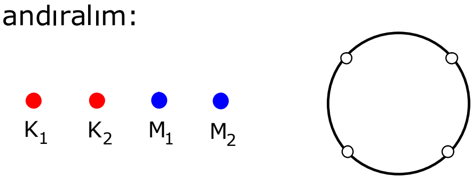
Problem - 1

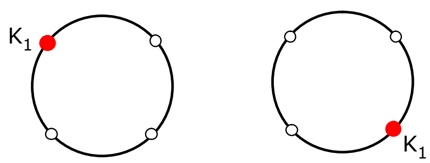
İki kırmızı ve iki mavi boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Aynı renklilerin yan yana gelmeleri olasılığı kaçtır?

Çözüm

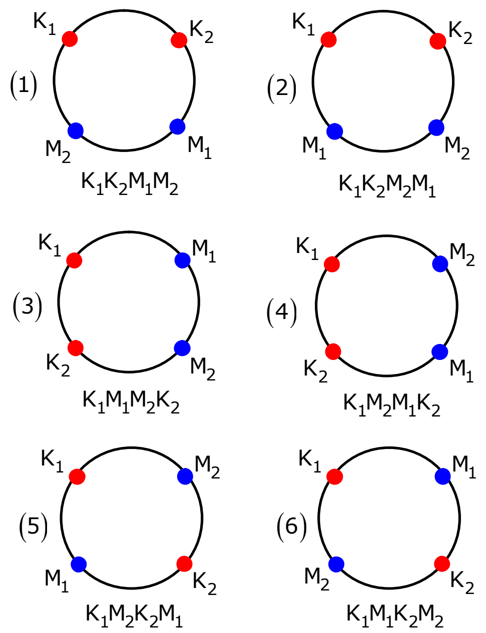
İkişer ikişer aynı renkli de olsa, elde 4 farklı boncuk ve bu boncukların üzerinde konumlandırılacağı bir halka vardır.
Boncukların üzerlerine 1 ve 2 numaralarını yapıştırıp boncukları K_1, K_2, M_1, M_2 diye adlandıralım:



Boncuklar, halkada gösterilen yerlere yerleştirilecektir.
Bu tür deneylerde, nesnelerin belirli koordinatlara değişik sıralı konumlandırılmalarının sayıları sorulabilir. Ancak; bir halka verilmişse, nesnelerin birbirlerine göre değişik sıralanmalarının sayısını bulma problemi öne çıkarılıyor demektir.
Boncukların birbirlerine göre değişik sıralanmalarının sayısını bulma probleminde, halkada gösterilen 4 yer boş iken bu yerler özdeş sayılır. Örneğin; aşağıdaki konumlandırmalar özdeştir:



Boncukların birbirlerine göre değişik sıralanmalarının sayısını bulma probleminde, halkada gösterilen 4 yerden birine boncuklardan biri yerleştirildiğinde, diğer 3 yer farklılaşmış olur. Aşağıdaki sıralanmaların herbiri farklı bir sıralanmadır:



(1) numaralı şekildeki $K_1K_2M_1M_2$ sıralaması $K_2M_1M_2K_1$, $M_1M_2K_1K_2$ ya da $M_2K_1K_2M_1$ biçiminde de okunabilir.
Rastgele yapılacak bir konumlandırmada bu sıralanmaların herbirinin gerçekleşmesi olasılığı bir diğerininkine eşittir.

Buna göre; iki kırmızı ve iki mavi boncuğun bir halkada rastgele konumlandırılması deneyinin örneklem uzayı,

$$E=\{(K_1K_2M_1M_2),(K_1K_2M_2M_1),(K_1M_1M_2K_2),(K_1M_2M_1K_2),(K_1M_2K_2M_1),(K_1M_1K_2M_2)\}$$

olup bu uzay eş olumludur.

Aynı renklerin yan yana olduğu çıktıların kümesi olan istenen olay da,

$$A=\{(K_1K_2M_1M_2),(K_1K_2M_2M_1),(K_1M_1M_2K_2),(K_1M_2M_1K_2)\}$$

kümesidir. (1., 2., 3., 4. şekiller)

İstenen olasılık,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow P(A)=\frac{4}{6} \Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$

olarak bulunur.

Not – I

$$E = \{(K_1K_2M_1M_2),(K_1K_2M_2M_1),(K_1M_1M_2K_2),$$
$$(K_1M_2M_1K_2),(K_1M_2K_2M_1),(K_1M_1K_2M_2)\}$$

kümesi, boncukların üzerlerindeki numaralar çıkarılarak,

$$E' = \{(KKMM),(KMKM)\}$$

biçiminde yazılırsa, bu küme bu deneyin eş olumlu örneklem uzayı olmaz. Bu kümenin (KKMM) elemanı 4 farklı çıktıya, (KMKM) elemanı da 2 farklı çıktıya karşılık gelir.

Not – II

Dikkat edilirse; "İki kırmızı ve iki mavi boncuğun bir halkada rastgele konumlandırılması" deneyinde aynı renklilerin yan yana olduğu sıralanmaların sayısını bulma problemi ile, "İki kadın ve iki erkeğin bir yuvarlak masada sıralanmaları" deneyinde iki kadının yan yana ve iki erkeğin yan yana olduğu sıralanmaların sayısını bulma problemi ile aynı olduğu görülür.

Buna göre; çözüm şöyle ifade edilebilir:

$s(E) = (4-1)!$, $s(A) = (2-1)! \cdot 2! \cdot 2!$,

$P(A) = \frac{2}{3}$ bulunur.

Problem - 2

İki kırmızı ve üç mavi boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Aynı renklilerin yan yana gelmeleri olasılığı kaçtır?

Çözüm

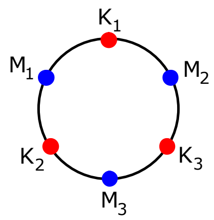
$s(E) = (5-1)!$, $s(A) = (2-1)! \cdot 2! \cdot 3!$,

$P(A) = \frac{1}{2}$ bulunur.

Problem - 3

Üç kırmızı ve üç mavi boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Aynı renkli iki boncuğun yan yana gelmemesi olasılığı kaçtır?

Çözüm



6 boncuk halkaya $(6-1)!$ değişik biçimde sıralanabilir.
Aynı renklilerin yan yana olmadığı sıralamaları elde etmek için önce, örneğin; kırmızılar yerleştirilir. Sonra, kırmızıların ayırdığı aralıklara maviler dizilir.

$s(E) = (6-1)!$, $s(A) = (3-1)! \cdot 3!$,

$P(A) = \frac{1}{10}$ bulunur.

Problem - 4

İki kırmızı, iki mavi ve 2 yeşil boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Aynı renkli tüm boncukların yan yana gelmeleri olasılığı kaçtır?

Çözüm

6 boncuk halkaya $(6-1)!$ değişik biçimde sıralanabilir.
Aynı renklilerin yan yana olduğu sıralamaların sayısı $(3-1)! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$'dir.

$s(E) = (6-1)!$, $s(A) = (3-1)! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$,

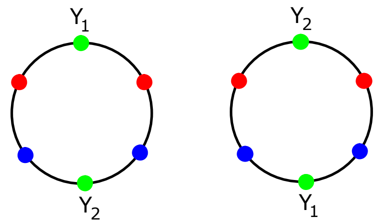
$P(A) = \frac{2}{15}$ bulunur.

Problem - 5

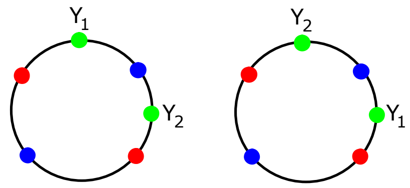
İki kırmızı, iki mavi ve iki yeşil boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Aynı renkli boncukların yan yana gelmemesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

Halkada, iki kırmızı ve iki mavi boncuğun yan yana olduğu sıralamaların sayısının dört olduğunu bulmuştuk. (Problem – 1)
İki kırmızı ve iki mavi boncuğun bu 4 sıralamasının her birinde, yeşiller aşağıdaki gibi ikişer değişik biçimde yerleştirilirse, aynı renklilerin yan yana olmadığı $4 \cdot 2 = 8$ sıralama yapılır.



Halkada, iki kırmızı ve iki mavi boncuğun yan yana olmadığı sıralamaların sayısı 2'dir. (Problem – 1)
Bu iki sıralamada yeşiller, dört aralığın herhangi ikisine Y_1 ve Y_2 olarak $C(4,2) \cdot 2 = 12$ değişik biçimde sıralanır.



6 boncuk halkaya $(6-1)!$ değişik biçimde sıralanabilir.
Aynı renklilerin yan yana olmadığı sıralamaların sayısı $8 + 12 = 20$'dir.

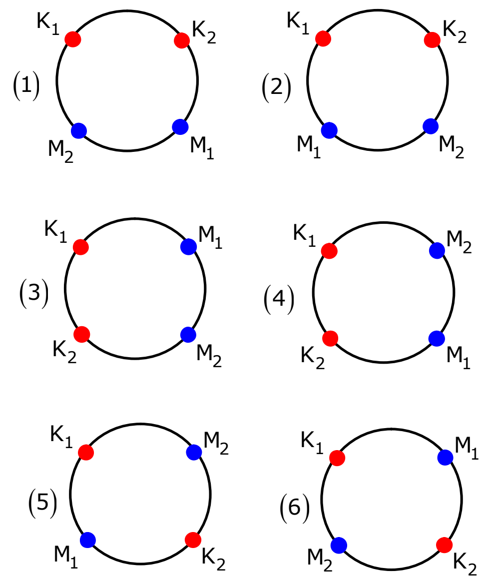
$s(E) = (6-1)!$, $s(A) = 20$,

$P(A) = \frac{1}{6}$ bulunur.

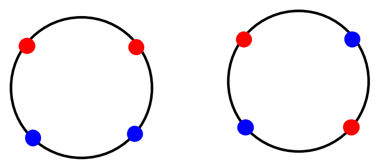
Problem - 6

İki kırmızı ve iki mavi boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Renklerin farklı sıralamaları birer karta kaydedilecek ve bu kartlardan rastgele biri çekilecektir.
Aynı renklilerin yan yana olduğu duruma ait bir kartın seçilmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm



Yukarıdaki şekillerde, 2 kırmızı ve 2 mavi boncuğun farklı sıralanmaları gösterilmiştir.
Boncuklar üzerindeki numaralar silinirse, sıralamalar yine farklı kalacaktır. Çünkü; boncukların farklı olduğu bir gerçektir. Sıralamaların yapılmasında bu farklılık belirleyicidir. Ancak; yalnız renkler dikkate bu farklı sıralamaların, aşağıdaki iki sıralamaya indirgendiği görülür:



Bu sıralamalar KKMM ve KMKM adlarıyla kartlara yazılıp biri çekilecektir.

Kartlardan birini çekme deneyinin örneklem uzayı $E = \{(KKMM), (KMKM)\}$ ve istenen olay $A = \{(KKMM)\}$ olur. E uzayı eş olumludur.

$s(E) = 2$, $s(A) = 1$ olup $P(A) = \frac{1}{2}$ bulunur.

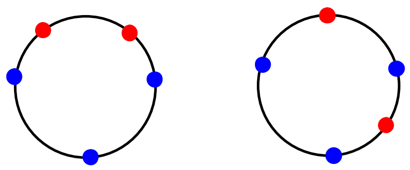
Problem - 7

İki kırmızı ve üç mavi boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Renklerin farklı sıralamaları birer karta kaydedilecek ve bu kartlardan rastgele biri çekilecektir.
Aynı renklilerin yan yana olduğu duruma ait bir kartın seçilmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

5 boncuk halkaya $(5-1)!$ değişik biçimde rastgele sıralanabilir.
Ancak; burada problem, bu değişik sıralamaların sayısını bulmak değil, renklere göre değişik sıralamaların sayısını bulmaktır.

3 mavi renk, halkaya 1 biçimde yerleştirilir.
2 kırmızı renk, mavilerin ayırdığı aralıkların birine konulduğunda aynı renkler yan yana olur; 2 kırmızı, mavilerin ayırdığı aralıkların ikisine konulduğunda aynı renklerden bir kısmı yan yana olmaz.



Halkanın döndürmeli, arkalı önlü değişik konumları dikkate alındığında, yalnız bu iki değişik renk sıralamasının gerçekleşebileceği görülür.

$E = \{(KKMMM), (KMKMM)\}$, $A = \{(KKMMM)\}$ olur.

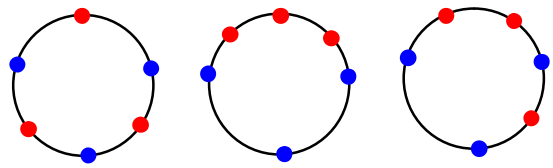
$P(A) = \frac{1}{2}$ bulunur.

Problem - 8

Üç kırmızı ve üç mavi boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.
Renklerin farklı sıralamaları birer karta kaydedilecek ve bu kartlardan rastgele biri çekilecektir.
Aynı renkli herhangi iki boncuğun yan yana olmadığı duruma ait bir kartın seçilmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

3 mavi renk, halkaya 1 biçimde yerleştirilir.
Kırmızılar, mavilerin ayırdığı aralıklara birer birer konulduğunda aynı renklerden herhangi ikisi yan yana olmaz. (1 sıralama)
3 kırmızı renk, mavilerin ayırdığı aralıkların birine konulduğunda aynı renkler yan yana olur. (1 sıralama)
Kırmızılar bu aralıkların herhangi ikisine 1 ve 2 tane olarak konulduğunda aynı renklerden bazıları yan yana olur. (1 sıralama)



Halkanın döndürmeli, arkalı önlü değişik konumları dikkate alındığında, yalnız bu üç değişik renk sıralamasının gerçekleşebileceği görülür.

Kartlardan birini çekme deneyinin örneklem uzayı $E = \{(KMKMKM), (KKKMMM), (KKMKMM)\}$ ve istenen olay $A = \{(KMKMKM)\}$ olur.

E örneklem uzayı eş olumludur.

$s(E) = 3$ ve $s(A) = 1$'dir.

$P(A) = \frac{1}{2}$ bulunur.

Problem - 9

İki kırmızı, iki mavi ve iki yeşil boncuk bir halkada rastgele konumlandırılacaktır.

Renklerin farklı sıralamaları birer karta kaydedilecek ve bu kartlardan rastgele biri çekilecektir.

Aynı renkli tüm boncukların yan yana olduğu duruma ait bir kartın seçilmesi olasılığı kaçtır?

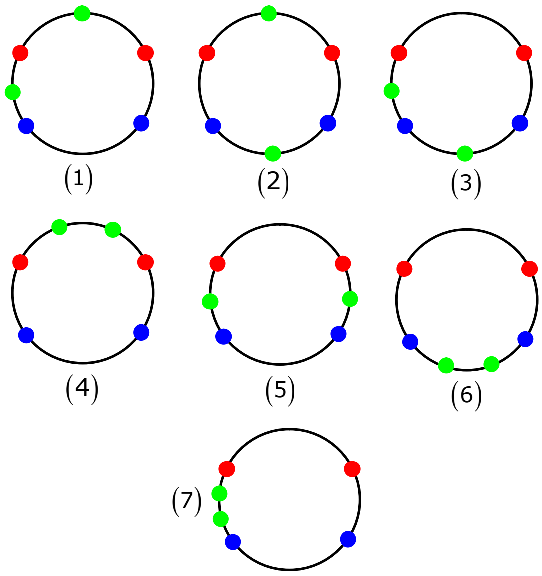
Çözüm

2 kırmızı ve 2 mavi renk, halkaya 2 değişik biçimde yerleştirilir. (Problem - 6)

KKMM ya da KMKM sıralasıyla.

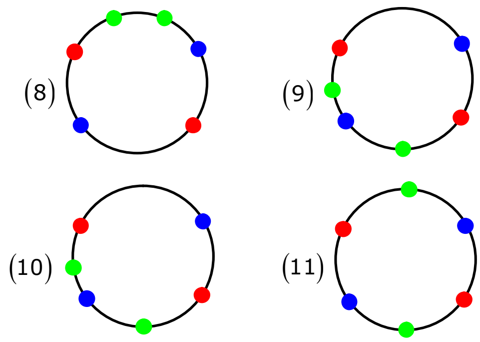
Yeşil renklerin, değişik sıralamalar elde etmek üzere yerleştirilebileceği konumlar, yorucu da olsa, sayarak bulunabilir.

Halkanın döndürmeli, arkalı önlü değişik konumları dikkate alındığında, KKMM sıralaması yeşillerle aşağıdaki biçimlerde tamamlanabilir:



İstenen sıralama

KMKM sıralaması yeşillerle aşağıdaki biçimlerde tamamlanabilir:



Renklerin 11 değişik sıralaması mümkündür

Bu değişik renk sıralamalarının her biri bir karta yazılacak ve kartlardan biri çekilecektir.

Kartlardan birini çekme deneyinin örneklem uzayı

$E = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10),(11)\}$

ve istenen olay $A = \{(7)\}$ olur.

E örneklem uzayı eş olumludur.

$s(E) = 11$ ve $s(A) = 1$'dir. $P(A) = \dfrac{1}{11}$ bulunur.

Not

Nesne sayısı arttıkça, renklerin farklı dizilişlerin sayısını bulmak zorlaşmaktadır. Burada, Polya'nın Sayma Teorisi yararlı olur. İlgilenenler için yazıyorum:

iki taraflı çembersel dizilişler (halka) için çevrim indeksi,

$P(A) = \dfrac{1}{12}\left(f_1^6 + 3 \cdot f_1^2 \cdot f_2^2 + 4 \cdot f_2^3 + 2 \cdot f_3^2 + 2 \cdot f_6\right)$'dır.

$f_1 = x + y + z$, $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$, $f_3 = x^3 + y^3 + z^3$

ve $f_6 = x^6 + y^6 + z^6$ alınır.

İşlemler yapıldığında, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$'nin kat sayısının 11 olduğu görülür. Bu sayı 2 kırmızı, 2 mavi, 2 yeşil rengin halkadaki değişik dizilişlerinin sayısıdır. Bu dizilişlerin 1 tanesinde aynı renkler yan yanadır. İstenen olasılık 1/11 olur.