin Amacı: Bu projede izometrik kâğıtta oluşturulan çokgenlerin alanlarını eşkenar üçgen cinsinden ifade etmek ve dikdörtgenlerin içindeki eşkenar üçgen sayılarını kenarlarından yararlanarak bulacak formül geliştirerek günlük hayattaki kullanıma uyarlamak amaçlanmıştır.

İzometrik kâğıtlara farklı kenar uzunluklarında (sırasıyla) çokgenler çizdim. Farklı kenar uzunluğundaki dikdörtgen, Düzgün altıgen, ikizkenar yamuk, eşkenar dörtgen vs.. şekillerinin içerisinde oluşan eşkenar üçgen sayılarını buldum. İçbükey ve dışbükey farklı çokgenlerin içerisindeki eşkenar üçgenlerin sayılarını da hesapladım. Kenar sayıları, bir kenarındaki birim sayıları, iç ve dış nokta sayılarını göz önünde bulundurarak çokgenleri eşkenar üçgen cinsinden ifade edebilecek (yarımlar tamamlanarak). formüller buldum. Dikdörtgen şekiller kullanıldığı için formülü dikdörtgenlere uyarladım. Bu projede bulunan formüller sayesinde günlük hayatta eşkenar üçgenlerle, mozaik kaplamada ve motiflerle battaniye, çanta (vb) yapmada gereksiz malzeme alımını da önlenmiş oldum.

m =Yatay kenarın noktalar arası aralık sayısı n =Dikey kenarın noktalar arası aralık sayısı

x =Dış nokta sayısı

y =İç nokta sayısı olmak üzere.

Oluşturulan çokgenlerdeki hesaplamalar sonucunda aşağıdaki sonuçlara ulaşıldı :

Çokgenlerin içerisindeki eşkenar üçgen sayısı için genel alan formülü: $x+2y-2$

Çokgenlerin Kenar sayılarından yararlanarak alanın eşkenar üçgen cinsinden ifade edilmesi:

Düzgün altıgen için: $6.n.n$
İkizkenar yamuk için: $3.n.n$
Eşkenar dörtgenin için: $2.n.n$
Eşkenar üçgenin için: $n.n$
Üçgenin alanı: $m.n$ kök 3

Dikdörtgen için:

Dış nokta sayısı formülü: $2.(m+n)$
İç nokta sayısı: $(m.n) + (m-1).(n-1)$
Eşkenar üçgen sayısı: $4.m.n$

Bu durumda kenar aralıkları yatayda 14, dikeyde 20 olan bir dikdörtgenin içerisindeki

Üçgen köşe nokta (iç nokta) sayısı: $(m.n) + (m-1).(n-1)$

$14.20 + 13.19 = 280 + 247 = 527$ dir.

Dikdörtgenin üzerindeki köşe noktalarının sayısı : $2.(m+n)$ $(14+20) .2 = 68$

İçine sığacak eşkenar üçgen sayısı $4.14.20 = 1120$ dir.

Kenar aralıkları yatayda 10, dikeyde 12 olan bir dikdörtgenin içerisindeki

Üçgen köşe nokta (iç nokta) sayısı: $12.10 + 9.11 = 219$

Dikdörtgenin üzerindeki köşe noktalarının sayısı : $2. 22 = 44$

İçerisine sığacak eşkenar üçgen sayısı $4.10.12 = 480$ olarak bulunur.



Buradan yola çıkarak yatayı yatayı 66, dikeyi 27 aralıklı dikdörtgensel bölge şeklindeki bir mutfak duvarını eşkenar üçgen şeklindeki mozaik fayanslarla kaplamak istersek (kenar uzunluğu dikey aralıklara eşit olmak üzere) gerekli mozaik üçgen sayısı $= 66.27.4 = 7128$ olarak buluruz. Böylece gereksiz malzeme israfı yapmamış oluruz. Bu duvarın $1/6$ oranında küçültülmüşü bir kaplamasını gerçekleştirdim.

Bunun için Yatay 11, dikey 4,5 aralıklı bir modelini oluşturdum. Bu kaplama için $4.11.4,5 = 198$ adet mozaik gerekti. Tam bu sayıda eşkenar üçgen keserek, bunlarla bir duvar kaplama modeli yaptım.

Projenin Sonucu: Bu proje sayesinde İzometrik kâğıtta oluşturulan çokgenlerin alanlarını eşkenar üçgen cinsinden ifade ettik, ayrıca diğer bazı çokgenlerin de içerisine sığacak eşkenar üçgen sayılarını, kenarları yardımıyla hesapladık. Dikdörtgenlerin içindeki eşkenar üçgen sayılarını kenarlarından yararlanarak bulacak formül geliştirerek, günlük hayattaki kullanıma uyarladık. Böylece günlük hayatta eşkenar üçgenlerle, mozaik kaplamada ve motiflerle battaniye, çanta (vb) yapmada gereksiz malzeme alımını da önlemiş olacağız. Aynı kenar uzunluğuna sahip eşkenar üçgen motifleriyle bir battaniye de yapılabilir.

KULLANILAN YÖNTEMLER: Matematiksel ve mantıksal araştırma yöntemi

KAYNAKLAR

Pappas Theoni (2000) **Yaşayan Matematik** Mavi Ada Yayınları

[www. projeokulu.net](http://www.projeokulu.net), earged.meb.gov.tr/bubenimeserim/

Ali Nesin “**Matematik Canavarı**” 2010

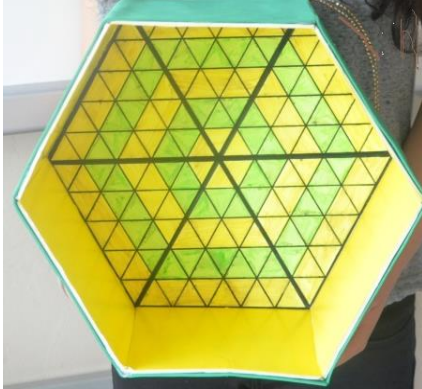
Wolfgang Blum “**Neden Ve Nasıl Matematik**” Tudem

Gündüz, S.(2004) “**Matematik projeleri ve sınıf etkinlikleri**” Toroslu kitaplığı

Kjartan Poskitt (2011) “**Daha öldürücü Matematik**” Timaş yayınları

Serhan Büyükkeçeci (2013) “**Çatlak matematik oyunları**”Timaş yayınları

Lines, M. (1999) **Bir Sayı Tut** Tübitak yayınları



ÖĞRENCİNİN ADI SOYADI: P. GÜL

DANIŞMAN:DUYGU ALYEŞİL KABAKÇI

SINIF:9. SINIF

KURUM:İZMİT BİLİM VE SANAT MERKEZİ

PROJENİN ADI:TOPLAMSAL SAYILAR

PROJENİN ÖZETİ :

Problem : Toplamları herhangi n basamaklı bir doğal sayıdan küçük veya eşit olan sayı çiftlerinin sayısını bulacak formül geliştirilerek günlük hayat problemine uyarlanabilir mi?

Alt Problemler:

•Toplamları Herhangi 2 basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan 2 *basamaklı* sayı çiftleri nelerdir?

•Toplamları Herhangi 3 basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan 3 *basamaklı* sayı çiftleri nelerdir?

•Toplamları Herhangi n basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan n *basamaklı* sayı çiftleri nelerdir?

•Toplamları Herhangi 2 basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan sayı çiftleri nelerdir?

•Topları herhangi bir n basamaklı doğal sayıya eşit olan sayı çiftleri nelerdir?

•Bir doğru parçasını iki parçaya kaç farklı şekilde bölebileceğimiz problemine bulduğum formülden yararlanarak çözüm getirire bilir miyim?

Amaç : Toplamları Herhangi n basamaklı bir doğal sayıdan küçük veya eşit olan sayı çiftlerinin sayısını bulacak formül geliştirme ve günlük hayat problemine uyarlama.

Yöntem :

Araştırmaya başlamadan önce literatür taraması yaptım ve daha önce böyle bir araştırmanın yapılmadığını gördüm. Tüme varım yöntemiyle toplamaları sırasıyla 20 21...99 dan küçük olan iki basamaklı sayı çiftleri ni buldum.(Yani toplamı ab den küçük olan iki

basamaklı sayı çiftleri) Daha sonra toplamaları ABC üç basamaklı sayısından küçük olan üç basamaklı sayı çiftlerini bularak verileri tabloda birleştirdim. Ve n basamaklı bir sayıdan küçük olan n basamaklı sayı çiftlerini bulacak formülü oluşturdum.

Daha sonra 20 den 21 den ...99 dan küçük olan ve eşit olan sayı çiftlerini ayrı ayrı hesapladım.(Yani toplamaları bir ab sayısından küçük olan ve eşit sayı çiftleri).

Ve bunların sayılarını bularak tablo haline getirdim. Bu sayıların belli bir kurala göre gittiğini fark ettim ve her biri için ayrı ayrı formüller buldum. Bu formülden yola çıkarak bir doğru parçasını iki parçaya kaç şekilde bölebileceğimiz ve **birbirinin katı olacak şekilde** kaç parçaya ayırabileceğimiz sorularına yanıt aradım. Bu doğru parçalarını üç parçaya nasıl böleceğimiz sorusuna formülümle yanıt aradım. Ayrıca bu doğru parçalarını bir parçası herhangi bir m uzunluğu olacak şekilde kaç farklı parçaya ayırabiliriz sorusunun da yanıtını formülize ettim.

BULGULAR:

Formüller şu şekildedir :

Toplamları İki basamaklı bir AB sayısından küçük olan sayı çiftleri
FORMÜL Çift ise: $\left(\frac{ab-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{ab}{2}\right)$ Tek ise: $\left(\frac{ab-1}{2}\right)^2$ Toplamı ab den küçük olan sayı çiftlerinden içinde m sayısı olan ab-m -1 kadar sayı çifti vardır.
Toplamları İki Basamaklı ab sayısına eşit olan sayı çiftleri.

Örnek: Toplamları 3253 sayısından küçük olan dört basamaklı farklı sayı çifti vardır?

1253 tek sayı olduğundan, **(ABCD-1999)² /4 formülünden (3253-1999)²/4=393129**

Ornek :223 sayısından küçük olan üç basamaklı kaç farklı sayı çifti vardır?

$$(223-199)^2/4=144$$

Bu formüllerden yola çıkarak iki basamaklı sayılar için ayrıntılı inceleme yaptım. ve bir ab sayısından küçük olan eşit olan tüm sayı ikililerini hesapladım .Bu sayıların bir kurala göre gittiğini buldum ve kaç tane olduklarını bulacak formül geliştirdi .Bu formülün hangi günlük hayat problemine çözüm getirdiğini düşündüm .Ve bir çubuğun iki parçaya kaç farklı şekilde bölüneceğini veya bir miktar parayı iki çocuğa kaç şekilde dağıtılacağı vb. problemlerine çözüm getireceğini fark ettim ve buradan yola çıkarak oluşturduğum problemlere kendi formülümle çözüm getirdim.

Örneğin;45 cm uzunluğundaki bir çubuğu kaç farklı şekilde iki farklı parçaya bölebiliriz?

Sorusunun cevabı için aşağıda bulduğum formülden yararlanınız.

$$\text{Tek ise } \left(\frac{ab-19}{2} \right)$$

$$\left(\frac{45-19}{2} \right) = 13$$

Olarak buluruz. Yani 13 farklı kesim olabilir

Başka bir örnek vermek gerekirse ;

➤ 128Tl para iki çocuk arasında kaç farklı şekilde paylaştırılabilir?
Sorusunun yanıtı için:

$$\left(\frac{ab-18}{2} \right) \text{ formülünden yararlanarak } \left(\frac{128-18}{2} \right) = 55 \text{ farklı dağıtım olabilir.}$$

ÖRNEK: Toplamları 98 sayısına eşit kaç sayı çifti vardı

$$98/2 = 49$$

Örnek: 58cm uzunluğundaki bir çubuğu üç parçaya kaç farklı şekilde ayırabiliriz? Parçalardan biri 15 cm uzunluğunda olan kaç farklı kesim vardır?

58 çift sayı olduğundan $\left(\frac{ab-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) = \left(\frac{58-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{58}{2}\right) = 812$ farklı kesim yapılır. Bunlardan;

ab-m-1 58-15-1=32 tanesi 15cm lik parça içerir

Sonuç Ve Tartışma:

Sonuç olarak **Toplamları herhangi n basamaklı bir doğal sayıdan küçük veya eşit olan sayı çiftlerinin sayısını bulacak formül geliştirmiş oldum. Ayrıca** Toplamları herhangi 2 basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan 2 *basamaklı* sayı çiftleri ,toplamları herhangi 3 basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan 3 *basamaklı* sayı çiftleri ,toplamları herhangi n basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan n *basamaklı* sayı çiftleri ,toplamları herhangi 2 basamaklı bir doğal sayıdan küçük olan sayı çiftleri ve topları herhangi bir n basamaklı doğal sayıya eşit olan sayı çiftleri sayılarını bulacak formülleri de bulmuş oldum.

Ve bu kuralları günlük hayat problemlerine uyarlayarak farklı problemlere çözüm önerileri getirmiş oldum

Bu proje toplamları herhangi n basamaklı doğal sayıdan büyük olan n basamaklı sayı ikilileri içinde araştırılabilir.

Kaynakça:

Yrd.Doç.Dr.Özdemir .M "Sayılar Teorisi" altın nokta 2013

Wolfgang Blum "Neden Ve Nasıl Matematik" Tudem

Lines, M. (1999) "**Bir Sayı Tut**" Tübitak Yayınları

Theoni, P. (2000) "**Yaşayan Matematik**" Mavi Ada Yayınları

Nesin, A. (2010) "**Matematik Canavarı**" Blum, W. (2005) "**Neden Ve Nasıl Matematik**" Tudem

Hançerlioğulları, A. , Alan, F. , Özbek, A. (1992) "**Üniversiteye Hazırlık Liseye Yardımcı Matematik Seti** " Tümay Yayınları

Akmaner, K. , Tanrıöver, N. (1993) "**Liseler İçin Matematik 4**" Yıldırım Yayınları

Anahtar kavramlar: Sayı ikilileri,diziler,

VAN YUSUF GÖKÇENAY BİLİM VE SANAT MERKEZİ

BU BENİM ESERİM VAN BÖLGE SERGİSİ 2015

PROJENİN ADI: ARDIŞIK KENARLI KARELERİN ÜÇGENLERİNİN İNCELENMESİ VE SONUÇLARIN GENELLENMESİ

PROJENİN AMACI: Kenar uzunlukları ardışık olarak verilmiş kareler arasında oluşan üçgenleri uzunluk ve alan bakımından incelemek.

PROJENİN HEDEFİ:

- 1-) Oluşan üçgenlerin yükseklikleri arasında bir örüntü bulmak.
- 2-) Oluşan üçgenlerin hipotenüs uzunlukları arasında bir örüntü bulmak.
- 3-) Oluşan üçgenlerin alanları arasında bir örüntü bulmak.
- 4-) Genel formüllere ulaşmak.

GİRİŞ:

Projemde, kenar uzunlukları ardışık olarak artan kareleri kullanarak, bu kareler arasında kalan üçgenler arasında bir takım örüntüler bulmaya çalıştım. x herhangi bir reel sayı olmak üzere kenar uzunlukları $x, 2x, 3x, \dots, nx$ şeklinde olan kareleri, her bir kareyi diğer kareye bitişik olacak şekilde yerleştirdim. Daha sonra ilk karenin alt köşesini bir sonraki karenin üst köşesi ile birleştirdim. Diğer karelerde de benzer şekilde işlem yaptım. Ortaya çıkan üçgenlerin yükseklikleri, hipotenüs uzunlukları ve alanları arasında bir takım örüntüler buldum. Bu örüntüleri genelleştirdim. Kenar uzunlukları $x, 2x, 3x, \dots, nx$ olan üçgenler için yükseklikleri: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, hipotenüs uzunluklarını: $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$, alanları: A_1, A_2, A_3, A_n olarak isimlendirdim.

SONUÇLAR

x bir reel sayı olmak üzere, kenar uzunlukları $x, 2x, 3x, \dots, nx$ olan üçgenler için

1-) n . üçgenin yüksekliği: $y_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot x}{2n+1}$

2-) n . hipotenüsün uzunluğu $h_n = \frac{(5n+6n+2) \cdot \sqrt{nx}}{2n+1}$

3-) n . üçgenin alanı: $A_n = \frac{(nx)^2 \cdot (n+1)}{4n+2}$

PROJEYİ HAZIRLAYAN: H. YAHYATUNÇTÜRK

PROJE DANIŞMANI: Pınar ÇALIŞKAN

ETWINNING

eTwinning, Avrupa'daki okullar için oluşturulmuş bir topluluktur.

İletişim kurmak, işbirliği yapmak, projeler geliştirmek, paylaşmak; kısacası Avrupa'daki en heyecan verici öğrenme topluluğunu hissetmek ve bu topluluğun bir parçası olmak için, Avrupa ülkelerindeki katılımcı okullardan birinde çalışan personele (öğretmenler, müdürler, kütüphaneciler v.b.) yönelik bir platform sunmaktadır.

eTwinning, Bilgi ve İletişim Teknolojilerinin kullanımı vasıtasıyla gerekli destek, araçlar ve hizmetleri sağlayarak okulların herhangi bir konuda kısa ve uzun vadeli ortaklıklar kurmasını kolaylaştırarak Avrupa'da okul işbirliğini teşvik etmektedir.

2005 yılında Avrupa Komisyonunun e-öğrenme Programının ana hareketi olarak başlatılan eTwinning, 2007 yılından bu yana Yaşam Boyu öğrenme Programına sıkı bir şekilde entegre edilmiştir. Merkezi Destek Servisi, Avrupa'daki okullar, öğretmenler ve öğrenciler için eğitimi geliştiren 33 Avrupa Eğitim Bakanlığının uluslararası işbirliğinden oluşan European Schoolnet tarafından yönetilmektedir. Ayrıca eTwinning ulusal düzeyde 35 Ulusal Destek Servisi tarafından desteklenmektedir.

Ülkemiz eTwinning'e 2009 yılında dahil olmuştur. eTwinning Türkiye Ulusal Destek Servisi, Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü bünyesinde faaliyet göstermektedir. Ülkemizde 24.000'den fazla okuldan, 40.000'den fazla kullanıcı portala kayıtlıdır ve şu ana kadar 7600'den fazla projeye katılmışlardır.

Etwinning öğretmenlere

1. Avrupa ülkelerinde gerçekleşen eğitim uygulamaları hakkında fikir sahibi olma,
2. Yabancı dil pratiğini geliştirme,
3. Bilişim teknolojilerini derslerinde etkin biçimde kullanabilme,
4. Derslerini öğrencilerin daha fazla motive olmasını sağlayarak, daha eğlenceli hale getirebilme,

5. Mesleki açıdan kendini geliştirebilme.

İmkanı sağlarken öğrencilere ise aşağıda belirtilen olanakları sağlamaktadır. :

1. Derse daha fazla motive olma,
2. Başka ülkelerden akranları ile iletişim kurarak, farklı kültürleri tanıma,
3. Yabancı dilde iletişim kurabilme,
4. Web teknolojilerinin eğitim amacıyla da kullanabileceğini fark etme,
5. Projede yer aldığı için derslere daha etkin katılma.

Bir eTwinning projesi yapabilmek için eTwinning'e kayıt olmanız gerekir. Anaokulundan, Ortaöğretim sonuna kadar, hem devlet okullarında hem de özel okullarda görev yapan tüm öğretmen ve idareciler eTwinning'e kayıt olabilirler.

eTwinning projeleri en az iki farklı üye ülkeden öğretmen ile başlatılabilir. Bu yüzden proje başlatmak için mutlaka ortak bulmanız gerekir. Eğer var olan bir projeye dahil olacaksanız da, proje yöneticilerinin öncelikle sizi bağlantı listelerine eklemeleri gerekmektedir.

eTwinning'de yer alan Avrupa Ülkelerinden her hangi biri ile proje başlatabilirsiniz. eTwinning projelerinde resmi olarak her hangi bir zaman sınırlaması yoktur. Yılın her hangi bir zamanında başlatılabilirler. Süreleri genellikle 6 ay ila 1 yıl arasındadır, ancak içeriğe göre daha uzun ya da kısa olarak planlanabilirler.

eTwinning projelerini yürütme sürecinde ortaklar arası iletişimin ve işbirliğinin güçlü olması son derece önemlidir. Yapılacak etkinliklerin, birlikte planlanması ve birlikte uygulanması gerekir.

ETWINNING PROJECT: THE ARTISTIC LANGUAGE OF MATH

(Burdur Bilsem etwinning Projesi Genel Bilgi)

The Artistic Language of Maths etwinning projesi Portekiz ve Türkiye (Burdur Bilim ve Sanat Merkezi) ortaklığında 3 öğretmen ve 54 öğrenci olmak üzere toplamda 57 kişi ile yürütülmüştür. Projede 1)CARICA-MA-TURE ,2) MELODY-MATHS, 3)T-MATHS temalarında ortak ülke katılımcıları ile çeşitli etkinlikler yaparak öğrencilerin matematik ile çeşitli sanat dalları arasında disiplinler arası bir ilişki kurması amaçlanmaktadır. Böylece matematik dersine karşı olumsuz tutumlarını değiştirmek, günlük hayatta matematiğin farklı şekillerde kullanım alanlarının olduğunu fark ettirmek, matematikle uğraşırken eğlenmeyi aynı zamanda farklı matematiksel anlatım yolları keşfetmek hedeflenmiştir.

Her biri yaklaşık 1,5 ayda tamamlanmaya yönelik olarak planlanan temalara geçmeden önce tanışma etkinliklerin yapılması planlanmıştır. Ardından 1)CARICA-MA-TURE temasıyla öğrencilerin matematik ile sanat dallarından resim arasında ilişki kurarak belirledikleri matematik konularını çizerek ve aynı zamanda çizimlerinde mizahi unsurları kullanarak farklı bir matematiksel anlatı yolu geliştirmeleri beklenmiştir. 2) MELODY-MATHS temasıyla öğrencilerden atık maddeleri matematiksel yorumlayarak sanat dallarından müzik ile ilişkilendirerek müzik enstrümanları tasarımları beklenmiştir. 3)T-MATHS temasıyla da öğrencilerden matematiksel ifadeleri kullanarak, günlük hayatta matematiği farklı açıdan kullanmalarını amaçlanmıştır. Bu doğrultuda matematiksel öğretiler içeren tişörtler öğrenciler tarafından tasarlanarak, ortak ülke öğrencileri ile karşılıklı olarak hediye edilmesi hedeflenmiştir.

Proje sürecinde amaca uygun olarak çeşitli web araçları öğrencilerle birlikte (Skpe,Youtube,Vimeo,Kioza,Gosoapbox,Padlet,Word,Powerpoint,MovieMaker,Prezi,Caleme o,Powtoon...) kullanılmıştır. Okullar arasındaki iletişim etwinning platformu, e posta, Skpe, Viber aracılığıyla gerçekleştirilmiştir.

Gerçekleştirilen bu etwninning projesi sonucunda hazırlanan anket verilerine göre öğrencilerin %68 bu projede yer almaktan çok mutlu olduğunu,%76 bu projenin beklentilerinin karşıladığını, %68 yeni arkadaş edinmelerini sağladığını, %74 İngilizce öğrenmelerine yardımcı olduğunu, %87'si her öğrencinin bu tarz projelere katılması gerektiğini düşündüğünü, %88 bu projenin yetenekleri geliştirme fırsatı verdiğini belirterek yine çoğunluğu (%70) tekrar bu tarz projelerde yer almak istediklerini belirtmişlerdir.

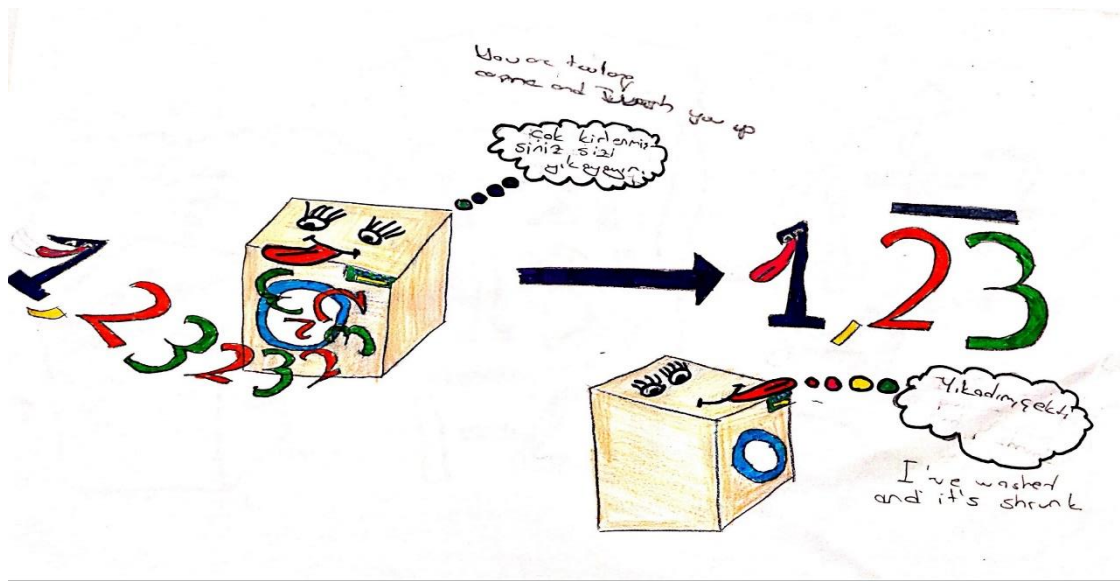
Bu anlamda projenin amaçlarına ulaştığını, çeşitli etkinlikler yaparak öğrencilerin matematik ile çeşitli sanat dalları arasında disiplinler arası bir ilişki kurabildiği, matematik dersine karşı daha olumlu bir bakış açısına sahip olduğu, günlük hayatta matematiğin farklı şekillerde kullanım alanlarının olduğunu fark ettiği, matematikle uğraşırken eğlendiklerini aynı zamanda farklı matematiksel anlatım yolları keşfettikleri görülmüştür. Matematiksel kavramları farklı yollarla somutlaştırmalarına ve anlamlandırmalarına yardımcı olmuştur. Bunun yanı sıra projede öğrenciler İngilizce kullanabilme imkanı bularak yabancı dillerini geliştirme olanağı bulmuştur. Farklı ülkelerden farklı kültürlerden arkadaşlık edinmelerine,

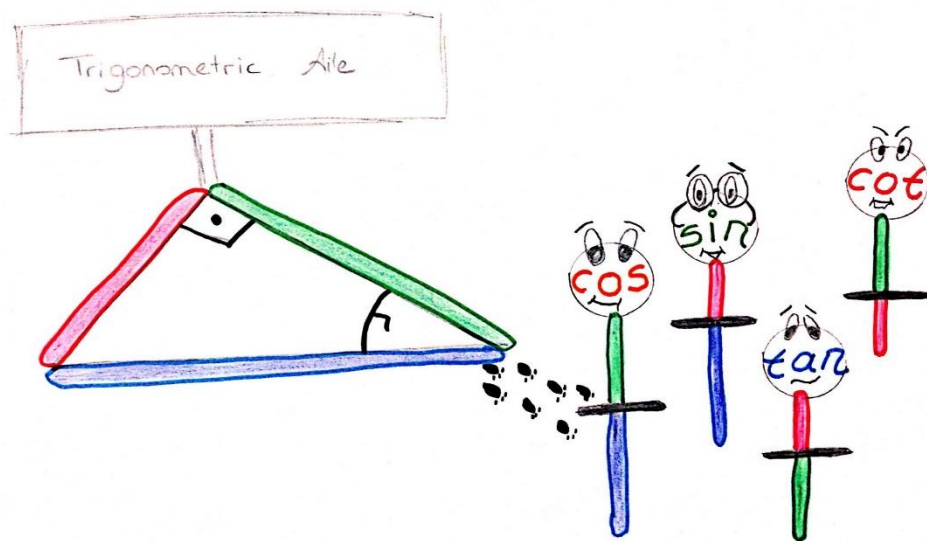
farklı kültürleri tanımalarına olanak sağlamıştır. Ayrıca bu projenin en güzel yanlarından biri ise birbirlerine karpotal ve tişört göndererek bu projeden kendilerine kalıcı, unutulmaz bir hatıra kalmıştır ve güzel dostluklar kurulmasını sağlayan bir adım atılmıştır. Öğretmenler açısından da bu proje disiplinler arası çalışma disiplini kazandırarak, kişisel ve mesleki gelişimine katkı sağlamıştır.

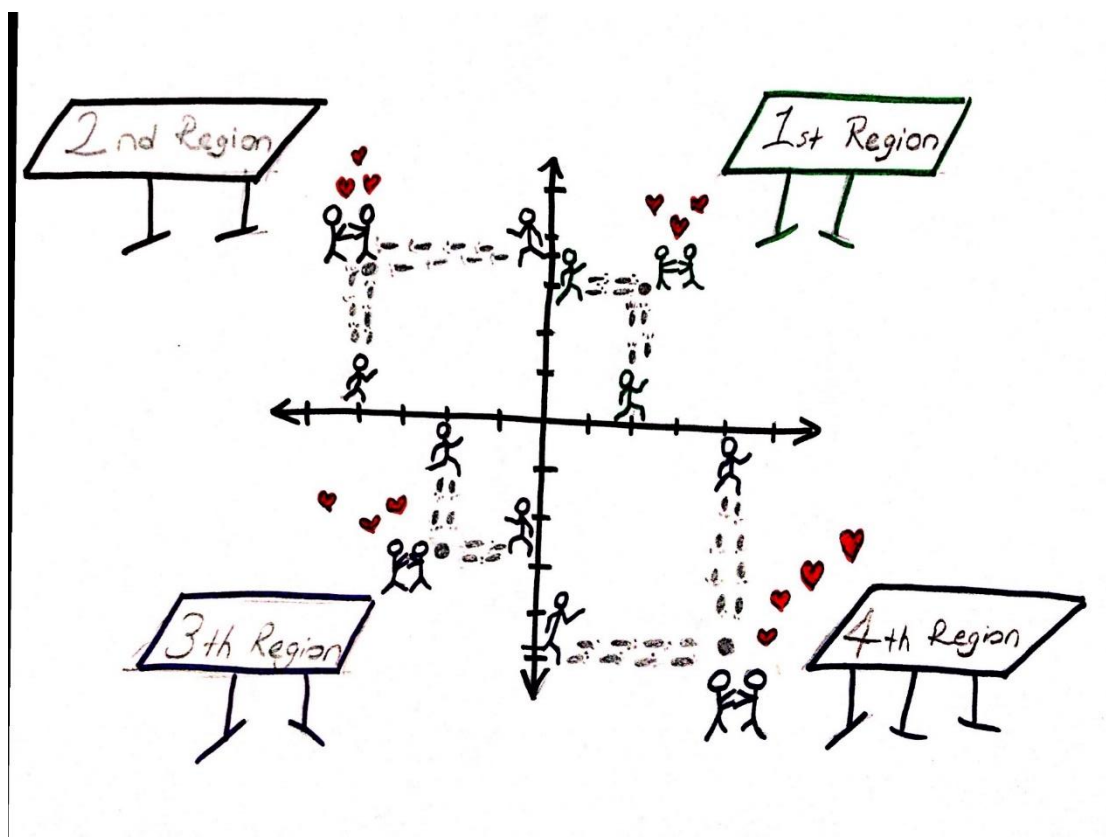
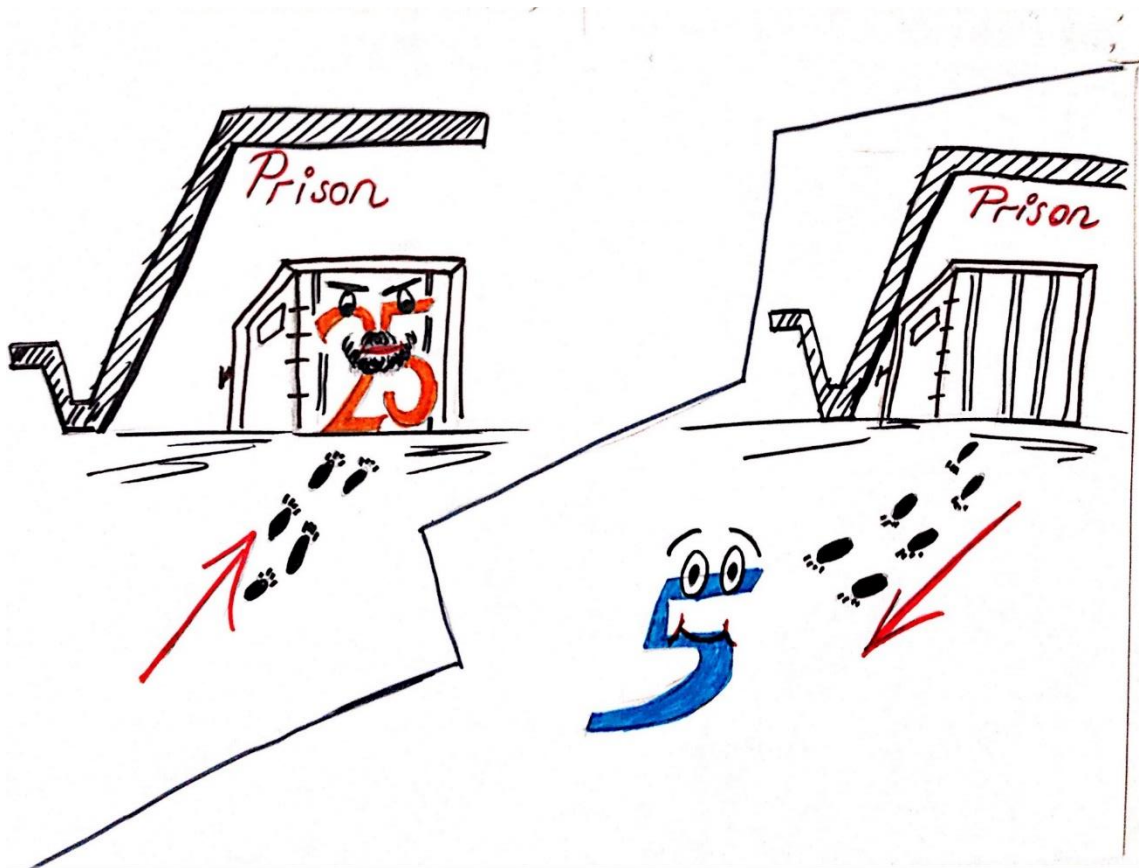
Yapılan tüm çalışmalar sonucunda da ilimizde gerçekleştirilen 10. Etwinning kutlama programında projemizi hem sunum yaparak hem de faaliyetlerimizi sergileyerek tanıtma imkanı elde ettik. Sonrasında projemiz ilk büyük başarısını Ulusal Kalite etiketi olarak elde etti. Ardından başarısını taçlandırarak Avrupa Kalite Etiketi aldı. Yaptığımız proje çalışmalarının MEB Ulusal Destek Servisi tarafından beğenilmesi sonucunda proje koordinatörü Matematik öğretmeni Ayşe ŞİMŞEK Polonyo’da düzenlenen Professional Development Workshop’una gönderildi.

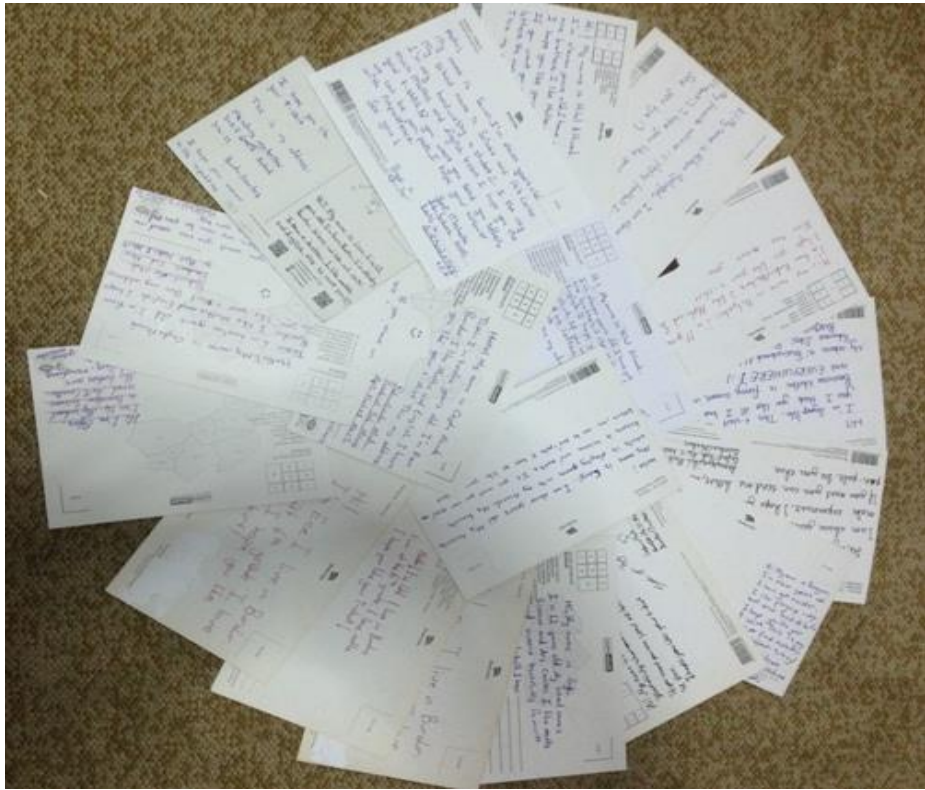












Proje özet:

The Artistic Language of Maths etwinning projesi Portekiz ve Türkiye ortaklığında 3 öğretmen ve 54 öğrenci olmak üzere toplamda 57 kişi ile yürütülmüştür. Projede 1)CARICA-MA-TURE ,2) MELODY-MATHS, 3)T-MATHS temalarında ortak ülke katılımcıları ile çeşitli etkinlikler yaparak öğrencilerin matematik ile çeşitli sanat dalları arasında disiplinler arası bir ilişki kurması amaçlanmaktadır. Böylece matematik dersine karşı olumsuz tutumlarını değiştirmek, günlük hayatta matematiğin farklı şekillerde kullanım alanlarının olduğunu fark ettirmek, matematikle uğraşırken eğlenmeyi aynı zamanda farklı matematiksel anlatım yolları keşfetmek hedeflenmiştir.

Her biri yaklaşık 1,5 ayda tamamlanmaya yönelik olan planlanan temalara geçmeden önce tanışma etkinliklerin yapılması planlanmıştır. Ardından 1)CARICA-MA-TURE temasıyla öğrencilerin matematik ile sanat dallarından resim arasında ilişki kurarak belirledikleri matematik konularını çizerek ve aynı zamanda çizimlerinde mizahi unsurları kullanarak farklı bir matematiksel anlatı yolu geliştirmeleri beklenmiştir. 2) MELODY-MATHS temasıyla ise öğrencilerden atık maddeleri matematiksel yorumlayarak sanat dallarından müzik ile ilişkilendirerek müzik enstrümanları tasarımları planlanmıştır. 3)T-MATHS temasıyla da öğrencilerden matematiksel ifadeleri kullanarak, günlük hayatta matematiği farklı açıdan kullanmalarını amaçlanmıştır. Ardından hazırlanan tişörtler ortak ülke öğrencileri ile karşılıklı olarak hediye edilmesi hedeflenmiştir.

Eğitimde yenilikçilik ve yaratıcılık:

Öğrencilerimiz iki ortak ülke arasında öncelikle canlı bağlantı kurularak bireysel olarak kendilerini tanıttılar.Ardından projeye tüm öğretmenler, idareciler ve diğer çalışanlar (memur, hizmetli) da dahil edilerek grup çalışması ile okul tanıtım videosu çekildi. Sonra seçim yapılarak her ülke kendi ilk üç logosunu belirledi.Bu 6 logo arasından bir anket programı yardımıyla tekrar iki ülke arasında oylama yapıldı. Sonucunda birinci olan logo kurumuzdan seçildi.Canlı bağlantı kurularak bu öğrenciye ödül verildi.

1)CARICA-MA-TURE temasında öğrenciler bireysel olarak öğrendikleri matematiksel kavramları çizim yoluyla ve mizahi unsurları da karatarak ifade ettiler.Etkinlikte Resim, Türkçe ve İngilizce öğretmenlerimizden de destek alarak gerçekleştirilen çalışmalar ile online karikatür dergisi oluşturulmuştur.Ayrıca kurumlar arasında diğer ülke öğrencilerin hazırlamış olduğu karikatürler arasında oylama yapılarak karşılıklı olarak en iyi ilk üç karikatür belirlenmiştir.

2) MELODY-MATHS temasında öğrenciler araştırma yöntemiyle çeşitli müzik enstrümanlarını inceleyerek, enstrümanlardaki matematiksel unsurları araştırdılar.Müzik öğretmenin de desteği ile bu alanda çeşitli deneyler, incelemeler ve araştırmalar yaptılar.Bireysel veya grupta atık maddelerden çeşitli müzik enstrümanları geliştirdiler ve enstrümanlarını matematiksel yorumladılar. Sergi açılarak velilere, diğer öğrencilere tanıtım yaptılar ve oylama ile en iyi ilk üç enstrümanı seçtiler.

3)T-MATHS temasında A4 kağıdına proje taslaklarını çizdiler.Çizimlerini tişörtlere bastırdılar. Ülkelerini tanıtan karpotallara kendileri ifade eden yazılar yazarak eşleştikleri diğer ortak ülke öğrencisine hazırlamış oldukları tişörtü posta yoluyla gönderdiler.

Öğretim programı ile bütünleşme

Türkiye Matematik Öğretim Programı bilgi ve iletişim teknolojilerinin matematik öğrenimi ve öğretiminde etkin olarak kullanılmasını teşvik etmektedir. Kavramların farklı temsil biçimlerinin ve bunlar arasındaki ilişkilerin görülmesini mümkün kılan ve öğrencilerin matematiksel ilişkileri keşfetmesine olanak sağlayan bilgi ve iletişim teknolojilerinden faydalanılması vurgulanmaktadır. Bizde çalışmamızda bu amaca uygun olarak çeşitli web araçlarını öğrencilerimizle birlikte proje sürecinde (Skpe,Youtube,Vimeo,Padlet,Word,Powerpoint,Movie Maker,Prezi,Calemeo,Powtoon...) kullanmaya çalıştık.

Ayrıca öğretim programında öğrencilerin araştırma –sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, fikirlerini paylaşabilecekleri ortamlar oluşturulması üzerinde durulmaktadır. Karikatür, müzik enstüramı, tişört hazırlama faaliyetlerini gerçekleştirirken bu doğrultuda öğrenciler matematiksel kavramlar üzerinde çeşitli araştırmalar yaparak, konu üzerinde eleştirel düşünerek, var olan ifade biçimlerinden yola çıkarak kendi özgün ve yaratıcı stratejiler geliştirmeye yönlendirilmişlerdir. Sınıf içerisinde tartışma ortamları yaratılarak ve ortaklar arasında çeşitli iletişim yolları kullanılarak fikirlerini paylaşabilecekleri bağlantılar kurmaları sağlanmıştır.

Etkinlikler program doğrultusunda öğrencileri matematik bilgileriyle iletişim kurmaya teşvik ederken, somut deneyimler yardımıyla matematiksel anlamlar oluşturmalarına, matematik bilgileri ile iletişim kurmaya teşvik etmektedir. Karikatür, müzik enstüramı, tişört hazırlama etkinlikleri ile öğrenciler soyut matematiksel kavramları farklı anlatım yolları geliştirerek matematiksel anlamlar oluşturmuştur. Ayrıca öğretmen ve öğrenciler arasında kurum içi ve kurumlar arası matematik bilgileri ile iletişim kurmaya teşvik edilmiştir. Bu açıdan da bu proje öğretim programımız amaçlarına uygun olarak yapılandırılmıştır ve yapılan etkinlikler amaca hizmet etmektedir.

Ortak okullar arasındaki iletişim

Okullar arasındaki iletişim etwinning platformu, e posta, Skpe, Viber aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler etwinning platformunda forum, chat, mesaj özelliklerini kullanarak kendilerini tanıtmaya ve birbirlerini daha yakından tanımak için iletişime geçmişlerdir. Bunun yanı sıra projenin başında Skpe programı ile canlı bağlantı kurularak öğrencilerin kendilerini tanıttığı “tanışma etkinliği” gerçekleştirilmiştir. Ayrıca yine Skpe programı ile canlı bağlantı kurularak logo yarışması sonucu açıklanmış ve ödül töreni gerçekleştirilmiştir. Böylece öğrenciler birliktelik duygusu içerisinde etkileşim kurarak aynı ortamda bir arada ortak paylaşımlar yaşama imkanı elde etmişlerdir. T-Maths etkinliğinde de öğrenciler ortak ülkeler arasında random yöntemiyle eşleştirdikleri arkadaşlarına kendi ülkelerini, şehirlerini yansıtan karpotallara, proje ve kendileri ile ilgili duygu düşüncelerini ifade ederek hazırladıkları tişörtleri hediye etmiştir. Böylece iki ülke arasında dostluk bağları kurmuşlardır. Kültürel bir etkinlik olması adına bağlantı kurularak, Portekizli öğrenciler Türk öğrencilere Portekiz’deki Noel kutlamaları ile ilgili bilgi vermişlerdir.

Öğretmenler ise bu süreçte twinspace de yer alan proje günlüğü ve öğretmen bülteni sayfalarından proje sürecini, yaptıkları faaliyetlerle ilgili duyuruları paylaşmışlardır. Bunun yanı sıra eposta, Skpe ve Viber gibi çeşitli yollarla iletişime geçerek etkinlikleri planlamışlardır, her anlamda birbirleri ile görüş alış verişinde bulunmuşlardır. Proje süresinde birbirleri destekleyici, geliştirici bir ortaklık sürdürmüşlerdir.

Partner okullar arasında işbirliği

Ortak okullar arasında işbirliği daha önce gerçekleştirilen etwinning proje yoluyla ortakların tekrar bir araya gelmesi ile tekrar kurulmuştur. Ortaklar arasında belirlenen 3 tema doğrultusunda Türk ortaklar projenin kuruculuğunu üstlenmiştir. Projenin logosunun belirlenmesi Türk ortaklar tarafından ortaya atılmıştır. Türk Matematik ve Bilgisayar öğretmeni birlikte bir anket hazırlama programı yardımıyla logo yarışması için anket oluşturmuştur. Bu anketle oylama gerçekleştirilmiştir.

Kültürel bir etkinlik paylaşmak adına da Portekizli grup tarafından Türk öğrencilere Portekiz Noel Kutlamaları hakkında bilgi verdikleri bir Skpe bağlantısı gerçekleştirilmiştir.

CARICA-MA-TURE etkinliğinde hazırlanan çalışmalarla bir dergi oluşturulması fikri Portekizli Matematik öğretmeni tarafından Calameo programı yardımıyla e dergi şeklinde olması yönündeki fikriyle geliştirildi. Türk Matematik öğretmeni de ortaklar arasında diğer ülke öğrencilerinin hazırlamış olduğu karikatürler arasından karşılıklı olarak en iyi ilk üç karikatürü belirlemesi düşüncesini ortaya atmıştır.

MELODY-MATHS temasında ise ortaklar fikir alışverişinde bulunarak matematik-müzik ilişkisini yansıtan entrümanlar tasarlanmıştır. Türk Matematik öğretmeni tarafından ise hazırlanan materyaller sergi açılarak veli, diğer öğrenciler ve öğretmenlerle paylaşılmış ve sergiye katılanlar tarafından bir oylama yapılarak matematik-müzik ilişkisini yansıtan en iyi ilk üç enstrüman tasarımı belirlenmiştir. T-MATHS temasında ise ortak kurumlar arasında kurulan iletişimler doğrultusunda çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Türk İngilizce öğretmeni bir anket programı yardımıyla ortak olarak belirlenen soruları kullanarak etwinning etkinliğinin kazanımlarını değerlendirmek amacıyla anket hazırlamıştır. Bu değerlendirme sonuçları yine Türk ortaklar tarafından sunum hazırlanarak paylaşılmıştır.

Teknoloji kullanımı

Proje de çeşitli Web 2 Tools araçlarının kullanılmasına da hassasiyet gösterilmiştir ve bu kapsamda:

-Skpe programı öğrencilerin birbirini daha yakından tanınması, Portekiz Noel kutlamalarının paylaşımı ve logo yarışmasının sonuçlarının açıklanması etkinliklerinde öğrencilerin de izin vermeleri ve gönüllü olarak katılmak istemelerine bağlı olarak canlı bağlantı kurularak etkinliklerin yapılmasında kullanılmıştır.

- Surveey.com, online anket sistemi yardımıyla oluşturulan anket formu ile en iyi logo seçimi gerçekleştirilmiştir.

-Youtube, Vimeo, Dailmotion programları hazırlanan videoları paylaşmak için kullanılmıştır.

-Calameo programı her iki ülke tarafından e-karikatür dergisi oluşturulmasında yararlanılmıştır.

-Prezi programından Melody-Math etkinliğinde çerçevesinde gerçekleştirilen sergide yapılan oylama sonuçlarını paylaşmak için yararlanılmıştır.

-Powtoon programından ise T-math etkinliğinin gerçekleştirilme aşamalarını paylaşmak için kullanılmıştır.

-Padlet programı öğrencilerden izin alınarak projede yer alan öğrencileri tanıtmak ve proje takvimini belirtmek ve veli izin formunu paylaşmak için kullanılmıştır.

-Kioza programı Portekizli grubun logo yarışması sonuçlarını ve tişört etkinliği sürecini paylaşmak için kullanılmışlardır.

-MovieMaker video düzenlemeleri için kullanılmıştır.

-Word programı bilgi, içerik paylaşımında; Power Point ise sunum yapmada kullanılan Office programlarıdır.

-Gosoapbox anket programı ile de gerçekleştirilen etwninnig projesinin öğrenciler tarafından değerlendirilmesine yönelik anket hazırlanmıştır.

-Yapılan etkinlikler Burdur etwinning facebook sayfasından da yayınlanmış ve il genelinde yapılan etkinlikler paylaşılmıştır.

Sonuç

Gerçekleştirilen bu etwninning projesi sonucunda hazırlanan anket verilerine göre öğrencilerin %68 bu projede yer almaktan çok mutlu olduğunu,%76 bu projenin beklentilerinin karşıladığını, %68 yeni arkadaş edinmelerini sağladığını, %74 İngilizce öğrenmelerine yardımcı olduğunu, %87'si her öğrencinin bu tarz projelere katılması gerektiğini düşündüğünü, %88 bu projenin yetenekleri geliştirme fırsatı verdiğini belirterek yine çoğunluğu (%70) tekrar bu tarz projelerde yer almak istediklerini belirtmişlerdir.

Bu anlamda projenin amaçlarına ulaştığını, çeşitli etkinlikler yaparak öğrencilerin matematik ile çeşitli sanat dalları arasında disiplinler arası bir ilişki kurabildiği, matematik dersine karşı daha olumlu bir bakış açısına sahip olduğu, günlük hayatta matematiğin farklı şekillerde kullanım alanlarının olduğunu fark ettiği, matematikle uğraşırken eğlendiklerini aynı zamanda farklı matematiksel anlatım yolları keşfettikleri görülmüştür. Matematiksel kavramları farklı yollarla somutlaştırmalarına ve anlamlandırmalarına yardımcı olmuştur. Bunun yanı sıra projede öğrenciler İngilizce kullanabilme imkanı bularak yabancı dillerini geliştirme olanağı bulmuştur. Farklı ülkelerden farklı kültürlerden arkadaşlık edinmelerine, farklı kültürleri tanımalarına olanak sağlamıştır. Ayrıca bu projenin en güzel yanlarından biri ise birbirlerine karpotal ve tişört göndererek bu projeden kendilerine kalıcı, unutulmaz bir hatıra kalmıştır ve güzel dostluklar kurulmasını sağlayan bir adım atılmıştır. Öğretmenler açısından da bu proje disiplinler arası çalışma disiplini kazandırarak, kişisel ve mesleki gelişimine katkı sağlamıştır.

Bilgilendirme:

Yapılan tüm çalışmalar sonucunda da ilimizde gerçekleştirilen 10. Etwinning kutlama programında projemizi hem sunum yaparak hem de faaliyetlerimizi sergileyerek tanıtmak imkanı elde ettik. Sonrasında projemiz ilk büyük başarısını Ulusal Kalite etiketi olarak elde etti. Ardından başarısını taçlandırarak Avrupa Kalite Etiketi aldı. Yaptığımız proje çalışmalarının MEB Ulusal Destek Servisi tarafından beğenilmesi sonucunda proje koordinatörü Matematik öğretmeni Ayşe ŞİMŞEK Polonyo'da düzenlenen Professional Development Workshop'una gönderildi.



SELÇUKLU ve İSLAM SÜSLEME SANATINDA DÜZLEMSEL SİMETRİ GRUPLARI

N. AKKAYA

B. MOĞOL

Gökhan KARAASLAN

BURDUR BİLİM VE SANAT MERKEZİ

Amaç

Bu projede Selçuklu, Osmanlı ve çeşitli Türk İslam devletleri ve beylikleri zamanında yapılan mimari eserlerde kullanılan geometrik şekiller analiz edilmeye çalışılmıştır.

Bu süslemelerde yer alan düzlemsel simetri gruplarını belirlemek projenin amacını oluşturmaktadır.

Projede incelenen eserlerin yapılış yılı ve hangi devlet tarafından yapıldığı ile kullanılan simetri grupları arasında bir ilişki olup olmadığı da incelenmiştir.

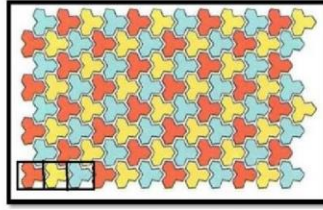
Problem Durumu

İslam dininde insan ve hayvan tasvirinin yasak olması ve geometri bilimine önem verilmesi süsleme sanatında geometrik şekillerin ağırlıklı olarak kullanılmasını sağlamıştır.

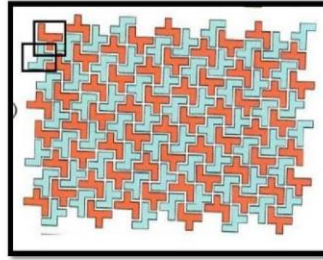
Selçuklu ve İslam süsleme sanatında kullanılan kaplamalar daha önce pentapleks kaplamalar açısından incelenmiştir. Ancak bu kaplamaların düzlemsel simetri grupları ile ilgili bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu kaplamalar oluşturulurken hangi simetri işlemlerinin kullanıldığı, bu işlemlere göre kaplamalar hangi simetri grubuna ait olduğu projede cevaplandırılmak istenen sorulardır.

Eğer bir kaplamanın belirli bir kısmı, iki farklı doğrultuda, sabit bir mesafede gidip devamlı kendini tekrarlıyorsa bu kaplama periyodik kaplamadır. Bir motif, ÖTELEME, YANSIMA, DÖNME ve ÖTELEMELİ YANSIMA işlemleri ile örüntü içerisinde başka bir konuma getirilebilir. Bu işlemlere simetri örüntüleri denir. Bir kaplamanın simetrisinin oluşturduğu kümeye o kaplamanın simetri grubu denir.

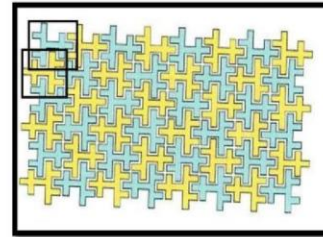
Yöntem ve Bulgular



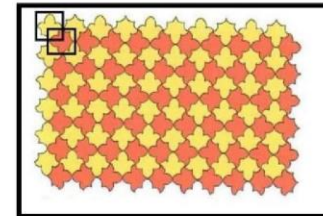
Sivas İzzettin Keykavus Kümbeti (1217), Anadolu Selçuklu Devleti (p1 Simetri Grubu)



Aksaray Sultan Hanı (1229), Anadolu Selçuklu Devleti (p2 Simetri Grubu)



Buhara Ribat-ı Melik (1079), Karahanlılar (pgg Simetri Grubu)



İspanya Elhama Sarayı (1338-1390), Beni Ahmer Sultanlığı (cmm Simetri Grubu)

Kaplamaların sınıflandırılmasında 17 farklı simetri grubu vardır.

Yan sütundaki şekillerin ait olduğu simetri gruplarının özellikleri şu şekildedir.

p1	Yalnızca birbirinden bağımsız iki öteleme simetrisi
p2	Yalnızca 180 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme
p6	180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki ötelemeli yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
cmm	180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki yansıma ve iki ötelemeli yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme

Çalışma kapsamında Selçuklu ve İslam Devletleri tarafından yapılmış eserlerde yer alan 22 kaplama incelenmiştir. Bu kaplamalarda yer alan simetri grupları p1, p2, p3, pgg ve cmm'dir.

9 eserde cmm, 4 eserde p1, 4 eserde p2, 4 eserde p3 ve 1 eserde pgg simetri grubu vardır.

Sonuç

Bu çalışma sonucunda Selçuklu ve İslam süsleme sanatında kullanılan kaplamaların düzlemsel simetri grupları belirlenmiştir. 17 simetri grubundan 5 tanesinin kullanıldığı görülmüştür.

Eserlerin simetri grupları ile yapıldığı tarih ve yaptıran devlet arasında bir ilişkiye rastlanmamıştır.

Kaynaklar

- Anık, M. ve Sancak, M. (2012). *Pentapleks Kaplamalar* (2. Bk), Ankara: Tubitak.
- Jensen D. W. & Harvey, R. G. (1988). *Plane Symmetry Groups*. United States Air force Academy, Colorado.
- İpek, J. ve Özmiş, P. (2014). Anadolu Süslemelerindeki Geometri. *Ege Eğitim Dergisi*, 2 (15), 521-537.
- Yazıcı, E. Y. (2011). *Matematikten Sanata Yansımalar*: M. C. Escher. *Sanat ve Tasarım Dergisi*, 2 (8), 59-75.

Proje adı: Selçuklu ve İslam Süsleme Sanatında Düzlemsel Simetri Grupları

Projede yer alan öğrenciler: N. Akkaya & B. Moğol
(Burdur Bilim ve Sanat Merkezi)

Proje danışmanı: Gökhan Karaaslan (Burdur Bilim ve Sanat Merkezi & Matematik Öğretmeni)

Projenin katıldığı yarışma: Matematik Derneği 2. Türkiye Matematik

Proje ve Materyal Olimpiyatları (PROMAT 2016)

Projenin aldığı derece: Altın Madalya

SELÇUKLU ve İSLAM SÜSLEME SANATINDA DÜZLEMSEL SİMETRİ GRUPLARI

N. AKKAYA

B. MOĞOL

Danışman Öğretmen

Gökhan KARAASLAN

PROJENİN AMACI

Projemizde Selçuklu, Osmanlı ve çeşitli Türk İslam devletleri ve beylikleri zamanında yapılan mimari eserlerde kullanılan süslemelerdeki geometrik şekilleri analiz etmeye odaklandık.

Bu süslemelerde yer alan düzlemsel simetri gruplarını belirlemek projemizin amacını oluşturmaktadır. Ayrıca projemizde eserlerin yapılış yılı ve hangi devlet tarafından yapıldığı ile kullanılan simetri grupları arasında bir ilişkinin varlığı da incelenecektir.

GİRİŞ

Matematik bir düşünme yoludur, sanattır, yapıların ve ilişkilerin bir çalışmasıdır. İslam dininde insan ve hayvan tasvirinin yasak olması ve geometri bilimine önem verilmesi süsleme sanatında geometrik şekillerin ağırlıklı olarak kullanılmasını sağlamıştır. İslam sanatında saray, cami, mescit, medrese, han, kervansaray, türbe ve mezar taşı yüzeylerinin süslenmesinde geometrik şekiller sıkça kullanılmaktadır. Eğer bir kaplamanın belirli bir kısmı, iki farklı doğrultuda, sabit bir mesafede gidip devamlı kendini tekrarlıyorsa bu kaplama periyodik kaplamadır.

Selçuklu süsleme sanatında periyodik kaplanabilen eşkenar üçgen, kare ve düzgün altıgen şeklindeki tek tür geometrik karolar ile pek çok periyodik kaplama yapılmıştır. İki veya daha fazla türde karo kullanarak çok çeşitli kaplamalar yapılabildiğinden Selçuklu ve İslam sanatında birçok kaplama bu şekilde yapılmıştır (Arık ve Sancak, 2012).

Motif kaplama geometrik şekillere uygulanan bir dönüşüm olduğu için geometrik bir uğraştır (Altun, 2009). Bir motif, “öteleme”, “yansıma”, “dönme” ve “ötelemeli yansıma” işlemleri ile örüntü içerisinde başka bir konuma getirilebilir. Bu işlemlere simetri örüntüleri denir. Verilen bir dizi matematik işlem sonucunda (öteleme, dönme, yansıma) bir nesneden diğer elde ediliyorsa bu iki nesne birbirine göre simetrik (Mainzer, 2005; Akt. Yazıcı, 2011).

Simetri örüntüleri birden fazla yönde düzenli aralıklarla tekrar eden motiflerden oluşmaktadır. Öteleme işleminde motif, düzlem içerisinde bir doğrultu boyunca kaydırılmaktadır. Dönme işleminde motif, düzlem üzerinde bir nokta etrafında dairesel bir hareketle döndürülmektedir.

Yansıma işleminde motif, düzlem üzerinde tanımlanan bir doğrultuya göre yansıtılmaktadır. Ötelemeli yansıma işleminde motifle aynı öteleme ve yansıma işlemleri uygulanmaktadır (Yazıcı, 2011).

Simetri örüntülerinde 17 farklı düzlemsel simetri grubu kullanılabilmektedir (Schattschneider, 1978; Akt. Yazıcı, 2011). Bu simetri grupları Yöntem bölümünde Tablo-1’de açıklanmaya çalışılmıştır.

Arık ve Sancak (2012) pentapleks kaplamaları incelediği kitaplarında Selçuklu ve İslam süsleme sanatındaki geometrik şekilleri tanıtmıştır. Bu çalışmada tanıtılan süslemeler Pentapleks kaplamalar açısından incelenmiştir.

İpek ve Özmüş (2014), Anadolu süslemelerindeki geometri başlıklı çalışmalarında süslemelerde yer alan şekilleri GSP yazılımı ile öğrencilere oluşturmuşlar ve bunun öğrencilerin yaratıcılıklarına olumlu bir etkisinin olduğunu gözlemlemişler.

Yazıcı (2011) ise matematikten sanata başlıklı çalışmasında Escher’in tablolarındaki düzlemsel simetri gruplarını incelemiştir.

Bu projede ise Selçuklu ve İslam sanatındaki süslemeler düzlemsel simetri gruplarına göre analiz edilecektir.

YÖNTEM

Bu çalışmada Selçuklu ve İslam devletlerinde (beyliklerinde) yapılmış 22 mimari eserde yer alan süslemeler düzlemsel simetri gruplarına göre incelenmiştir. Anadolu Selçuklu Devleti’nden 12, Osmanlı Devleti’nden 1, Mengüçlü Beyliği’nden 2, İlhanlı Devleti’nden 2, Karahanlılar’dan 1, Saltuklu Beyliğinden 1, Karakoyunlulardan 1 ve Beni Ahmer Sultanlığı’ndan 2 tane süsleme çalışmada yer almaktadır. Süslemelerde kullanılan simetri grupları ile eserlerin yılları ve hangi devletler tarafından yapıldığı ile ilişkisinin varlığı da incelenmiştir.

Mimari eserlerin süslemesinde kullanılan geometrik şekillerin resimlerinin alındığı kaynakta, şekiller orijinalliği bozulmayacak şekilde derzli gösterilmiştir. Ayrıca pek çok geometrik süslemedeki karolar renksizdir ancak resimlerin alındığı kaynak geometrik şekilleri renkli göstermenin daha yararlı olduğunu belirtmiştir (Arık ve Sancak, 2012). Biz de projemizde şekilleri renkli olarak verdik.

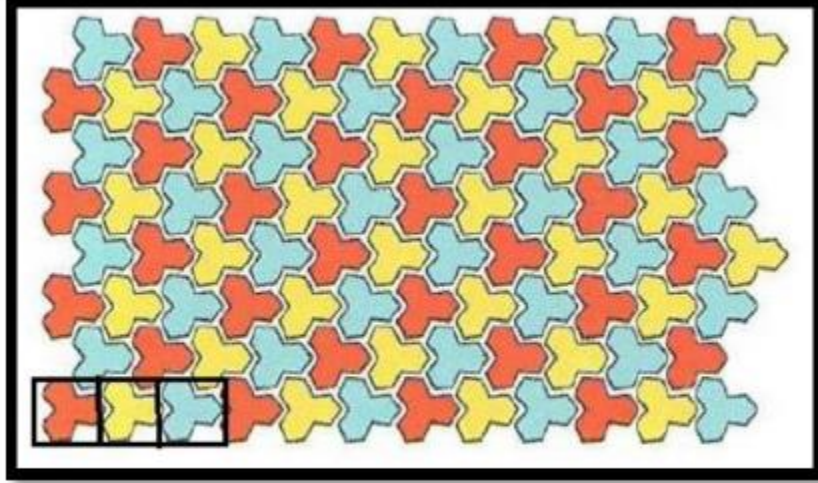
Öteleme, yansıma, dönme ve ötelemeli yansıma işlemlerinin kullanıldığı düzlemsel simetri grupları Tablo-1’de açıklanmıştır.

Tablo 1: Düzlemsel Simetri Grupları

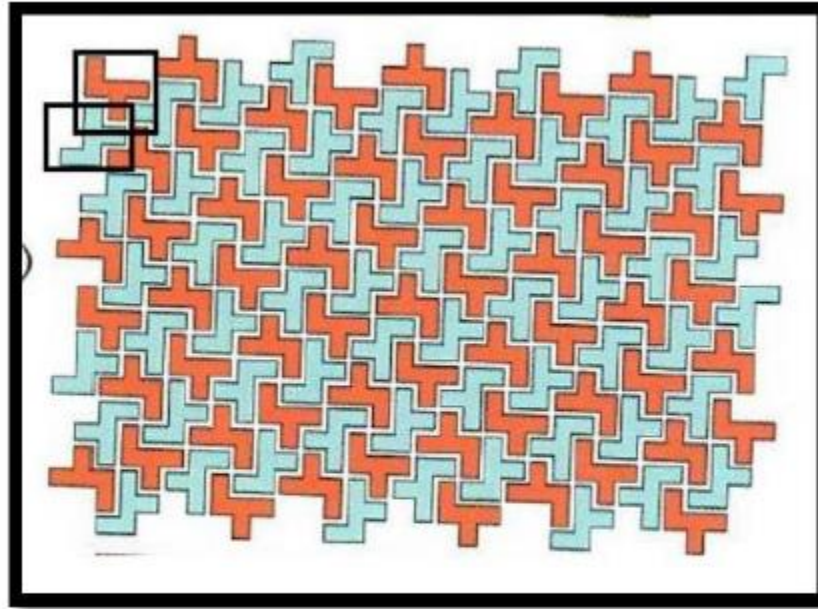
Şekil No	Simetri Grubu	Kullanılan İşlemler
1	p1	Yalnızca birbirinden bağımsız iki öteleme simetrisi
2	p2	Yalnızca 180 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme
3	pm	Birbirlerine paralel doğrularda olan iki yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
4	pg	İki adet paralel doğrultuda ötelemeli yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
5	cm	Bir yansıma simetrisi ile ona paralel olan bir Ötelemeli yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
6	pmm	180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
7	pmg	180 derecelik bir döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultuda bir yansıma ve bir ötelemeli yansıma simetrisi ve iki bağımsız öteleme
8	pgg	180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki ötelemeli yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
9	cmm	180 derecelik döndürme simetrisinin yanında birbirlerine dik doğrultularda iki yansıma ve iki ötelemeli yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
10	p4	90 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme
11	p4m	90 derecelik döndürme simetrisi yanında 45-45-90 üçgeninin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
12	p4g	90 derecelik döndürme simetrisi yanında karenin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
13	p3	120 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme
14	p3m1	120 derecelik döndürme simetrisi ile Eşkenar üçgenin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
15	p31m	120 derecelik döndürme simetrisi yanında döndürme merkezi yansıma doğruları üzerinde olmayan bir 120 derecelik döndürme simetrisi ile yine eşkenar üçgenin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme
16	p6	Yalnızca 60 derecelik döndürme simetrisi ve bağımsız iki öteleme
17	p6m	60 derecelik döndürme simetrisi yanında 30-60-90 üçgeninin kenarları doğrultusunda yansıma simetrisi ve bağımsız iki öteleme

BULGULAR

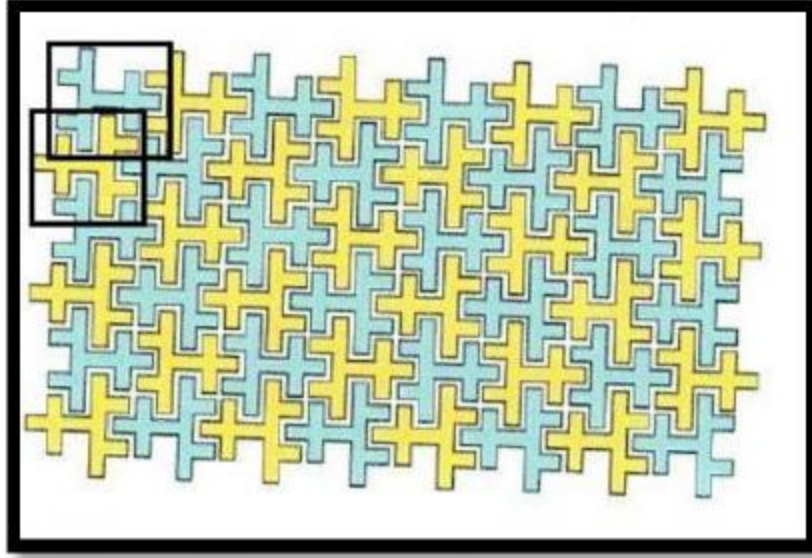
Araştırma kapsamında Selçuklu ve İslam devletlerindeki süslemelerde yer alan düzlemsel simetri grupları belirlenmiştir. Bu süslemelerde yer alan simetri grupları $p1$, $p2$, $p3$, pgg ve cmm 'dir. Bunların hepsine birer örnek aşağıda yer almaktadır.



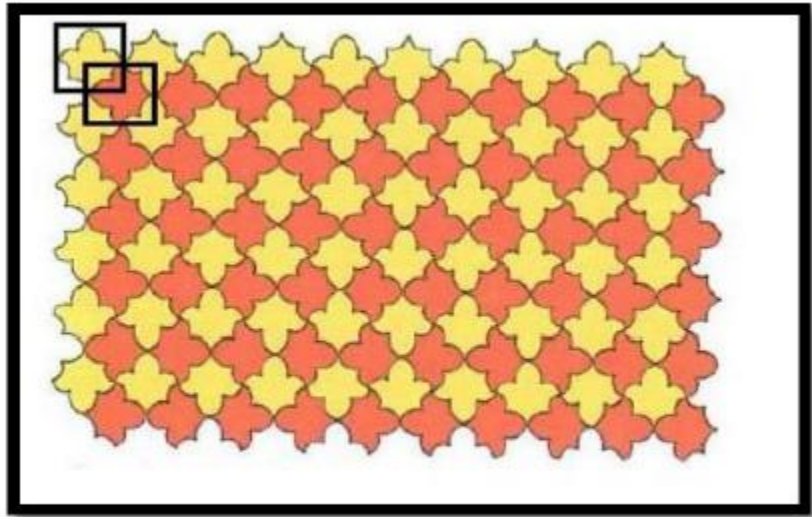
Sivas İzzettin Keykavus Kümbeti (1217),
Anadolu Selçuklu Devleti ($p1$ Simetri Grubu)



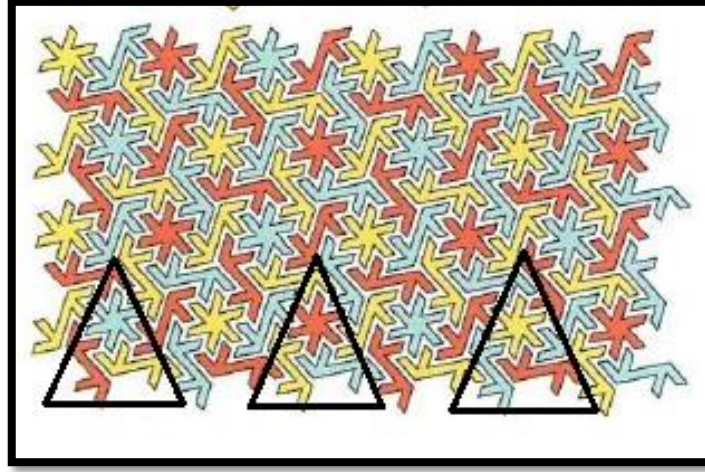
Aksaray Sultan Hanı (1229), Anadolu Selçuklu
Devleti ($p2$ Simetri Grubu)



Buhara Ribat-ı Melik (1079), Karahanlılar
(pgg Simetri Grubu)



İspanya Elhamra Sarayı (1338-1390), Beni
Ahmer Sultanlığı (cmm Simetri Grubu)



KONYA Sırçalı Mescit (1242-1243), Anadolu Selçuklu Devleti (p3 simetri grubu)

SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Çalışma kapsamında Selçuklu ve İslam Devletleri tarafından yapılmış eserlerde yer alan 22 kaplama incelenmiştir. 9 eserde cmm, 4 eserde p1, 4 eserde p2, 4 eserde p3 ve 1 eserde pgg simetri grubu vardır.

Projede incelenen süslemelerde kullanılan düzlemsel simetri gruplarını devletlere göre incelediğimizde de bir ilişki bulunamamıştır.

Projemizin asıl amacı Selçuklu ve İslam sanatındaki süslemelerin düzlemsel simetri gruplarını belirlemektir. Ancak incelenen bu süslemelerin sayısı artırılıp yıllar ve devletlerarasındaki ilişki tekrar incelenebilir. Ayrıca bu süslemeler dinamik geometri yazılımları ile oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

- Altun, M. (2009). *Liselerde Matematik Öğretimi* (3.bs) . Bursa: Aktüel Alfa Akademi.
- Arık, M ve Sancak, M (2012). *Pentapleks Kaplamalar* (2. Bs). Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitapları.
- İpek, J. ve Özmüş, P. (2014). Anadolu Süslemelerindeki Geometri. *Ege Eğitim Dergisi*, 2 (15), 521-537.
- Yazıcı, E., Y. (2011). Matematikten sanata yansımalar: M. C. Escher. *Sanat ve Tasarım Dergisi*

PROJE ADI: POZİTİF BÖLENLERİN SIRRI

AMAÇ: 1) Bir sayının pozitif bölenlerinden biri diğerini tam bölecek şekilde kaç tane sıralı ikili oluşturur?

2) Bir sayının pozitif bölenlerinden kaç tanesi aralarında asaldır? sorularına yanıt olabilecek pratik çözümler üretmek.

GİRİŞ: Öncelikle çalışmamıza zambak yayınları olimpiyat matematik soru bankasındaki bir sayının pozitif bölenlerinden biri diğerini tam bölecek şekilde kaç tane sıralı ikili oluşturur sorusu ile başladık. Bizde “Acaba bir sayının pozitif bölenlerinden kaç tanesi biri diğerini tam olarak böler?” ve “Bu sayıyı formüleştirebilir miyiz?” diye düşünüp projemize başladık.

KULLANILAN YÖNTEM:

1.Adım: 40 sayısının pozitif bölenleri:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

a sayısı b sayısını tam bölecek şekilde kaç farklı durum olduğunu yazalım. (b,a)

(1, 1)	(1, 2)	(2, 4)	(5, 10)
(2, 2)	(1, 4)	(2, 8)	(5, 20)
(4, 4)	(1, 5)	(2, 10)	(5, 40)
(5, 5)	(1, 8)	(2, 20)	(8, 40)
(8, 8)	(1, 10)	(2, 40)	(10, 20)
(10, 10)	(1, 20)	(4, 8)	(10, 40)
(20, 20)	(1, 40)	(4, 20)	(20, 40)
(40, 40)		(4, 40)	

Olmak üzere 30 tanedir. Peki bu 30 sayısını nasıl elde ederiz?

Önce 40 sayısını çarpanlarına ayıralım:

40 |2

20 |2

10 |2

5 |5

1

$$40 = 2^3 \cdot 5^1$$

(__ , __) sıralı ikililerinin tam bölünebilmesi için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$(2^3, 2^3)$: Yani birinci sayıda 2^3 varsa ikinci sayıda da olması bu sayının birbirini tam böldüğünü gösterir.

$(2^3, 2^3)$	$(2^1, 2^0)$	$(5^1, 5^1)$
$(2^3, 2^2)$	$(2^0, 2^0)$	$(5^1, 5^0)$
$(2^3, 2^1)$		$(5^0, 5^0)$
$(2^3, 2^0)$		
$(2^2, 2^2)$		
$(2^2, 2^1)$		
$(2^2, 2^0)$		
$(2^1, 2^1)$		

2'nin kuvveti şeklinde 10 durum, 5'in kuvveti şeklinde 3 durum var ve bu durumlar birbirine bağlı olduğundan $10 \cdot 3 = 30$ durum vardır.

Bu durumu genellersek ; x üssü a . y üssü b şeklindeki ifadelerin pozitif bölenlerinin biri diğerini bölecek şekilde ;

$$\frac{(a+1) \cdot (a+2)}{2} \cdot \frac{(b+1) \cdot (b+2)}{2}$$

Şeklinde yazabiliriz. Deneyelim ;

$$\frac{(a+1) \cdot (a+2)}{2} \cdot \frac{(b+1) \cdot (b+2)}{2} = \frac{(3+1) \cdot (3+2)}{2} \cdot \frac{(1+1) \cdot (1+2)}{2}$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$= 10 \cdot 3$$

$$= 30$$

2.Adım:

40 sayısının pozitif bölenlerini tekrar yazalım;

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 \quad 40 = 2^3 \cdot 5^1$$

Bu sayılarda aralarında asal olanlarını yazalım:

$$(1, 2) \quad (2, 5)$$

$$(1, 4) \quad (4, 5)$$

$$(1, 5) \quad (8, 5)$$

$$(1, 8)$$

$$(1, 10)$$

$$(1, 20)$$

$$(1, 40)$$

1 ile aralarında asal olan sayılar pozitif bölen sayısının 1 eksiği kadardır. Yani;

$$= (3+1) \cdot (1+1) - 1$$

$$= (4 \cdot 2) - 1 = 7 \text{ tanedir.}$$

Diğer sayılar da üslerin çarpımı kadardır. Yani;

$$3 \cdot 1 = 3 \text{ tanedir.}$$

Bu durumu x üssü a . y üssü b şeklinde olan sayıların pozitif bölenlerinin kaç tanesi aralarında asaldır bulmak için şöyle genelleyebiliriz:

$$(a+1) \cdot (b+1) - 1 + ab$$

$$ab + a + b + 1 - 1 + ab$$

$$= 2ab + a + b$$

Deneyelim ;

$$= 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 + 1 = 10 \text{ tanedir.}$$

Peki sayımız x üssü a . y üssü b . z üssü c şeklinde olsaydı kaç tane arasında asal sayı olurdu bakalım :

$$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$$

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

$$(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) - 1 + ab + ac + bc + abc + abc + abc = (ab + a + b + 1) \cdot c + 1 = abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 - 1 + ab + ac + bc + abc + abc + abc = 4abc + 2ab + 2ac + 2bc + a + b + c = 4abc + 2(ab + ac + bc) + a + b + c$$

Biraz daha arttıralım:

$$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 210$$

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210$$

$$(1, 2) \quad (1, 70) \quad (3, 10) \quad (7, 15)$$

$$(1, 3) \quad (1, 105) \quad (3, 14) \quad (7, 30)$$

(1, 5)	(1, 210)	(3, 35)	(10, 21)
(1, 6)	(2, 3)	(3, 70)	(4, 15)
(1, 7)	(2, 5)	(5, 6)	
(1, 10)	(2, 7)	(5, 7)	
(1, 14)	(2, 15)	(5, 14)	
(1, 15)	(2, 21)	(5, 21)	
(1, 21)	(2, 35)	(5, 42)	
(1, 30)	(2, 105)	(6, 7)	
(1, 35)	(3, 5)	(6, 35)	
(1, 42)	(3, 7)	(7, 10)	

$(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot (d+1) - 1 + ab + ac + ad + bc + bd + cd + 3abc + 3abd + 3dab + 3abc + 7abcd + abc + ab + ac + c + bc + b + c + 1 \cdot (d+1) + abcd + abc + abd + cb + acd + ac + ad + a + bcd + bc + bd + b + cd + c + d + 1 - 1 + ab + ac + ad + bc + bd + cd + 3 (abc + abd + dcb + acd) + 7abcd$

$$= 8(abcd) + 4(abc + abd + bcd + acd) + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + a + b + c + d$$

Sanırım formül son halini alacak. Bu durumu son olarak asal bölenlerinin sayısı 5 olan için denedik ve aşağıdaki formülü bulduk.

$$16 (abcde) + 8(abcd + abde + abce + acde + bcde) + 4(abc + abd + aeb + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde) + 2(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de) + a + b + c + d + e$$

Formülümüzdeki kat sayıların $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ şeklinde ilerlediğine dikkat edelim!(n: Bir sayının asal çarpan sayısı)

BÜTÇE: Herhangi bir maliyeti yoktur.

ÇALIŞMA TAKVİMİ: Proje konusunun seçilmesi (Kasım 2012)

Literatür incelemesi(Aralık 2012)

Aralarında asal sayıların sayısı(Aralık 2012)

Sonuçları ortaya koymak (Ocak 2013)

Proje yazımı(Ocak 2013)

SONUÇ: 1) Bir sayının pozitif bölenlerinden biri diğerini bölecek şekilde kaç tane sıralı ikili oluşturacağını bulmak için; sayı asal çarpanlarına ayrılmış şekilde yazılır. Sayıların üssünün 1 fazlası ile 2 fazlasının çarpımının yarısı alınarak bulunur. Sembol ile gösterecek olursak; X üssü a. Y üssü b şeklindeki sayı için $(a+1) \cdot (a+2)/2 \cdot (b+1) \cdot (b+2)/2$ ifadesi kullanılır.asal çarpan sayısı arttıkça formülde diğer çarpana c,d,e... şeklinde sayılar verilip devam ettirilebilir.

2) Bir sayının pozitif bölenlerinden kaç tanesinin aralarında asal olduğunu bulabilmek için; x üssü a . y üssü b şeklinde olan sayılar için

$$2ab + a + b$$

x üssü a . y üssü b . z üssü c şeklinde olan sayılar için

$$4abc + 2(ab + ac + bc) + a + b + c$$

Şeklinde devam eder. (asal bölenlerinin sayısına göre)

3) Bir sayının pozitif bölenlerinin kaç tanesinin aralarında asal olduğunu bulurken katsayılar 2^n 'nin kuvveti şeklinde ilerlemektedir.

SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ: Bu proje ile bir sayının pozitif bölenlerinin sırlarını aralamış olduk. Bulduğumuz formüllerin soruların çözümünde işimizi büyük ölçüde kolaylaştıracağını düşünmekteyiz.

DANIŞMAN ÖĞRETMEN: MENEKŞE ARKAN ALTAN

ÖĞRENCİLER: A. KUZU

S. E. ÇETİNKAYA

PROJE ADI: SIFIRSIZ FAKTÖRİYEL

AMAÇ: N FAKTÖRİYEL SAYISININ SONUNDAKİ SIFIRLARI ATINCA KALAN SON RAKAMI BULMAK

GİRİŞ: Faktöriyel konusunda kitaplarda genellikle sondan kaç basamağının sıfır olduğunu soran soru tipleri yer alıyordu.acaba sıfırlar olmasa son rakamın ne olduğunu merak ettim ve araştırmaya başladım.

KULLANILAN YÖNTEM:

1. YÖNTEM: Öncelikle hesap makinesi ile sayıların faktöriyelerinin sonundaki sıfırları atarak kalan sayıların son rakamını bulup 10x10' luk tabloya yerleştirdim daha sonra her bir sütuna birden ona kadar numara verdim aşağıda tablo görülmektedir. Tabloda bir yöntem geliştirdim.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	6	24	2 (5)	2	4	2	8	(1) 8
8	6	8	32	8 (15)	8	6	8	2	(2) 4
4	8	4	36	4 (25)	4	8	4	6	(3) 8
8	6	8	32	2 (35)	2	4	2	8	(4) 2
2	4	2	48	6 (45)	6	2	6	4	(5) 2
2	4	2	48	4 (55)	4	8	4	6	(6) 6
6	2	6	24	6 (65)	6	2	6	4	(7) 8
8	6	8	32	4 (75)	4	8	4	6	(8) 8
8	6	8	32	2 (85)	2	4	2	8	(9) 2
2	4	2	48	6 (95)	6	2	6	4	(1) 4

Yöntem şu şekilde ilerliyor: bir sayıyı alırız, sayının bir sonraki sütununun üstünde yer alan sayıyı çarpıp, bir sonraki satırdaki sayıyı buluruz. örnek verecek olursam;

Mesela 52! sayısının sonunda tabloya bakarsak 4 olduğunu görürüz. Bir sonraki sayının son rakamını bulmak için hemen sağ sütun üstteki sayıya bakalım, orada da 3 var. $4 \times 3 = 12$ olduğundan 53! sayısının son rakamının 2 olduğunu buluruz.

Bu kuralı 5'in katları olan 5. ve 10. sütun bozmaktadır. 10. sütunun değerini bulmak için sağ üst sayı ile çarpılmaz içerisinde yazılı olan sayı ile çarpılır. Çünkü 10,20,30..... gibi sayılarla çarparken sıfırları atarsak geriye kalan sayı her basamakta farklıdır. 5. sütunu bulmak için ise sonu 4 ile biten faktöriyelleri iki basamaklı olarak yazıp sayıları ise sağ üstteki sayı ile değil 15,25,35.... ile çarpılır. onuda yuvarlakların içine çizerek belirttim.

2. YÖNTEM: Yöntemimden adım adım bahsedeyim. Önce asal sayılarım değil benim ifadem ile “faktörsal” sayılarım var. bunlar asal sayıların son basamağında 1 olanları çıkarınca geriye kalan sayılardır. Önce bu sayılardan biraz yazalım:

FAKTÖRSAL SAYILAR:

2,3,5,7,13,17,19,23,29,37,43,47,53,59,67,73,79,83,89.....şeklinde devam eder.

Şimdi De Tablomuzu Yapalım:

SONU.. OLAN	2	3	7	9
4K+1	2	3	7	9
4K+2	4	9	9	1
4K+3	8	7	3	9
4K	6	1	1	1

Evet, adım adım işlemleri yazalım:

- 1) Önce faktöriyeli verilen sayıya kadar olan faktörsal sayılar belirlenir.
- 2) 2 ve 5 sayılarının bölenler toplamının farkı alınıp tablodaki 2 sütunundan değeri bulunur.
- 3) Sayılar kalanları önemsemeksizin faktörsal sayılara bölümünden bölenler toplamı alınır.
- 4) Tabloda bölenler toplamına karşılık gelen değerler çarpılarak sıfırsız şekilde son basamağı bulunmuş olur.

Hemen Bir Örnek Yapalım:

85! sayısının sonundaki sıfırlar atılınca kalan son sayı kaçtır?

1) 85'e Kadar Olan Faktörsal Sayılar:

2,3,5,7,13,17,19,23,29,37,43,47,53,59,67,73,79,83

2) 85'i 2 ye Bölelim, Bölenlerini Toplayalım:

$$42+21+10+5+2+1= 81$$

Şimdi de 5 için yapalım:

$$17+ 3= 20$$

$$81-20= 61 \text{ (4'e bölümünden kalan 1 'Bir)}$$

3) 3'e Bölelim :

$$28+9+3+1=41 \text{ (4'e Bölümünden Kalan 1)}$$

7'ye Bölelim:

$$12+1= 13 \text{ (4'e Bölümünden Kalan 1)}$$

13'e Bölelim:

$$6 \text{ (4'e Bölümünden Kalan 2)}$$

17'ye Bölelim:

$$5 \text{ (4'e Bölümünden Kalan 1)}$$

19'a Bölelim:

$$4 \text{ (4'e Bölünür)}$$

23'e Bölelim:

$$3$$

29'a Bölelim:

$$2$$

37'ye Bölelim:

$$2$$

43'e Bölelim:

$$1$$

47'ye Bölelim:

$$1$$

53'e Bölelim:

$$1$$

59'a Bölelim:

$$1$$

67'ye Bölelim:

$$1$$

73'e Bölelim:

1

79'a Bölelim:

1

83'e Bölelim:

1

4) 2,5,3,7,13,17,19,23,29,37,43,47,53,59,67,73,79,83

2.3.7.9.7.1.7.1.9.3.7.3.9.7.3.9.3=42.63.63.63.27.7.27=18.9=2'dir.

Sürekli birler basamağını çarptık.

BÜTÇE: Maliyeti yoktur.

ÇALIŞMA TAKVİMİ: Kasım ve aralık ayında literatür tarandı, proje konusuna karar verildi. Ocak ayında çalışma sonlandırılıp, projemiz son şeklini aldı.

SONUÇ: Bu proje ile faktöriyel konusunda daha önce bahsedil-memiş bir yönüne değinmiş oldum.

Bir faktöriyelin sonundaki sıfırları atınca geriye kalan sayının birler basamağını bulmak için iki yöntem geliştirdim.

1. Yöntemde yüzlük tablo hazırladım ve her sayıyı sağ sütun üstteki sayı ile çarptığımızda bir sonraki sayının sıfırları atılınca birler basamağının kaç olduğu bulunmuş olur.
2. Yöntemde asal sayılardan sonu 1 ile bitenleri çıkarırsak faktörsal sayıları bulmuş oluruz. Yukarıda bahsedilen 4 adımı uyguladığımızda ise sonucumuza ulaşmış oluruz.
1. Yöntemdeki tabloya dikkat edersek bir sayının sonundaki sıfırları atınca geriye kalan sayının birler basamağı sonu 5 ile biten sayının kaç ise kendisinden sonra gelen sonu 6 ile biten sayının sonu da aynıdır.(mesela 65! in sonu ne ise 66! sayısının sonu da aynıdır.)
2. Yine tabloya dikkat edersek sonu 1 ile biten sayının faktöriyelinin sonu kaç ise 2 sonrasında sonu 3 ile biten sayının sonu da aynıdır.(Mesela 41! sayısının sonunda kaç var ise 43! sayısının sonu da aynıdır.)
3. Sonu 6 ile biten sayının sonu kaç ise 8 ile biten sayının sonu da odur.

SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ: Sonuç olarak faktöriyel konusunda 1 den n' ye kadar olan sayıların tamamını çarpıp sıfırlarını atıp birler basamağını bulmaktansa bu iki yöntemin konuyu biraz aydınlatacağını düşünüyorum.

Danışman Öğretmen : Menekşe ARKAN ALTAN
Öğrenci : E. B. ERDOĞAN

DANIŞMAN ÖĞRETMEN: MENEKŞE ARKAN ALTAN

ÖĞRENCİ: O. BAHAR

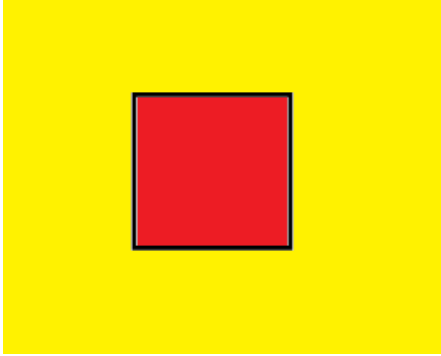
DÜZLEMDEKİ EŞ KARELER VE SAYMA YÖNTEMLERİ

PROBLEM: BİR DÜZLEMDE EŞ KARELERİN OLUŞTURACAĞI KESİM NOKTASI SAYISI VE BÖLGE SAYISI ARASINDA İLİŞKİ VAR MIDIR?

AMAÇ : BİRBİRİNE EŞ KARELERİN OLUŞTURDUĞU KESİM NOKTASI SAYISI VE BÖLGE SAYISINI BULURKEN SAYMA YÖNTEMİ KEŞFEDEBİLMEK

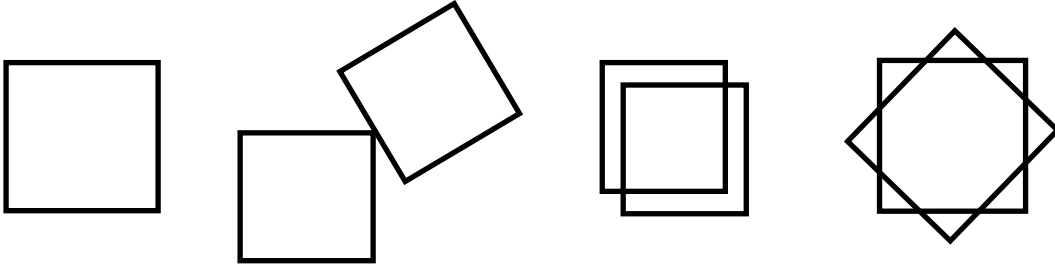
KULLANILAN YÖNTEM:

1. ADIM: 1 KARENİN DÜZLEMDEKİ DURUMUNA BAKALIM:



1 KARE DÜZLEMİ 2 BÖLGEYE AYIRIR .
AYRICA TEK KARE OLDUĞU İÇİN
KESİM NOKTASI DA YOKTUR.

2. ADIM: 2 KARENİN DÜZLEMDEKİ DURUMUNA BAKALIM:



AYRICA 3, 4, 5, 6 VE 7 NOKTADA DA KESİŞİR.

ÇAKIŞIKTIR.

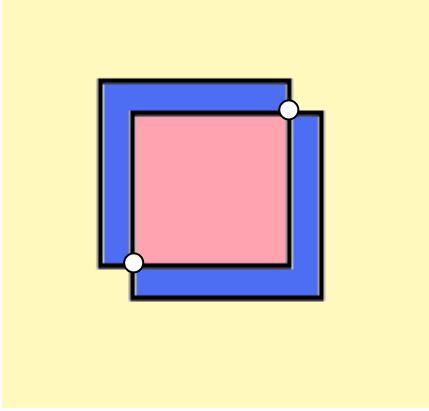
1 NOKTADA KESİŞİR.

2 NOKTADA KESİŞİR.

8 NOKTADA KESİŞİR.

SAYISI VE BÖLGE SAYISININ EN FAZLA OLDUĞU DURUMDAKİ KESİM NOKTASI SAYISINI İNCELEDİM.

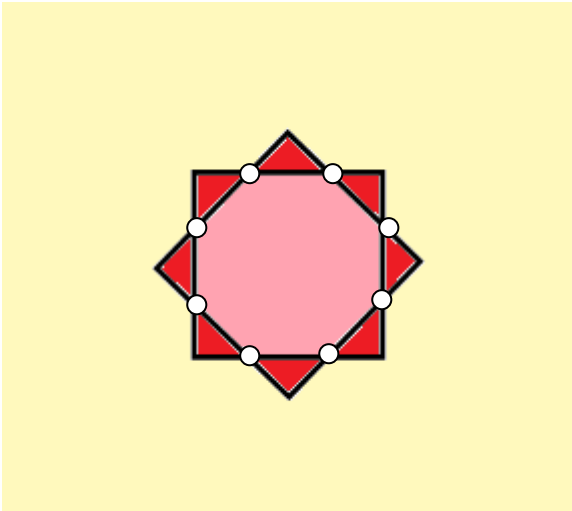
2 NOKTADA KESİŞTİĞİ DURUMU İNCELEYELİM:



KESİM NOKTASI SAYISI: 2

BÖLGE SAYISI: 4

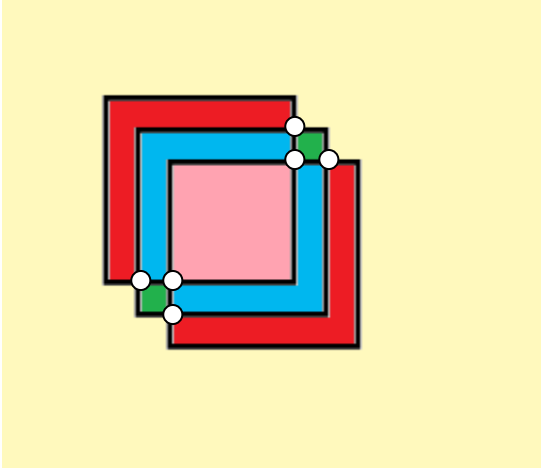
8 NOKTADA KESİŞTİĞİ DURUMU İNCELEYELİM:



KESİM NOKTASI SAYISI: 8

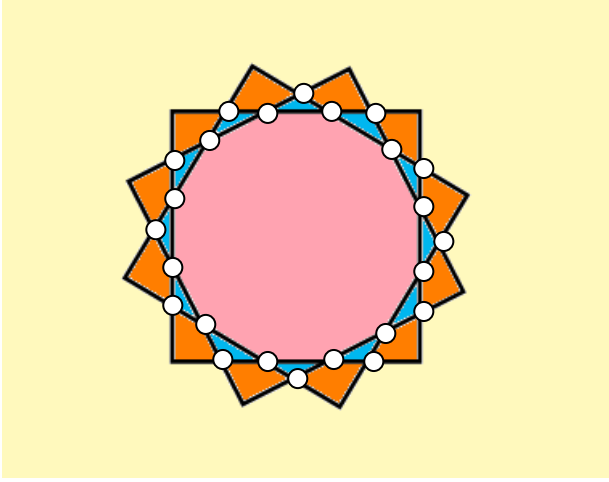
BÖLGE SAYISI: 10

3. ADIM: 3 KARENİN DÜZLEMDEKİ DURUMUNA BAKALIM:



KESİM NOKTASI SAYISI: 6

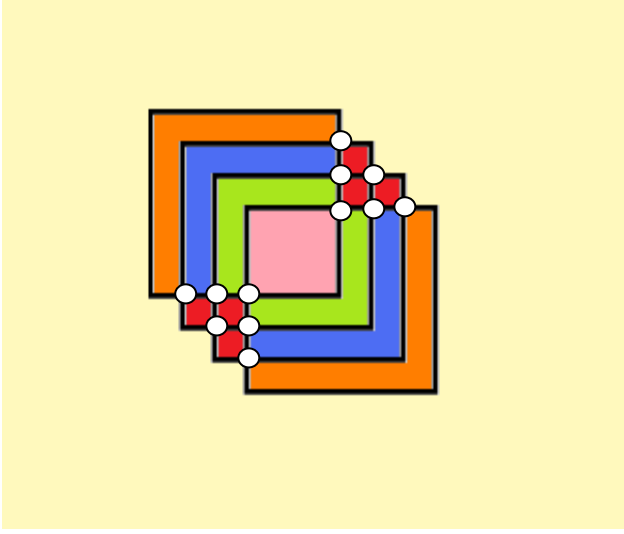
BÖLGE SAYISI: 8



KESİM NOKTASI SAYISI: 24

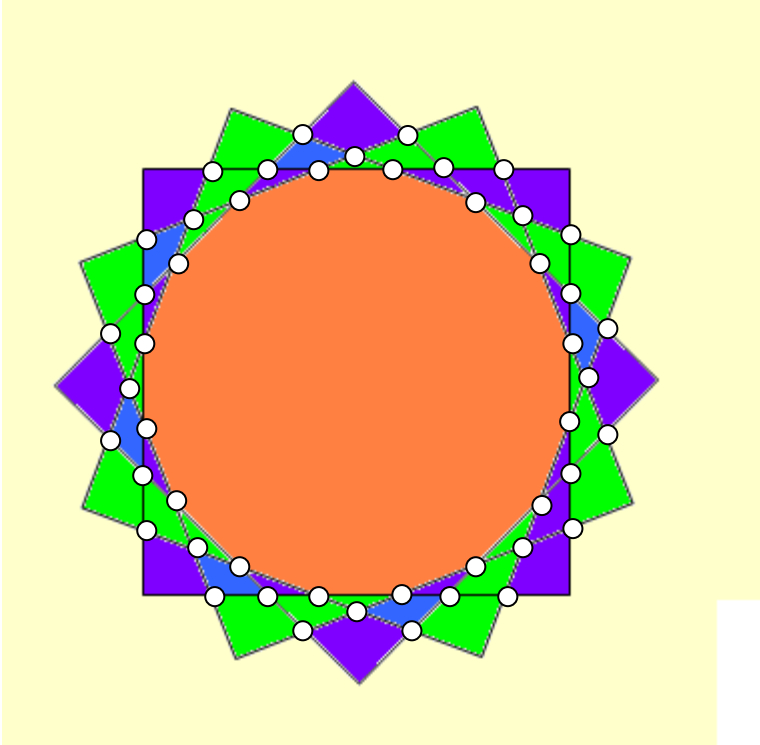
BÖLGE SAYISI: 26

4. ADIM: 4 KARENİN DÜZLEMDEKİ DURUMUNA BAKALIM:



KESİM NOKTASI SAYISI: 12

BÖLGE SAYISI: 14



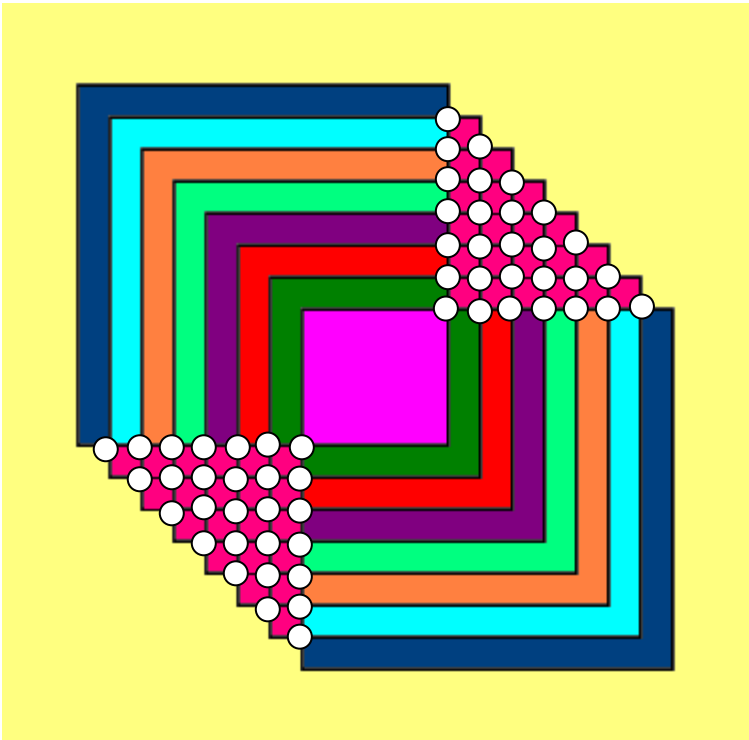
KESİM NOKTASI SAYISI: 48

BÖLGE SAYISI: 50

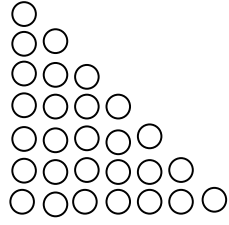
BU ŞEKİLDE ÖRNEKLERİ ÇOĞALTTIK VE AŞAĞIDAKİ TABLOYU OLUŞTURDUM:

KARE SAYISI	KESİM SAYISI 2 OLDUĞUNDA		KESİM SAYISI 8 OLDUĞUNDA	
	KESİM NOKTASI SAYISI	BÖLGE SAYISI	KESİM NOKTASI SAYISI	BÖLGE SAYISI
2	2	4	8	10
3	6	8	24	26
4	12	14	48	50
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
GENEL KURAL	N^2-N	N^2-N+2	$4N^2-4N$	$4N^2-4N+2$

GENEL KURAL BULABİLMEK İÇİN DAHA FAZLA KARE İLE DENEME YAPALIM.
MESELA 8 KARE ;



KESİM NOKTASI SAYISINI BULABİLMEK İÇİN NOKTALARIN DİZİLİMİNE BAKALIM:



$1+2+3+4+5+6+7 = 7 \cdot (7+1) / 2 = 28$ NOKTA VARDIR. **(GAUSS KURALI)**
SİMETRİĞİNDEKİ DE AYNI SAYIDA OLDUĞUNDAN $28 \cdot 2 = 56$ NOKTA VARDIR. 58 DE BÖLGE VARDIR.

O HALDE GENELLEŞTİRELİM:

N: KARE SAYISI DİYELİM; KARE SAYISININ 1 EKŞİĞİ KADAR NOKTALAR 1 DEN BAŞLAYARAK DİZİLMİŞTİR.

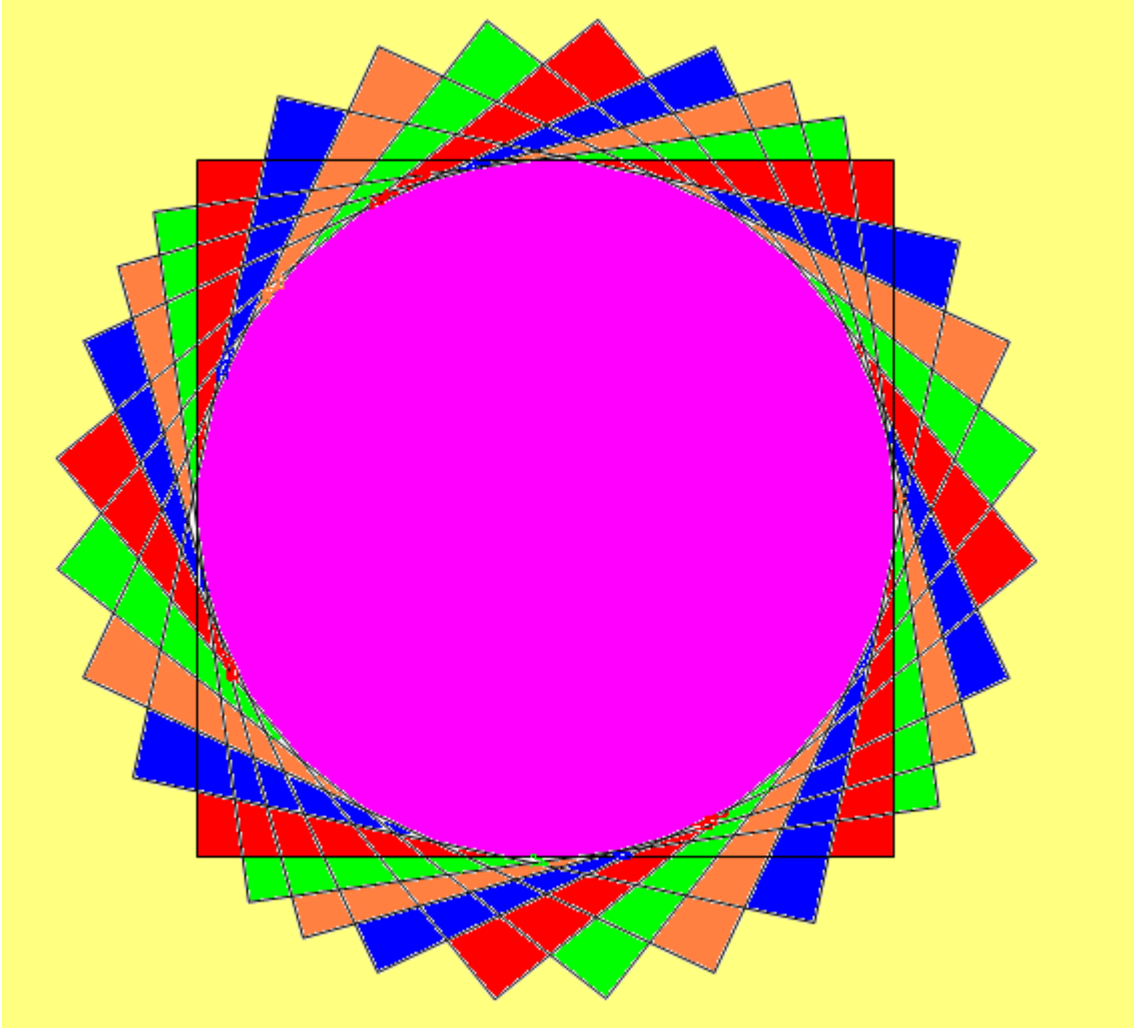
2. $(1+2+3+\dots+(N-1)) = 2 \cdot (N-1) \cdot (N) / 2$ FORMÜLÜNDE GEREKLİ SADELEŞTİRMELERİ YAPARSAK

$(N-1) \cdot N$ VEYA $N^2 - N$ FORMÜLÜNÜ BULURUZ.

BÖLGE SAYISI DA YUKARIDAKİ TABLOYA BAKTIĞIMIZDA 2 FAZLASI OLDUĞUNU GÖREBİLİRİZ.

DOLAYISIYLA BÖLGE SAYISI;

$(N-1) \cdot N + 2$ VEYA $N^2 - N + 2$ FORMÜLÜNÜ BULURUZ.



BU DEFA TERSTEN GİDELİM. YANİ ÖNCE BÖLGE SAYISINI SONRA DA 2 EKŞİLTİP KESİM NOKTASI SAYISINI BULALIM:

BÖLGE SAYISINI BULMAK İÇİN ÖNCELİKLE ORTADAKİ PEMBE BÖLGENİN KAÇGEN OLDUĞUNU BULALIM. DAHA ÖNCEKİ ÖRNEKLERİ DE İNCELEDİĞİMİZDE GÖREBİLİRİZ Kİ ORTADAKİ ÇOKGEN KARE SAYISININ 4 KATI KADARDIR. HERBİR KENARA **SPİRAL** ŞEKLİNDE DOLANMIŞ ÇOKGENLER GÖRMEKTEYİZ Kİ BU ÇOKGEN SAYISI KARE SAYISININ 1 EKŞİĞİ KADARDIR. İÇ BÖLGE VE DIŞ BÖLGE OLMAK ÜZERE İKİ BÖLGEYİ DAHA EKLERSEK OLUŞAN BÖLGE SAYISI;

$4.N.(N-1) + 2$ FORMÜLÜNÜ DÜZENLERSEK **$4N^2-4N+2$** FORMÜLÜNÜ ELDE EDERİZ. KESİM NOKTASI SAYISI İSE İKİ EKŞİĞİ YANİ **$4N^2-4N$** SONUCUNA ULAŞIRIZ.

BULGULAR: DÜZLEMDE EŞ OLAN KARELERİN 2 VE 8 NOKTADA KESİŞMELERİ MÜMKÜNDÜR. BU DURUMLARI İNCELEDİK VE AŞAĞIDAKİ SONUÇLARA ULAŞTIK:

- 1) DÜZLEMDE EŞ KARELERİN HERHANGİ İKİSİNİN KESİŞTİĞİ FAKAT HERHANGİ ÜÇÜNCÜ KARENİN KESİŞMEDİĞİ ZAMAN OLUŞAN EN FAZLA BÖLGE SAYISININ OLDUĞU DURUMLARDA KESİM NOKTASI SAYISI; N OLUŞTURULAN KARE SAYISI OLMAK ÜZERE N^2-N VE BÖLGE SAYISI İSE N^2-N+2 FORMÜLÜ İLE BULUNUR.
- 2) DÜZLEMDE BULUNAN EŞ KARELERİN 8 NOKTADA KESİŞMESİ İLE OLUŞAN EN FAZLA BÖLGE SAYISININ OLDUĞU ZAMAN KESİM NOKTASI SAYISI; N OLUŞTURULAN KARE SAYISI OLMAK ÜZERE $4N^2-4N$ VE BÖLGE SAYISI İSE $4N^2-4N+2$ FORMÜLÜ İLE BULUNUR.
- 3) DÜZLEMDEKİ EŞ KARELER BİRDEN ÇOK KAÇ NOKTADA KESİŞİRLERSE KESİŞİNLER KESİM NOKTASI SAYISININ 2 FAZLASI OLUŞAN BÖLGE SAYISINI VERİR.
- 4) DÜZLEMDEKİ EŞ KARELERİN 2 VE 8 NOKTADA KESİŞTİKLERİNDE EN FAZLA KESİM NOKTASI SAYISI ARASINDA 4 KAT VARDIR.
- 5) GEOMETRİK ŞEKİLLERLE İLGİLİ BİR ARAŞTIRMADA SAYMA YÖNTEMİNDEN DE YARARLANABİLDİK.

SONUÇLAR: SAYMA YÖNTEMLERİNİ KULLANARAK DÜZLEMDEKİ EŞ KARELERİN OLUŞTURDUĞU BÖLGE SAYISI İLE İLGİLİ FORMÜL ÜRETEBİLDİK.GAUSS KURALINI KULLANDIK.

DÜZLEMDEKİ EŞ KARELERİN OLUŞTURDUĞU BÖLGELERİN KAÇ TANESİNİN EŞ BÖLGELER OLUŞTUĞU DA RAHATLIKLA BULUNABİLİR.

DİĞER ÇOKGENLER İÇİN DE ÇALIŞMALARIM DEVAM ETMEKTEDİR.

Proje Adı : Ardışık Sayıların Kuvvetleri Toplamına Farklı Bir Bakış

Hazırlayan Öğrenci : T. DAĞAŞAN

Danışman Öğretmen : Özlem UYSAL GÖKCÜ

Balıkesir Ş. Prof. Dr. İlhan Varank Bilsem

Problem: ‘Bir n doğal sayısına kadar olan doğal sayıların herhangi dereceden kuvvetleri toplamını veren formül bulunabilir mi?’ sorusu araştırmamın problem cümlesidir.

Amaç: Projemin amacı herhangi bir doğal sayıya kadar olan ardışık doğal sayıların herhangi dereceden kuvvetlerinin toplamını veren genel bir ifadeye ulaşmaktır.

Yöntem: Doğal sayıların kuvvetleri toplamı ile ilgili yapılan çalışmaları incelediğimde tabanların aynı üslerin ardışık doğal sayılar alınarak birtakım genellemelere ulaşıldığını gördüm fakat hiçbir çalışma ardışık doğal sayıların kuvvetlerinin toplamını veren genel bir formül bulmaya yönelik değildi. Ben çalışmama bir n doğal sayısına kadar olan doğal sayıların kuvvetleri toplamını veren genel bir ifade bulma arayışı ile başladım.

Yaptığım literatür taramasında $1+2+\dots+n$ toplamını üçgensel sayılar ; $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ toplamını, kare piramitsel sayılar ile bağdaştırarak ifade edilebileceğini fark ettim. Buradan yola çıkarak $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ toplamını küpsel sayılar ile bağdaştırarak genel bir ifadeye ulaştım. $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ toplamının hiperküpsel sayılar olabileceğini düşünsem de şekil örüntüsünün ikinci adımdan sonrasını devam ettiremedim. Bunun üzerine farklı bir yöntem bulmam gerektiğine karar verdim. Söz konusu problemim kuvvetlerin toplamı olduğundan matematik olimpiyatlarına hazırlanırken öğrendiğim Paskal üçgeni ve Binom açılımından yararlanabileceğimi düşündüm.

Toplamların kuvveti ile kuvvetlerin toplamına ulaşabileceğimi fark ettim. Bu durum Paskal üçgeni ve Binom açılımından yararlanarak ifadelerin taraf tarafa toplanmasıyla mümkün oluyordu. Birinci kuvvetler toplamı sonra ikinci kuvvetler toplamı daha sonra da üçüncü kuvvetler toplamını birbirine bağlı olarak bulduktan sonra tümevarım yöntemiyle herhangi dereceden kuvvetler toplamını önceki dereceden kuvvetler toplamına bağlı olarak bulmamızı sağlayan genel bir ifadeye ulaştım.

Bulgular: $(x + y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$ açılımı kullanılarak:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{bulunur.}$$

$(x + y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + 1 \cdot y^3$ açılımı kullanılarak

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \quad \text{bulunur.}$$

Benzer yöntemle $(1+n)^3$, $(1+n)^4$ ve $(1+n)^5$ açılımları paskal üçgeni ve kombinasyon ilişkisi de kurularak şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} (1+n)^2 &= 1 \cdot (1+n) + 2 \cdot (1+2+\dots+n) \\ &= \binom{2}{0} \cdot (1+n) + \binom{2}{1} \cdot (1+2+\dots+n) \end{aligned}$$

$$(1+n)^3 = 1 \cdot (1+n) + 3 \cdot (1+2+\dots+n) + 3 \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2)$$

$$= \binom{3}{0} \cdot (1+n) + \binom{3}{1} \cdot (1+2+\dots+n) + \binom{3}{2} \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2)$$

$$(1+n)^4 = 1 \cdot (1+n) + 4 \cdot (1+2+\dots+n) + 6 \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2) + 4 \cdot (1^3+2^3+\dots+n^3)$$

$$\begin{aligned} &= \binom{4}{0} \cdot (1+n) + \binom{4}{1} \cdot (1+2+\dots+n) + \binom{4}{2} \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2) \\ &\quad + \binom{4}{3} \cdot (1^3+2^3+\dots+n^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+n)^5 &= 1 \cdot (1+n) + 5 \cdot (1+2+\dots+n) + 10 \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2) \\ &\quad + 10 \cdot (1^3+2^3+\dots+n^3) + 5 \cdot (1^4+2^4+\dots+n^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{0} \cdot (1+n) + \binom{5}{1} \cdot (1+2+\dots+n) + \binom{5}{2} \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2) \\ &\quad + \binom{5}{3} \cdot (1^3+2^3+\dots+n^3) + \binom{5}{4} \cdot (1^4+2^4+\dots+n^4) \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}(1+n)^{k+1} &= \binom{k+1}{0} \cdot (1+n) + \binom{k+1}{1} \cdot (1+2+\dots+n) \\ &\quad + \binom{k+1}{2} \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2) + \binom{k+1}{3} \cdot (1^3+2^3+\dots+n^3) + \dots \\ &\quad + \binom{k+1}{k} \cdot (1^k+2^k+\dots+n^k)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Değerlendirme ve Sonuç:

Bir n doğal sayısına kadar olan doğal sayıların kuvvetleri toplamını veren genel bir formül vardır. Bu formül herhangi kuvvet için kendinden önceki kuvvetler toplamına bağlı olarak yazılabilir.

n bir doğal sayı olmak üzere n doğal sayısına kadar olan doğal sayıların k . kuvvetleri toplamı:

$$\begin{aligned}1^k + 2^k + \dots + n^k &= \left\{ (1+n)^{k+1} \right. \\ &\quad - \left[\binom{k+1}{0} \cdot (1+n) + \binom{k+1}{1} \cdot (1+2+\dots+n) + \dots \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{k+1}{k-1} \cdot (1^{k-1} + 2^{k-1} + \dots + n^{k-1}) \right] \right\} : \binom{k+1}{k}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Buradan da anlaşıldığı gibi herhangi bir kuvvetler toplamını bulabilmek için bulmak istediğimiz kuvvetten önceki kuvvetler toplamını da bilmemiz gerekiyor.

Literatür taraması yaparken matematik dünyası dergisinin eski bir sayısında (Terzioğlu,1992) polinomlar kullanılarak Gauss formülünün genelleştirilmesinden bahsediyordu. Başka bir projede öncelikle polinomlar konusunu öğrenerek doğal sayıların kuvvetleri toplamını veren genel formüle farklı bir yolla ulaşılabilir.

Anahtar kelimeler: ardışık sayı, kuvvetler toplamı, binom açılımı

Kaynaklar:

Akademik Yazım Kuralları Kitapçığı, 22 Aralık 2014,
<http://iibf.baskent.edu.tr/bilgi/akademik.pdf>

Bu Benim Eserim Proje Yarışması Proje Bankası(BBE),

http://basvurular.meb.gov.tr/bubenimeserim/prj_bankasi_ayrinti.aspx?projeNo=2010014493

Bu Benim Eserim Proje Yarışması Proje Bankası(BBE),

http://basvurular.meb.gov.tr/bubenimeserim/prj_bankasi_ayrinti.aspx?projeNo=2012050579

Bu Benim Eserim Proje Yarışması Proje Bankası(BBE),

http://basvurular.meb.gov.tr/bubenimeserim/prj_bankasi_ayrinti.aspx?projeNo=2013000022

Bu Benim Eserim Proje Yarışması Proje Bankası(BBE),

http://basvurular.meb.gov.tr/bubenimeserim/prj_bankasi_ayrinti.aspx?projeNo=2013040033

Carl Friedrich Gauss,13 Ekim 2014, [http:// tr. wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss](http://tr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

Çebi M. , Bayar Ö. , Çebi H.(2014),İlköğretim Matematik 8 Öğrenci Ders Kitabı, Ankara, Dörtel Yayıncılık, Sayfa 174

Gedikler N. (2010) , Pascal Üçgeni ve Binom Açılımı, 17 Kasım 2014,
<http://www.egitim.gov.tr/pub/meb/matematik/ON/oOgr/gen/matematik.ON-oOgr-gen-5942-446-23.02.2010.15.22.24.881/index.html>

Kaya E.(2012) , Kombinatorik, İzmir, Altın Nokta Yayınevi, Sayfa 147-149

Özdemir M.(2013), Dahimatik, İzmir, Altın Nokta Yayınevi, Sayfa 267

Şahin A.(2007) , Gauss Formülünün Bir Sonucu, 27 Ekim 2014

[http:// www.biltek.tubitak.gov.tr/bulusumvar/bulusum_var.php?proje_id=207](http://www.biltek.tubitak.gov.tr/bulusumvar/bulusum_var.php?proje_id=207)

Terzioğlu T.(1992), Gauss Formülünün Genelleştirilmesi, Matematik Dünyası Dergisi, 3, sayfa 11-12, www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/92_3_11_GAUSS.pdf

Tümevarım Yöntemi, 10 Kasım 2014,
<http://www.biltek.tubitak.gov.tr/gelisim/matematik/aletkutusu.htm>

Projenin Adı : EPRS A ŞİFRELEME

Hazırlayan Öğrenci : E. Persilioğlu

Danışman Öğretmen: Özlem Uysal Gökçü

Balıkesir Ş. Prof. Dr. İlhan Varank Bilsem

Problem: Teknolojik ilerlemenin hız kazandığı günümüzde saldırıların da teknoloji alt yapılı olarak yapılması kaçınılmaz oldu. Siber saldırı adı verilen bu saldırılara cep telefonu, sosyal medya ve iletişim ortamları, web siteleri, çevrimiçi oyunlar, elektronik posta kullanan herkes maruz kalabilir. Son günlerde ülkemizin ciddi şekilde maruz kaldığı siber saldırılar pek çok internet sitesini, platformunu etkilemiştir. Bu tür saldırılara karşı hazırlıklı olmak ve tedbir almak kaçınılmazdır.

Onun için sanal ortamda bankacılık işlemleri, askeri sistemler, özel görüşmeler gibi işlemleri gerçekleştirirken iki nokta arasında veya sistemler arası haberleşmede gizlilik, bütünlük ve kullanılabilirlik ilkelerine göre bilginin güvenliği sağlanmalıdır. Bu tedbirlerden en önemlisi olarak sayılabilecek olan giden ve gelen verinin şifrelenerek anlaşılmasız hale getirilmesi ve bu şekilde iletilmesidir. Yıllardır bu alanda yapılan çalışmalar neticesinde birçok şifreleme tekniği bulunmuş ve kullanılmıştır.

Amaç: Günümüz açık anahtarlı şifreleme tekniklerini kullanarak çözülmesi zor yeni bir şifreleme tekniği geliştirmek. Matematiğin konularından olan kriptoloji, mod, üslü sayılar, satranç, koordinat düzlemi ve doğruya göre simetriyi tek bir projede birleştirip somut sonuçlar elde etmek.

Yöntem: En yaygın kullanılan asimetrik şifreleme algoritmalarından birisi RSA şifreleme algoritmasıdır. RSA şifreleme algoritması, dijital ortamda verinin güvenli aktarımının sağlanması fikri temel alınarak yapılan araştırmalar neticesinde bulunan çok büyük tam sayıları çarpanlara ayırmanın algoritmik zorluğu göz önüne alınarak geliştirilen açık anahtarlı bir şifreleme tekniğidir. 1977 yılında Ronald Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman, kendi isimlerinin ilk harflerini verdikleri RSA algoritmasını bulmuşlardır. Bu algoritmada matematiksel işlemler neticesinde iki farklı anahtar üretilmektedir. Anahtarlardan birisi herkesin erişebileceği açık anahtar, diğeri ise gizli anahtardır. Herkes kendisine şifreli bir mesaj göndermek isteyen birisinin gönderilecek mesajı sadece kendisinin açabileceği şekilde şifreleyebilmesi için açık anahtarını yayınlar ve bu açık anahtar kullanılarak mesaj şifrelenir ve gönderilir. Gönderilen şifreli mesajı ise sadece şifrelediği açık anahtarın eşi olan gizli anahtara sahip olan kişi görüntüleyebilir. Bir ortak anahtarla şifrelenmiş mesaj sadece özel anahtarla çözülebilir.

Son zamanlarda en çok kullanılan şifreleme tekniği RSA'yı öğrendikten sonra kendi yöntemimi kullanarak kendi şifreleme algoritmamı yapmaya karar verdim. Literatür taraması yaptığımızda RSA'yla ilgili proje olmadığını; eski yöntemlerden vigenere ya da daha eski ve basit yöntemlerin kullanıldığını gözlemledim. Bu yüzden RSA şifrelemeyle ilgili gerekli araştırmaları yaptım. Bununla beraber elektronik ortamda kullanılan RSA'nın kendi hesaplarımızla yapılıp yapılamayacağını merak ettim. Bu yüzden de 8x8'lik satranç tahtası üzerine 3'den başlayarak asal sayıları yazdım. Sayının bulunduğu koordinatları alarak p ve q verilerini oluşturdum. Yapılan işlemler:

1. Bir satranç tahtası üzerine farklı dizilim tasarımlarıyla alfabeyi yazdım. (Daha evrensel olması için Q, X, W harflerini de yazdım)
2. Farklı dizilim tasarımlarıyla yaptığım alfabemin komşu olan 2 kenarına 3'den 23'e kadar olan asal sayıları yazdım.
3. Satranç tahtası üzerine her harfi kapsayacak şekilde bir koordinat düzlemi yerleştirdim.
4. Şifreleyeceğimiz kelimenin harflerini sırasıyla siyahtan başlayarak siyah-beyaz-siyah-beyaz... şeklinde yazdım. Siyaha denk gelen harflerde RSA şifreleme algoritmasını, beyaza gelenlere ise kendi algoritmamı kullandım.
5. RSA algoritmasını kullandığım harfleri asal sayılarla eşleştirdim. Bir harf siyaha denk geliyorsa o harfle eşleştirdiğimiz sayıları p ve q olarak alırız.(mesela alfabeyi sıraladığımızda C harfinin koordinatları (3,7) ise $p=3$ $q=7$ veya tersi alınır)
6. $p.q=n$ formülü ile n sayısı bulunur.
7. t sayısı $t=(p-1).(q-1)$ ile bulunur
8. t sayısı ile aralarında asal olacak bir sayı seçilir ve bu sayıya e ismi verilir
9. $e.d=1 \pmod{t}$ formülü ile bir d sayısı bulunur. d sayısı gizli anahtarımızı oluştururken kullanılır.
10. e ile n sayısı ile bir açık anahtar (e,n), d ile n sayısı kullanılarak (d,n) gizli anahtar oluşturulur. Gizli anahtar harfin sağına (n,d) şeklinde yazılır.
11. Şifrenmek istenen sayıya x diyelim. Şifrenirken genel anahtara göre x sayısının e kuvveti alınır, mod n kullanılır. ($xe \pmod{n}$ kullanılır)
12. $xe \pmod{n}$ formülünden çıkan sonuç RSA ile şifrenmiş bir sayıdır. Sayıya denk gelen alfabedeki harf bizim şifremizdir.
13. Şifrenmiş metni çözerken ise (yani RSA şifrenmiş harfi geri döndürmek için) gizli anahtarımızı (d,n) kullanarak şifrenmiş sayıyı çözebiliriz. Şifrenmiş harfin alfabedeki yerine "y" dersek " $yd \pmod{n}$ " formülünü kullanarak bizim şifrenmiş metnimizin aslına ulaşabiliriz.
14. Beyazlarda ise şifreleyeceğimiz harf koordinat düzleminin 1.bölgesindeyse $y=-x$ doğrusuna; 2.bölgesindeyse $y=x$ doğrusuna göre simetriğinin koordinatlarına karşılık gelen harf şifrenmiş halidir.
15. Şifrenmiş metnimize denk gelen harfleri yazarak asıl metnimizi bulabiliriz.

Bulgular: ELİFSU >>> E(S),L(B), İ(S), F(B), S(S), U(B) siyah kare=S; beyaz kare=B diyecek olursak:

E için: $q=3$ $p=17$ $n=51$ ($p.q$) $t=32$ ($(q-1).(p-1)$) $e=3$ (t ile aralarında asal bir sayı seçilir) $e.d \equiv 1 \pmod{t}$ formülünden $d=11$ bulunur. Formülde yerine yazılır.

$$x^e \equiv ? \pmod{n} \text{ yani } 63 \equiv ? \pmod{51} \quad 216 \equiv ? \pmod{51}$$

işleminden sonucumuz 12 çıkar. Bu da 'i' harfine denk gelir.

L için: L'nin koordinatı (-3,3) şifrelenmiş hali (3,-3) yani Ü harfidir.

İ için: $q=5$ $p=11$ $n=55$ $t=40$ $e=3$ $e.d \equiv 1 \pmod{t}$ $d=27$

$$123 \equiv ? \pmod{55} \quad 17. \text{ Harfimiz olan 'S' harfidir.}$$

F için: F'nin koordinatı (3,4) şifrelenmiş hali (-4,-3) yani C harfidir.

S için: $q=7$ $p=19$ $n=133$ ($q.p$) $t=108$ ($(q-1).(p-1)$) $e=5$ $e.d \equiv 1 \pmod{t}$ $d=65$

$$235 \equiv ? \pmod{n} \quad 22. \text{ Harfimiz olan 'H' harfidir.}$$

U için: U'nun koordinatı (3,1) şifrelenmiş hali (-1,-3) yani K harfidir.

AÇIK METNİMİZ: ELİFSU

ŞİFRELİ METNİMİZ: İ(51,11)ÜS(55,27)CH(133,65)K

KRİPTOANALİZİ: Elimize ulaşan şifreli metnimizi $yd = ? \pmod{n}$

$$İ \text{ için: } 1211 \equiv ? \pmod{51} \quad (E)$$

$$Ü \text{ için: } (3,-3) \rightarrow (-3,3) \quad (L)$$

$$S \text{ için: } 2327 \equiv ? \pmod{55} \quad (İ)$$

$$C \text{ için: } (-4,-3) \rightarrow (3,4) \quad (F)$$

$$H \text{ için: } 1065 \equiv ? \pmod{133} \quad (S)$$

$$K \text{ için: } (-1,-3) \rightarrow (3,1) \quad (U)$$

Sonuç ve Sonuçların Değerlendirilmesi: Sonuç olarak bir çok metin bu yöntemle güvenli bir şekilde şifrelenebilir. Bu şifreleme algoritmasını çözmeyi bilmeyen bir kişinin bunu çözmesi çok zordur. Matematikğin birçok konusunu barındırdığı için matematikle ilgilenen kişilerin keyif alacağını düşünüyorum. Benim keyif alarak hazırladığım bir proje. Güncel olduğu için bu algoritmayla benzerlik gösteren çalışmalar yapılabilir.

Anahtar Kelimeler: Şifreleme, RSA şifreleme yöntemi, simetri, koordinat düzlemi

Proje Adı : Kuvvet Hesaplarına Farklı Bir Yaklaşım
Hazırlayan Öğrenci : K. K. Balcı
Danışman Öğretmen: Özlem Uysal Gökçü
Balıkesir Ş. Prof. Dr. İlhan Varank Bilsem

Problem:

Sayılar dünyasında herhangi bir sayının kuvvetini alma problemi, sayı büyüdükçe zorlaşmaktadır. İnsan beyni bir aşamadan sonra hesaplama zorluğu çekmekte ve sayı büyüdükçe sonuç almak çok zor hale gelebilmektedir. Hesap makineleri veya bilgisayarlar kullanılarak üs alma işlemi birkaç saniyede yapılabilmektedir fakat makinelerin bulunmadığı durumlarda, bu işlemlerin daha kolay çözülebilmesi için yeni bir yöntem önermekteyim.

Amaç:

Yapılan araştırmalara göre, insanın hayatında önemli rol oynayan, ortak sınavlarda en fazla zaman kaybı matematik sorularının işlem gerektiren kısımlarında yaşanıyor. Hangi düzeyde olursa olsun kişiler için bu tip sınavlar hayati önem taşıyor adeta geleceklerini belirliyor. Dolayısıyla hızlı işlem yapabilmenin herhangi bir sınavda veya günlük hayatta kişiye avantaj sağladığı yadsınamaz bir gerçektir.

Projenin amacı sayıların herhangi dereceden kuvvetlerinin hesaplanmasını kolaylaştırmaktır. Geliştirilen yöntem sayesinde kuvvet alma hesaplarının daha hızlı ve kolay yapılabilmesi amaçlanmıştır.

Önerilen yöntem, hesap kolaylığının yanı sıra herkes tarafından kolaylıkla kavranabilme özelliğine sahiptir. Uygulanabilirliği sayesinde matematik dünyası içinde alternatif çözüm yöntemleri arasında yer alabileceği düşünülmektedir.

Yöntem:

Modelin geliştirilmesinde öncelikle matematiğin gizemli üçgeni olarak bilinen Pascal üçgeni ve bu üçgen kullanılarak yapılan işlemler incelendi. Buradan yola çıkılarak ilk önce sayılar alt alta yazılarak ikinci kuvvetleri alındı ve mevcut yöntemle karşılaştırıldı. Bu yöntemin doğruluğu sınılandıktan sonra basamak sayısı ikiden fazla olan sayılar için denemeler yapıldı. Tümevarım yöntemiyle genel bir ifadeye ulaşıldı. Hesaplamalar için Pascal üçgeninde bulunan katsayılar kullanılarak formül türetildi.

Bulgular:

Pascal üçgeni ve Binom açılımından yararlanarak herhangi dereceden bir kuvvet açılımı

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} . a^n . b^0 + \binom{n}{1} . a^{n-1} . b^1 + \dots + \binom{n}{n} . a^0 . b^n \quad \text{şeklinde oluşturulur.}$$

(ab) iki basamaklı, (abc) üç basamaklı sayıları temsil etmek üzere :

$$(ab)^2 = a^2, 2.a.b, b^2$$

$$(ab)^3 = a^3, 3.a^2.b, 3.a.b^2, b^3$$

$$(ab)^4 = a^4, 4.a^3.b, 6.a^2.b^2, 4.a.b^3, b^4$$

$$(abc)^2 = (ab)^2, 2.(ab).c, c^2$$

yazılır.

Sayıların kuvvetlerini bulmak için yukarıdaki formül uygulanır. En sağdaki basamaktan başlayarak işlemler yapılır ve bulunan sonuçlar iki ve daha fazla basamaklı ise birler basamağı yazılır ve elde bir solundaki bölüme eklenir.

Bu işlemi sırasıyla sağdan sola doğru yaparak, en son tüm bölümlerdeki sayıların yan yana yazılması ile sonuç elde edilmiş olur.

Formül benzer şekilde diğer kuvvetler için de geçerlidir.

Örnek:

$$107^2 = 10^2, 2.10.7, 7^2 = 100, 140, 49 = 100, 144, 9 = 114, 4, 9 = 11449$$

Örnek:

$$13^3 = 1^3, 3.1^2.3, 3.1.3^2, 3^3 = 1, 9, 27, 27 = 1, 9, 29, 7 = 1, 11, 9, 7 = 2, 1, 9, 7 = 2197$$

Değerlendirme/ Sonuç:

Türetilen formül ile basamak sayısı ve kuvvet derecesi ne olursa olsun, istenilen sayının istenilen kuvveti alınabilmektedir.

İki basamaklı bir sayının herhangi bir kuvveti, n bir doğal sayı olmak üzere

$$(ab)^n = \binom{n}{0} . a^n . b^0, \binom{n}{1} . a^{n-1} . b^1, \binom{n}{2} . a^{n-2} . b^2, \dots, \binom{n}{n} . a^0 . b^n \quad \text{şeklinde genellenebilir.}$$

Farklı basamaktaki sayılar da benzer şekilde genellenir.

Önerilen yöntem, hesap kolaylığının yanı sıra herkes tarafından kolaylıkla kavranabilmektedir. Uygulanabilirliği sayesinde matematik dünyası içinde alternatif çözüm yöntemleri arasında yer alabileceği düşünülmektedir.

Sayıların karelerini alma işlemine alternatif yollar bulmaya yönelik çalışmalar yapılmışsa da bu çalışmada sadece kare alma işlemi değil herhangi dereceden kuvvet alma işlemi için de uygulanabilen bir yöntem geliştirilmiştir.

Ayrıca bu yönteme matematik öğretiminde alternatif kuvvet hesaplama yöntemi olarak yer verilebilir. Böylece insanlar bir matematik probleminde işlem yapmaya ayırdıkları süreyi problemi algılamak ve probleme çözüm üretmek için kullanabilirler.

Anahtar Kelimeler:

Kuvvet alma, Pascal üçgeni, Binom açılımı, alternatif yöntem.