Problem – 1

A, A, A, B, B, B harleri bir çember üzerine eşit aralıklarla, aynı harfler yan yana olmamak üzere, sıralanacaktır.

a. Harfler birbirlerine göre kaç değişik biçimde sıralanabilir?

b. Çember düzlemine iki yanından da bakılabildiğine göre, kaç değişik sıralama yapılabilir? (Halka)

c. Harflerin konulacağı eşit aralıklı 6 noktanın çember düzlemindeki konumları belirlenmiş ise, kaç değişik sıralama yapılabilir?

Problem – 2

A, A, A, B, B, C harleri bir çember üzerine eşit aralıklarla, aynı harfler yan yana olmamak üzere, sıralanacaktır.

a. Harfler birbirlerine göre kaç değişik biçimde sıralanabilir?

b. Çember düzlemine iki yanından da bakılabildiğine göre, kaç değişik sıralama yapılabilir? (Halka)

c. Harflerin konulacağı eşit aralıklı 6 noktanın çember düzlemindeki konumları belirlenmiş ise, kaç değişik sıralama yapılabilir?

Problem – 3

A, A, B, B, C, C harleri bir çember üzerine eşit aralıklarla, aynı harfler yan yana olmamak üzere, sıralanacaktır.

a. Harfler birbirlerine göre kaç değişik biçimde sıralanabilir?

b. Çember düzlemine iki yanından da bakılabildiğine göre, kaç değişik sıralama yapılabilir? (Halka)

c. Harflerin konulacağı eşit aralıklı 6 noktanın çember düzlemindeki konumları belirlenmiş ise, kaç değişik sıralama yapılabilir?

Problem – 4

A, A, A, B, C, D harleri bir çember üzerine eşit aralıklarla, aynı harfler yan yana olmamak üzere, sıralanacaktır.

a. Harfler birbirlerine göre kaç değişik biçimde sıralanabilir?

b. Çember düzlemine iki yanından da bakılabildiğine göre, kaç değişik sıralama yapılabilir? (Halka)

c. Harflerin konulacağı eşit aralıklı 6 noktanın çember düzlemindeki konumları belirlenmiş ise, kaç değişik sıralama yapılabilir?

Problem – 5

A, A, B, B, C, D harleri bir çember üzerine eşit aralıklarla, aynı harfler yan yana olmamak üzere, sıralanacaktır.

a. Harfler birbirlerine göre kaç değişik biçimde sıralanabilir?

b. Çember düzlemine iki yanından da bakılabildiğine göre, kaç değişik sıralama yapılabilir? (Halka)

c. Harflerin konulacağı eşit aralıklı 6 noktanın çember düzlemindeki konumları belirlenmiş ise, kaç değişik sıralama yapılabilir?

Problem – 6

$K = \{A, B, C, D\}$ kümesinden, her harften istenildiği kadar olmak üzere, 6 harf alınıp aynı harfler yan yana olmamak üzere, bir sırada dizilecektir.

a. Kaç değişik sıralama yapılabilir?

b. İlk ve son harflerin aynı olmadığı kaç değişik sıralama yapılabilir?

Problem – 7

Dairesel bir levhanın bir yüzü 6 eşit daire dilimine bölünüp her bir dilim, farklı renkteki 4 boyanın biri ile boyanacaktır. Ardışık iki daire dilimi aynı renkte olmayacaktır.

a. Kaç değişik boyama yapılabilir?

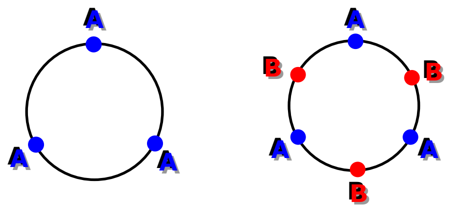
b. Dilimlenmiş levhanın düzlemdeki konumu belirlenmiş ise, kaç değişik boyama yapılabilir?

c. Levhanın iki yüzü de aynı yerlerinden dilimlenip her dilimin iki yüzü de aynı renge boyansaydı; kaç değişik boyama yapılabilirdi?

Çözümler

Problem – 1

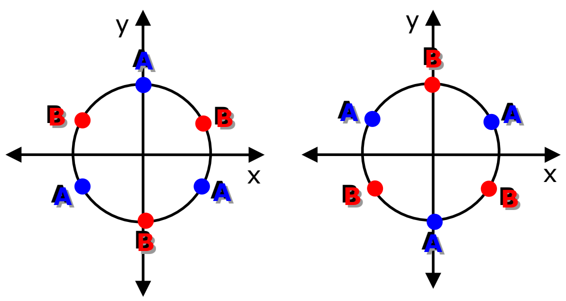
a. A'lar bir biçimde yerleştirilir. Ayırdıkları aralıklara B'ler, belirtilen koşula uygun olarak, bir biçimde sıralanabilir.



b. Belirtilen koşula uygun sıralama bir biçimde yapılabilir.

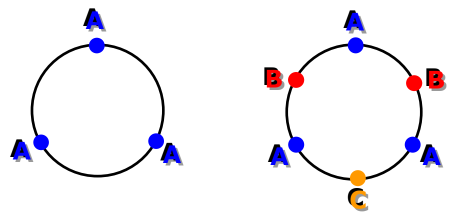
c. y ekseninin pozitif yanı A ile ya da B ile başlatılabilir.

2 değişik sıralama yapılabilir.



Problem – 2

a. A'lar bir biçimde yerleştirilir. Ayırdıkları aralıklara C ve B'ler, belirtilen koşula uygun olarak, bir biçimde sıralanabilir.

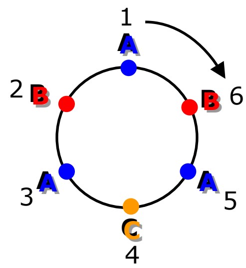


b. Belirtilen koşula uygun sıralama bir biçimde yapılabilir.

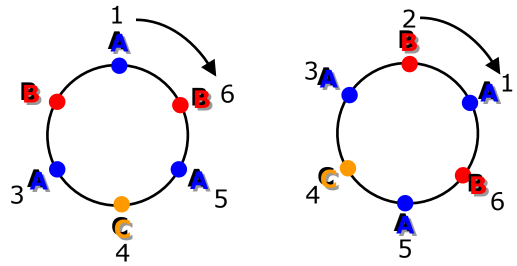
c. **C** harfi 6 değişik konumda olabileceğine göre, 6 değişik sıralama yapılabilir.

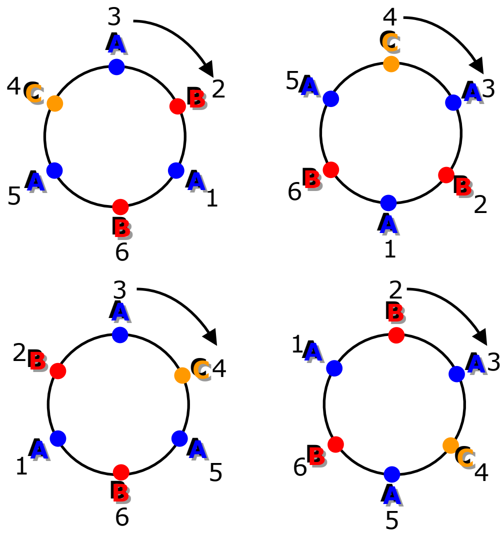
Bir tane C harfinin sağladığı kolaylığı göz ardı ederek, harflerin düzlemde konumları belirli noktalara kaç değişik biçimde sıralanabileceğinin nasıl sayılabileceğini açıklayalım:

Çember, çember düzleminde merkezi etrafında dönebiliyorsa, yalnız şekildeki sıralama mümkündür.



Bu çember merkezi etrafında, ok yönünde, her keresinde 60^0 döndürülerek harflerin tutturulduğu yerlerden ikisi, örneğin; y ekseni üzerine getirilirse, aşağıdaki görüntüler elde edilir.

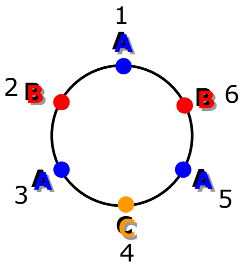




Bu görüntülerin her birinde **C**'nin farklı bir konumda olması, konumla ilişkilendirilen bu sıralamaların her birinin farklı olduğunu bir bakışta gösterir.

Problem çözerken, C'nin yol göstermediği durumlarda, tüm farklı sıralamalar bu ilk sıralama üzerinden görülebilmelidir.

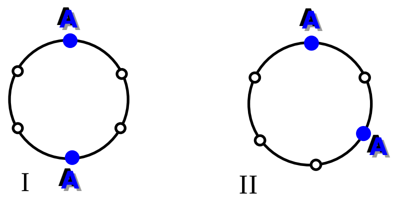
Bu, şöyle yapılabilir: A'lardan ve B'lerden başlayan sıralamalar şekil üzerinde ayrı ayrı incelenir:



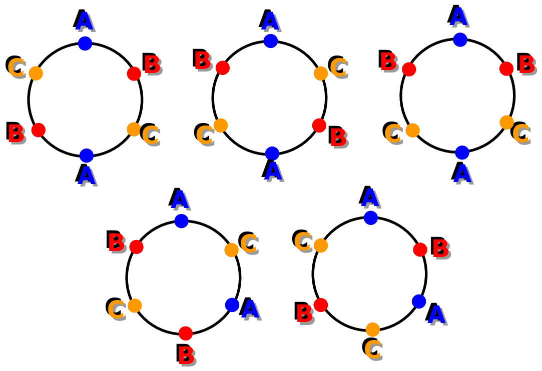
(1) ABACAB, (3) ACABAB, (5) ABABAC;
(2) BACABA, (6) BABACA
sıralamalarının farklı olduğu görülür.

Problem – 3

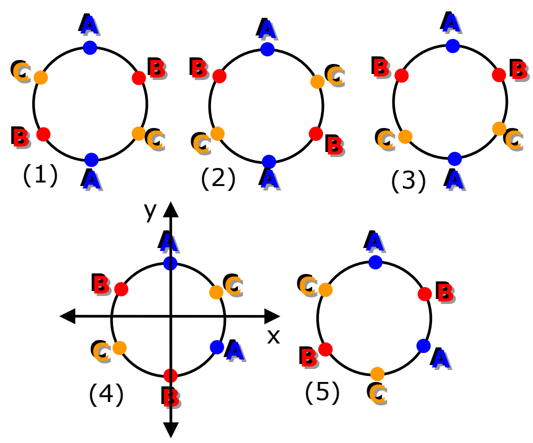
a. A'lar, aşağıdaki 2 biçimde yerleştirilebilir:



B'ler I'de 3 değişik biçimde, II'de 2 değişik biçimde sıralanır. Kalan yerlere, C'ler yerleştirilir. 5 değişik sıralama yapılabilir.



b.

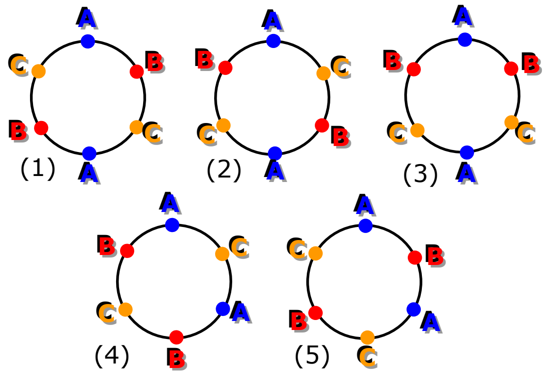


(1) ve (2) numaralı sıralamaların bir simetri ekseni yoktur. Bu yüzden; herhangi bir eksene göre simetrikleri asıllarından farklı olur. Örneğin; (1)'in AA eksenine göre simetriği (2)'yi, (2)'nin AA eksenine simetriği (1)'i verir. Buna göre; birer halka olarak düşünüldüğünde (1) ve (2) sıralamaları birbirinden farklı değildir.

(3), (4) ve (5) numaralı sıralamaların birer simetri ekseni vardır. Bunlar, sırasıyla AA, CC ve BB'dir.

Öyleyse; halka durumunda (1), (3), (4) ve (5) olmak üzere, 4 farklı sıralama yapılabilir.

c.



(1) ve (2) numaralı sıralamaların 60^{o}, 120^{o} ve 180^{o} döndürülmeleriyle elde edilen sıralamalar, 240^{o}, 300^{o} ve 0^{o} döndürülmeleriyle elde edilen sıralamalarla aynı olur. Dolayısıyla; (1) ve (2) sıralamalarının her biri, düzlemde konumları belirtilmiş noktalardaki 3'er farklı sıralamaya karşılık gelir.

(Problem-2.c'nin çözümündeki açıklamaya bakınız.)

(3), (4) ve (5) numaralı sıralamaların, 60^{o} lik 6 ardışık döndürülmesinin her biri, farklı konumdaki bir sıralamaya karşılık gelir.

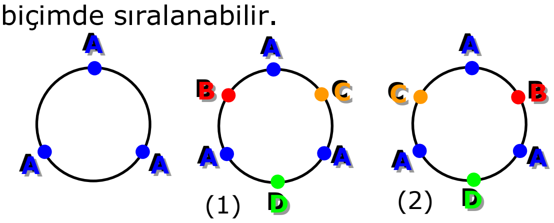
Buna göre; harflerin konulacağı eşit aralıklı 6 noktanın çember düzlemindeki konumları belirlenmiş ise harfler,

$$2\times3+3\times6=24$$

değişik konumda sıralanabilir.

Problem – 4

a. A'lar bir biçimde yerleştirilir. Ayırdıkları aralıklara B, C ve D harfleri iki değişik biçimde sıralanabilir.



b. (1) ve (2) numaralı sıralamaların bir simetri ekseni yoktur. (1)'in AD eksenine göre simetriği (2)'yi verir.

Öyleyse; halka durumunda yapılabilecek tek sıralama (1) ya da (2)'dir.

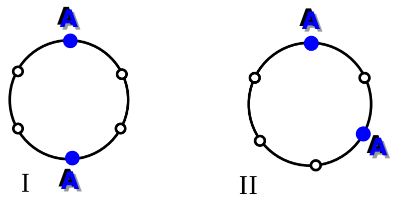
c. (1) ve (2) numaralı sıralamaların, 60^{o} lik 6 ardışık döndürülmesinin her biri, farklı konumdaki bir sıralamaya karşılık gelir.

(Daha kolay anlaşılır biçimde, (1) ve (2)'de, örneğin; B bir tane olduğundan, 6 değişik noktada bulunabilir.)

Buna göre; konumları belirlenmiş noktalardaki değişik sıralamaların sayısı $2\times6=12$ olur.

Problem – 5

a. A'lar, aşağıdaki 2 biçimde yerleştirilebilir:



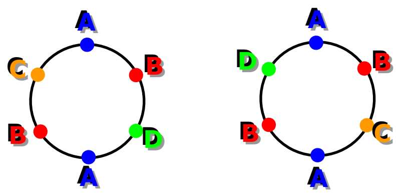
B'lerin yerleri I'de 3 değişik biçimde seçilir. Bunlardan 2'sinde C ile D 1 biçimde; birinde 2 değişik biçimde sıralanır. B'ler II'de 4 değişik biçimde yerleştirilir. Kalan yerlere, C ile D 2'şer değişik biçimde sıralanır.

Buna göre; konumları belirli olan 6 noktaya harfler,

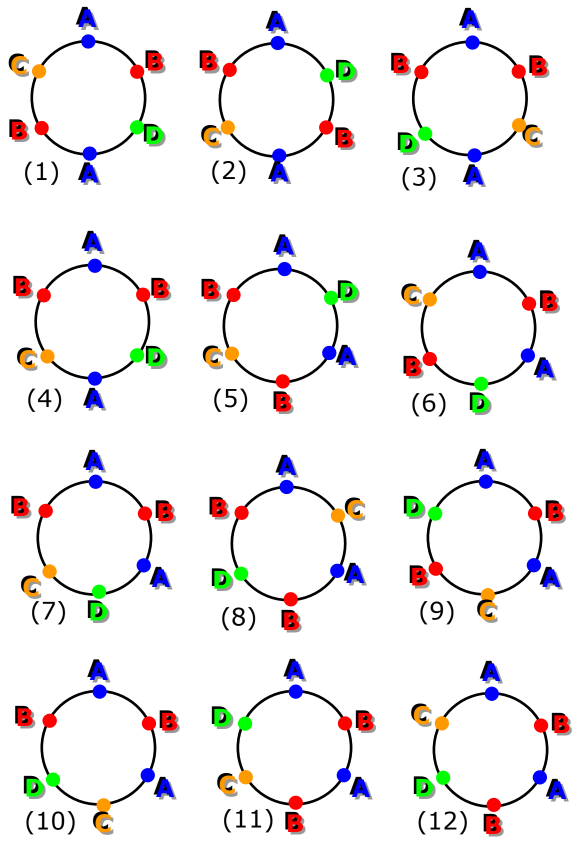
$$2\times1+5\times2=12$$

değişik biçimde sıralanabilir.

Çemberin, merkezi etrafında dönebilmesi durumunda, örneğin; aşağıdaki sıralamaların aynı olduğuna dikkat ediniz!



Değişik sıralamaların tümü aşağıdadır:



b. Yukarıdaki sıralamalardan (5) ile (8), CD eksenine göre simetriktir. Halka durumunda bu sıralamalar tek biçimde kalır. Geriye kalan 10 sıralamanın bir simetri ekseni yoktur. Bu durumda, her birinin merkezden geçen bir eksene göre simetriği bir diğer sıralama olur. (Tüm sıralamaların sayısı belli olduğu için.) Örneğin; (1)'in CD eksenine göre simetriği (2)'dir.

O halde; düzlemsel 12 değişik sıralamanın halkadaki karşılıklarının sayısı,

$2+\dfrac{10}{2}=7$ olur.

Başka bir deyişle; halkadaki 7 değişik sıralama, düzlem üzerine halkanın farklı yanlarından oturtularak, düzlemdeki 12 değişik sıralama elde edilebilir.

c. Çemberin, merkezi etrafında döndürülebildiği durumdaki 12 değişik sıralamanın her biri belirlenmiş noktalara 6 değişik biçimde eşleştirilir. Bu; her sıralamada bulunan, örneğin; bir tane C'nin, 6 değişik konumda olabileceği düşünülerek de kolaylıkla görülür.

O halde; harflerin, konumları belirlenmiş noktalardaki değişik sıralamalarının sayısı,

$12\times 6=72$ olur.

Problem – 6

a. Sıranın başı için 4 harf seçeneği, ardışık her yer için 3 harf seçeneği vardır.

4	3	3	3	3	3

$4\times 3^5=972$ değişik sıralama yapılabilir.

b. İlk ve son harflerin aynı olduğu değişik sıralamaların sayısını tüm değişik sıralamaların sayısından çıkarırsak, geriye ilk ve son harflerin aynı olmadığı sıralamaların sayısı kalır.

İlk ve son harflerin A olduğu durumları sayalım:

İlk ve son harfler A iken diğerlerinin içinde A bulunmayabilir.

A	3	2	2	2	A

Bu sıralamaların sayısı, $3\times 2^3=24$ olur.

İlk ve son harfler A iken diğerlerinden biri A olabilir.

Aradaki A, ya 3. ya da 4. sırada olmalıdır.

A	3	A	3	2	A

A	3	2	A	3	A

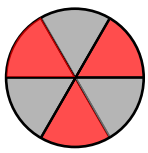
Bu sıralamaların sayısı da, $2 \times 2 \times 3^2 = 36$ olur.
İlk ve son harflerin A olduğu $24 + 36 = 60$ değişik sıralama vardır.
4 farklı harf olduğuna göre; ilk ve son harflerin aynı olduğu değişik sıralamaların sayısı $C(4,1) \times 60 = 240$ olur.

Buna göre; istenen sıralamaların sayısı, $972 - 240 = 732$ olarak bulunur.

Problem – 7

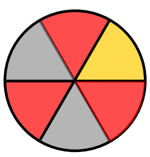
a. Dairesel levha, verilen koşul altında 2, 3 ya da 4 değişik renk kullanılarak boyana-bilir.
Kullanılacak renkler kırmızı, gri, sarı ve mavi olsun. (K, G, S, M)

2 renk kullanılırsa:
KKKGGG gibi, komşu olmayan üçer dilim aynı renge boyanmalıdır. Bu durumda; renklerden biri 3'ten fazla seçilemez. Her iki renk seçimi ile bir biçimde boyama yapıla-bilir.



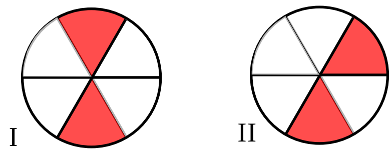
Bu durumda; $C(4,2) = 6$ değişik renk seçi-mi yapılabileceğinden, 6 değişik boyama yapılabilir.

3 renk kullanılırsa:
Örneğin; seçilecek K, G, S renkleri KKKGGS ya da KKGGSS alt seçimleri ile kullanılabilir.
KKKGGS seçiminde, KKK aralıklı olarak sıralanır. Ayırılan 3 aralık G,G,S ile yalnız bir biçimde boyanır. (Problem-2'ye bakınız)

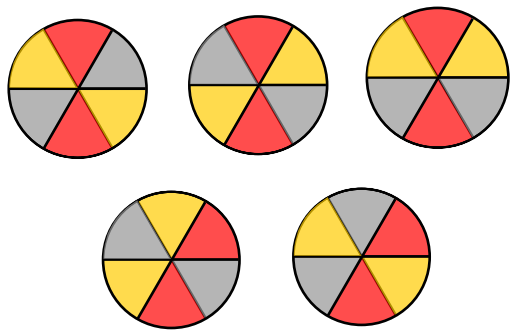


4 rengin üçü $C(4,3) = 4$ biçimde seçilir. Bu 3 renkten biri $C(3,1) = 3$ biçimde seçilip dilimlerin üçü bu renkle; kalan 2 renkten biri $C(2,1) = 2$ biçimde seçilip dilimlerin ikisi bu renkle boyanır. Kalan dilim de kalan renkle boyanır.
Bu durumda; $C(4,3) \times C(3,1) \times C(2,1) = 24$ değişik boyama yapılabilir.

KKGGSS seçiminde, KK renkli dilimler aşağıdaki 2 biçimde yerleştirilebilir.

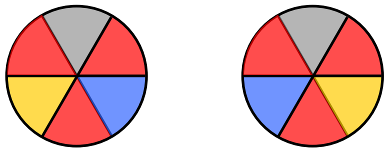


I'de, GG renkleri ile boyanacak dilimler 3 değişik biçimde; , II'de 2 değişik biçimde seçilir. Kalan dilimler SS ile boyanır.
5 değişik boyama yapılabilir.



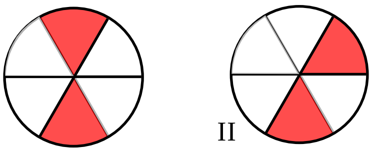
Bu durumda da; $C(4,3) \times 5 = 20$ değişik boyama yapılabilir.
Üç renkle yapılabilecek değişik boyamaların toplam sayısı $24 + 20 = 44$ olur.
(Problem-3'e bakınız.)

4 renk kullanılırsa:
Renkler, örneğin; KKKGSM ya da KKGGSM alt seçimleri ile kullanılabilir.
KKKGSM seçiminde, KKK aralıklı olarak sıralanır. Ayırılan 3 aralık G,S,M ile iki değişik biçimde boyanır.



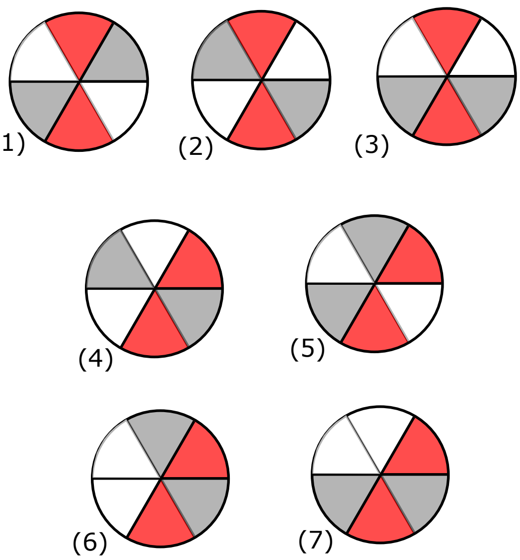
Üç dilimin boyanacağı renk $C(4,1)$ biçimde seçilebilir. Bu durumda; $C(4,1)\times 2 = 8$ değişik boyama yapılabilir.

KKGGSM seçiminde, KK renkli dilimler aşağıdaki 2 biçimde yerleştirilebilir.



I II

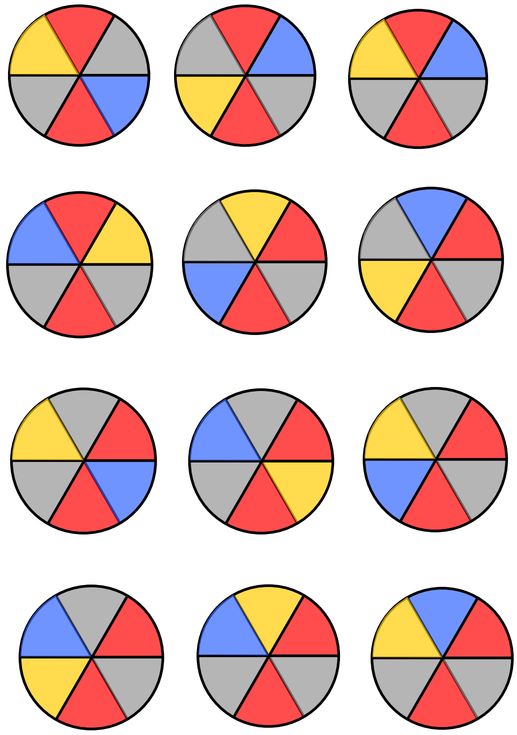
I'de, GG renkleri ile boyanacak dilimler 3 değişik biçimde; , II'de 4 değişik biçimde seçilir.



(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

(1) ve (2)'de S ile M renkleri ile boyanacak dilimler 1 biçimde; diğerlerinde 2'şer biçimde seçilir.

Değişik boyamaların tümü aşağıdadır:



İkişer dilimde kullanılacak renkler $C(4,2)$ biçimde seçilir.

Bu durumda; $C(4,2)\times(5\times 2 + 2\times 1) = 72$ değişik boyama yapılabilir.

4 renkle yapılabilecek değişik boyamaların toplam sayısı $8 + 72 = 80$ olur.

Belirtilen koşula uygun değişik boyamaların toplam sayısı $6 + 44 + 80 = 130$ olur.

b. 1. yol

Dilimlenmiş levhanın düzlemdeki konumu belirlenmiş ise;

2 renkli, 3 renkli, 4 renkli boyamalar incelenirse, (İlk 5 problemin çözümünde bu ayrıntılı olarak açıklandı) 3 renkli boyamaların KKGGSS türündeki 2 değişik sıralamanın, koordinatları belirli noktalara eşleştirilmesinin 3 değişik sıralama getireceği; bunun dışındaki tüm sıralamaların 6 değişik sıralama getireceği görülür.

2 renkli değişik boyamaların sayısı,

$$2 \times 6 = 12\,;$$

3 renkli boyamaların sayısı,

KKKGGS seçiminde, $24 \times 6 = 144$ ve

KKGGSS seçiminde, $12 \times 6 + 8 \times 3 = 96$;

4 renkli boyamaların sayısı,

$$8 \times 6 + 72 \times 6 = 480\text{'dir.}$$

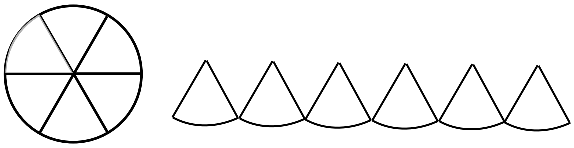
Buna göre; belirlenmiş koordinatlardaki değişik sıralamaların toplam sayısı,

$$12 + 144 + 96 + 480 = 732$$

olarak bulunur.

2. yol

Dairenin dilimlerini ayırıp yan yana dizelim:



Bu durumda; problem şöyle ifade edilebilir:

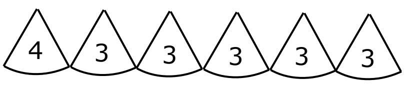
"Sıraya dizilmiş dilimler, 4 değişik renkteki boyalarla, ardışık dilimler aynı renkte olmamak üzere, boyanacaktır. Baştaki ve sondaki dilimler de farklı renkte olacaktır.

Kaç değişik boyama yapılabilir?"

(problem-6'ya bakınız.)

Bu da şöyle çözülebilir:

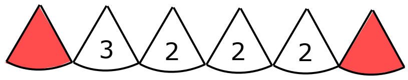
Tüm boyamaların sayısı, $4 \times 3^5 = 972$ olur.



Baştaki ve sondaki dilimlerin aynı renkte olduğu değişik boyamaların sayısını tüm değişik boyamaların sayısından çıkarırsak, geriye baştaki ve sondaki dilimlerin aynı renkte olmadığı boyamaların sayısı kalır.

Baştaki ve sondaki dilimlerin kırmızı olduğu boyamaları sayalım:

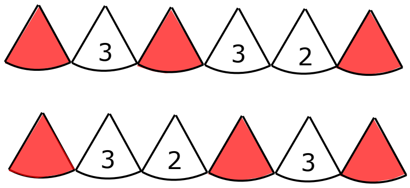
İlk ve son dilimler kırmızı iken, diğerlerinin içinde kırmızı bulunmayabilir.



Bu boyamaların sayısı, $3 \times 2^3 = 24$ olur.

İlk ve son dilimler kırmızı iken diğerlerinden biri de kırmızı olabilir.

Aradaki kırmızı 3. ya da 4. sırada olmalıdır.



Bu boyamaların sayısı da, $2 \times 2 \times 3^2 = 36$ olur.

Baştaki ve sondaki dilimlerin kırmızı olduğu $24 + 36 = 60$ değişik boyama yapılabilir.

4 farklı renkli boya olduğuna göre; baştaki ve sondaki renklerin aynı olduğu değişik boyamaların sayısı $C(4,1) \times 60 = 240$ olur.

Buna göre; istenen boyamaların sayısı, $972 - 240 = 732$ olarak bulunur.

c. 2 renkli, 3 renkli, 4 renkli değişik boyalı levhaların bir simetri ekseninin bulunup bulunmamasına bağlı olarak, arkalı önlü farklı boyamaların sayısı bulunabilir.

Arkalı önlü boyandığında,

2 renk ile boyamada bir boyama;

3 renk ile boyamada,

KKKGGS türü bir boyama ve

KKGGSS türü 4 değişik boyama;

4 renk ile boyamada,

KKKGSM türü bir boyama ve

KKGGSM türü 7 değişik boyama olmak üzere, toplam olarak 14 değişik boyama yapılabileceği görülür.

(İlk 5 problemin b maddelerinde açıklanmıştır.)