

TÜREV

Türev matematikte, fizikte, ekonomide, mühendislik dallarında,... kısaca, pozitif bilimlerin tamamında kullanılan çok önemli bir konudur.

Bu konunun anlaşılması, fonksiyonlar ve limit konularının çok iyi bilinmesine bağlıdır.

TANIM:

Bağımsız değişkendeki (x) artma veya azalma gibi bir değişime (dx) karşılık, bağımlı değişkende (y) de bir değişiklik (dy) olur. Bu iki değişim miktarının oranı $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, limit durumunda; yani serbest değişkende sifıra yakın bir değişiklik olduğunda; **türev** adını alır.

y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ veya $Df(x)$ şeklinde gösterilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi $f'(a)$

veya $\frac{df}{dx}(a)$ veya $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a}$ sembollerinden birisi ile gösterilir. Burada, $\frac{d}{dx}$ e **türev alma operatörü** denir.

TÜREV ALMA KURALLARI**1) SABİTİN TÜREVİ**

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun türevi sıfırdır.

$$y = c \Rightarrow y' = 0 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = 7 \Rightarrow y' = 0$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

ÖRNEK:

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = \operatorname{sgn}(x^2 + 5) \Rightarrow y' = 0$ dir.

2) $f(x) = x^n$ in TÜREVİ

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonu x noktasında türevli olsun.

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^{7-1} = 7x^6$$

ÖRNEK:

$$y = x^{1996} \Rightarrow y' = 1996x^{1996-1} = 1996x^{1995}$$

ÖRNEK:

$$y = x \Rightarrow y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$$

ÖRNEK:

$$y = x^e \Rightarrow y' = e x^{e-1}$$

ÖRNEK:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = x^{-2} \Rightarrow y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \text{ tür.}$$

3) SABİT İLE FONKSİYONUN ÇARPIMININ TÜREVİ

$c \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ve f, x noktasında türevli bir fonksiyon olsun.

$$y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x) \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = 10x^2$$

fonksiyonunun türevini alalım:

$$f'(x) = (10x^2)' = 10(2x^1) = 20x$$

ÖRNEK:

$$y = 4 \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y = 4x^{2/3}$$

$$\Rightarrow y' = 4 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} \text{ dir.}$$

4) İKİ FONKSİYONUN TOPLAMININ TÜREVİ

f ve g , x noktasında türevli iki fonksiyon olsun.

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$y = x^4 - 7x^2 + 5 \Rightarrow y' = 4x^3 - 7 \cdot 2x + 0 \\ \Rightarrow y' = 4x^3 - 14x$$

ÖRNEK:

$$y = \sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^2} \Rightarrow y = x^{1/4} + 2x^{-2} \\ \Rightarrow y' = \frac{1}{4} x^{-3/4} + 2 \cdot (-2) x^{-3} \\ \Rightarrow y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{4}{x^3}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{7}{\sqrt{x}} + 5 \Rightarrow y = 7x^{-1/2} + 5 \\ \Rightarrow y' = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} + 0 \\ \Rightarrow y' = -\frac{7}{2x\sqrt{x}} \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \sum_{k=1}^n x^k \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM:

Bir toplamın türevi, türevlerin toplamına eşit olduğuna göre,

$$y = \sum_{k=1}^n x^k = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \\ \text{ve } \frac{dy}{dx} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

olarak bulunur.

5) İKİ FONKSİYONUN ÇARPIMIN TÜREVİ

f ve g , x noktasında türevli iki fonksiyon olsun.

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (1 - x^3)$$

olduğuna göre, $f'(-1)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (1 - x^3) \text{ ise} \\ f'(x) = (x^2 - 1)' \cdot (1 - x^3) + (1 - x^3)' \cdot (x^2 - 1) \\ \Rightarrow f'(x) = (2x) \cdot (1 - x^3) + (-3x^2) \cdot (x^2 - 1) \\ \Rightarrow f'(-1) = 2 \cdot (-1) \cdot [1 - (-1)^3] - 3 \cdot (-1)^2 \cdot [(-1)^2 - 1] \\ \Rightarrow f'(-1) = (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 0 \Rightarrow f'(-1) = -4 \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$$y = x^2(3x - 1)(1 - x^2)$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}(0)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$y = f(x) = x^2(3x - 1)(1 - x^2) \text{ ise,} \\ \frac{dy}{dx} = f'(x) = (x^2)' \cdot (3x - 1) \cdot (1 - x^2) + (3x - 1)' \cdot x^2 \cdot (1 - x^2) \\ + (1 - x^2)' \cdot x^2 \cdot (3x - 1) \\ \Rightarrow f'(x) = 2x(3x - 1) \cdot (1 - x^2) + 3x^2(1 - x^2) - 2x \cdot x^2(3x - 1) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0) = f'(0) = 0 \text{ dir.}$$

UYARI:

$$f, g \text{ ve } h, x \text{ noktasında türevli fonksiyonlar olsun.} \\ y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \\ \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + g'(x) \cdot f(x) \cdot h(x) \\ + h'(x) \cdot f(x) \cdot g(x)$$

6) İKİ FONKSİYONUN BÖLÜMÜNÜN TÜREVİ

f ve g , x noktasında türevli iki fonksiyon olsun.

$g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{x}{x^3 + 1} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot (x^3 + 1) - 3x^2 \cdot x}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x \cdot (x^2 + 2x) - (2x + 2) \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(x^2 + 2x)^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{3x - 2}$$

olduğuna göre, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulalım.

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)' \cdot (3x - 2) - (3x - 2)' \cdot (2x - 3)}{(3x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(3x - 2) - 3(2x - 3)}{(3x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x - 4 - 6x + 9}{(3x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{(3x - 2)^2} \text{ dir.}$$

KURAL:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} \text{ fonksiyonunun türevi,}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2 + ex + f)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(ae - db)x^2 + 2(af - dc)x + bf - ec}{(dx^2 + ex + f)^2}$$

şeklinde pratik yolla hesaplanabilir.

ÖRNEK:

$$y = \frac{2x^2 + x - 2}{x^2 + x + 3}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{(x^2 + x + 3)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2 + 16x + 5}{(x^2 + x + 3)^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \text{ fonksiyonunun } x = 1 \text{ noktasın-}$$

daki türevi nedir?

A) $\frac{7}{6}$ B) 1 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = x \cdot x^{1/2} \cdot x^{-1/3} = x^{7/6} \text{ olur.}$$

$$f'(x) = \frac{7}{6} x^{1/6} \Rightarrow f'(1) = \frac{7}{6} \text{ dir.}$$

Cevap : A

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x^2}{x} \text{ fonksiyonunun } x = 1 \text{ noktasın-}$$

daki türevi nedir?

- A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) -1

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x^2}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{x^2}{x} = x^{-1/2} + x \text{ olur.}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} + 1 \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Cevap : C**ÖRNEK:**

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \text{ olduğuna göre, } f'(16) \text{ kaç}$$

eşittir?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} = x^{3/4} \text{ olur.}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \Rightarrow f'(16) = \frac{3}{8} \text{ olur.}$$

Cevap : B**7) BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ (TÜREVDE ZİNCİR KURALI)**

g fonksiyonu x noktasında, f fonksiyonu da y = g(x) noktasında türevlenebilir olsun.

y = f(g(x)) bileşke fonksiyonunun türevi alınırken, g(x) tanım kümesinin elemanı olduğundan, f(g(x)) in g(x) e göre türevi alınır ve g'(x) ile çarpılır.

Buna göre y = (fog)(x) = f(g(x)) bileşke fonksiyonunun türevi,

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ tir.}$$

Bileşke fonksiyonların bu şekilde türev alma kuralına **zincir kuralı** denir.

İSPAT 1:

y = (fog)(x) = f(g(x)) te u = g(x) denilirse,

y = f(g(x)) = f(u) olur.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot g'(x) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ tir.} \end{aligned}$$

İSPAT 2:

y = (fogoh)(x) = f(g(h(x))) te

u = g(h(x)) ve z = h(x) denilirse,

y = f(g(h(x))) = f(u) ve u = g(z) olur.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= f'(u) \cdot g'(z) \cdot h'(x) \text{ tir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} y &= f(x^2) \Rightarrow y' = f'(x^2) \cdot (x^2)' \\ &= f'(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} y &= f(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' \\ &= f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = u^3$, $u = z^2 + z + 1$ ve $z = x^2$ ise,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot (2z + 1) \cdot 2x \\ &= 3(x^4 + x^2 + 1)^2 \cdot (2x^2 + 1) \cdot 2x\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$x > 0$ ve

$$f(x^2 - x) = (2x - 1)^3 + x^2 + 3$$

olduğuna göre, $f'(0)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM:

$y = f(x^2 - x)$ fonksiyonunun türevi, $g(x) = x^2 - x$ olmak üzere, $y = f(x^2 - x) = (f \circ g)(x)$ fonksiyonunun türevidir.

O halde,

$$\begin{aligned}f(x^2 - x) &= (2x - 1)^3 + x^2 + 3 \\ \Rightarrow f'(x^2 - x) \cdot (x^2 - x)' &= 3(2x - 1)^2 \cdot (2x - 1)' + 2x + 0 \\ \Rightarrow f'(x^2 - x) \cdot (2x - 1) &= 3(2x - 1)^2 \cdot 2 + 2x \text{ ve} \\ x^2 - x = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = 1 \text{ dir.}\end{aligned}$$

$x > 0$ olduğundan, x yerine $x = 1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}f'(1^2 - 1) \cdot (2 \cdot 1 - 1) &= 3 \cdot (2 \cdot 1 - 1)^2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ \Rightarrow f'(0) \cdot 1 &= 6 \cdot 1 + 2 \Rightarrow f'(0) = 8 \text{ dir.}\end{aligned}$$

KURAL:

$$y = [f(x)]^n \Rightarrow y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \text{ tir.}$$

İSPAT:

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = [f(x)]^n$ fonksiyonu x noktasında türevli olsun.

$u = f(x)$ denilirse $y = [f(x)]^n = u^n$ olur.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= n \cdot u^{n-1} \cdot u' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$y = (x^2 - 2x + 3)^3$$

$$\Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 3)^{3-1} \cdot (x^2 - 2x + 3)'$$

$$\Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 3)^2 \cdot (2x - 2)$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{2}{(x^3 + x + 1)^4}$$

$$\Rightarrow y = 2(x^3 + x + 1)^{-4}$$

$$\Rightarrow y' = 2 \cdot (-4) \cdot (x^3 + x + 1)^{-4-1} \cdot (x^3 + x + 1)'$$

$$\Rightarrow y' = -8(x^3 + x + 1)^{-5} \cdot (3x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-8(3x^2 + 1)}{(x^3 + x + 1)^5}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{3}{(x^2 - 2)^4} \text{ olduğuna göre, } y' \text{ türevini bulalım.}$$

ÇÖZÜM:

$y = 3(x^2 - 2)^{-4}$ şeklinde yazılırsa,

$$y' = 3 \cdot (-4) \cdot (x^2 - 2)^{-5} \cdot (x^2 - 2)'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-12}{(x^2 - 2)^5} \cdot 2x \Rightarrow y' = \frac{-24x}{(x^2 - 2)^5} \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

İsa GEDİK**TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI**

$f(x) = x \cdot g(x)$, $g(2) = 4$ ve $g'(2) = 3$ olduğuna göre $f'(2)$ kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 10 E) 12

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot g(x) + g'(x) \cdot x \text{ ve}$$

$$f'(2) = g(2) + g'(2) \cdot 2 = 4 + 6 = 10$$

Doğru cevap D seçeneğidir.

ÖRNEK:

$f(x) = \frac{g(x)}{3x+1}$, $g(0) = 2$, $g'(0) = -3$ olduğuna göre $f'(0)$ kaçtır?

- A) -9 B) -6 C) -3 D) 4 E) 8

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \frac{g(x)}{3x+1}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot (3x+1) - 3 \cdot g(x)}{(3x+1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{g'(0) - 3g(0)}{1}$$

$$= -3 - 3 \cdot 2 = -9 \text{ olur.}$$

Doğru cevap (A) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^3 + mx^2 + 4x + n$ polinomunun $(x+1)^2$ ile tam bölünebilmesi için n ne olmalıdır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM:

$P(x)$ polinomu $(x+1)^2$ ile tam bölünebiliyorsa bölme özdeşliğine göre

$$P(x) = (x+1)^2 \cdot B(x)$$

$$P(-1) = 0 \text{ dir. Diğer taraftan}$$

$$P'(x) = 2(x+1) \cdot B(x) + B'(x) \cdot (x+1)^2$$

$$P'(x) = (x+1) [2B(x) + B'(x) \cdot (x+1)]$$

$$P'(-1) = 0 \text{ olur.}$$

$$P(x) = 2x^3 + mx^2 + 4x + n \Rightarrow P(-1) = -2 + m - 4 + n = 0$$

$$\Rightarrow m + n = 6$$

$$P'(x) = 6x^2 + 2mx + 4 \Rightarrow P'(-1) = 6 - 2m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = 5$$

$$m = 5 \text{ için } 5 + n = 6 \Rightarrow n = 1 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (D) seçeneğidir.

8) KÖKLÜ FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$n > m$ olmak üzere,

$y = \sqrt[n]{[f(x)]^m}$ fonksiyonunun türevi,

$y' = \frac{mf'(x)}{n \sqrt[n]{[f(x)]^{n-m}}}$ şeklinde pratik yolla hesaplanabilir.

Eğer $n = 2$ ve $m = 1$ seçilirse,

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$y = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y = (x^2 + 1)^{2/3}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x^2 + 1)'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{-1/3} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x}{3 \sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - 5x)^2}$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$u = x^2 - 5x \text{ olsun.}$$

$$u' = 2x - 5 \text{ olduğu için,}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left[\sqrt[3]{u^2} \right]' \\ &= \left(u^{\frac{2}{3}} \right)' \\ &= \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{2}{3}-1} \cdot u' \\ &= \frac{2 \cdot u'}{3 \cdot \sqrt[3]{u}} \\ &= \frac{2(2x-5)}{3 \sqrt[3]{x^2-5x}} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$y = \sqrt{4x^2 - x}$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$u = 4x^2 - x \text{ olsun.}$$

$$u' = 8x - 1 \text{ olduğu için,}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{u} \right)' \\ &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{8x-1}{2\sqrt{4x^2-x}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \text{ ise } f(1) \cdot f'(1) \text{ nedir?}$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x} \right)' = \frac{1 \cdot x - 1 \cdot (x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \text{ dir. } f(1) = \sqrt{2} \text{ ve}$$

$$f(1) \cdot f'(1) = \sqrt{2} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{3}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow y = 3(x+3)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow y' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+3)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (x+3)'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{3}{2} \cdot (x+3)^{-3/2} \cdot 1$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{3}{2(x+3)\sqrt{x+3}} \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$$y = \sqrt[5]{(x^2+7)^3} \Rightarrow y' = \frac{3(x^2+7)'}{5\sqrt[5]{(x^2+7)^{5-3}}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(x^2+7)^2}}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}$$

olduğuna göre, $f'(0)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} (2x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x^2 - 3x + 1)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(2x^2-3x+1)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{-3}{3\sqrt[3]{1^2}} = -1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow y' = \frac{(x^2 + x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x(x+1)\sqrt{x^2+x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x(x+1)\sqrt{x^2+x}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2+x)(x^2+x)^{1/2} = (x^2+x)^{3/2} \text{ olur.}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2+x)^{1/2}(x^2+x)'$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x^2+x}(2x+1) \Rightarrow f'(1) = \frac{9}{2}\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Cevap : C**ÖRNEK:**

$y = u^3 + u^2$, $u = z^2 + 1$ ve $z = x^2 + x + 1$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ türevinin $x = 0$ için değeri nedir?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 32

ÇÖZÜM:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= (3u^2 + 2u) \cdot (2z) \cdot (2x + 1) \text{ olur.}$$

$x = 0$ için $z = 1$ ve $u = 2$ olduğundan,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 32 \text{ dir.}$$

Cevap : E**ÖRNEK:**

$f(x^3 + x + 1) = x^2 + x + 1$ olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM:

$f(x^3 + x + 1) = x^2 + x + 1$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alalım.

$$f'(x^3 + x + 1) \cdot (x^3 + x + 1)' = 2x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x^3 + x + 1) \cdot (3x^2 + 1) = 2x + 1 \text{ olur.}$$

$$x = 1 \text{ için } f'(3) \cdot 4 = 3 \Rightarrow f'(3) = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Cevap : A**ÖRNEK:**

$g(0) \neq 0$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{x}{g(x^2)}$ olduğuna göre, $f'(0)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) $g(0)$ C) $g'(0)$
D) $\frac{1}{g(0)}$ E) $\frac{1}{g'(0)}$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \frac{x}{g(x^2)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot g(x^2) - g'(x^2) \cdot 2x \cdot x}{g^2(x^2)}$$

$$f'(0) = \frac{1 \cdot g(0) - g'(0) \cdot 0}{g^2(0)} = \frac{1}{g(0)} \text{ dir.}$$

Cevap : D**ÖRNEK:**

f ve g fonksiyonları $x = 1$ noktasında türevli,

$g(1) = 0$ ve $f'(-1) \neq 0$ olmak üzere,

$f(x \cdot g(x) - x) = 2x - x^2$ olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM:

İsa GEDİK**TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI**

$f(x \cdot g(x) - x) = 2x - x^2$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alalım.

$$f'(x \cdot g(x) - x) \cdot (x \cdot g(x) - x)' = 2 - 2x$$

$$\Rightarrow f'(x \cdot g(x) - x) \cdot (1 \cdot g(x) + g'(x) \cdot x - 1) = 2 - 2x$$

olur. $x = 1$ için,

$$f'(g(1) - 1) \cdot (g(1) + g'(1) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow f'(-1) \cdot (g'(1) - 1) = 0 \text{ olur.}$$

$f'(-1) \neq 0$ olduğundan,

$$g'(1) - 1 = 0 \Rightarrow g'(1) = 1 \text{ dir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$f(x) = g^2(x^2 - x + 1)$ ise $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2 g(1) \cdot g'(1)$ B) $g(1) \cdot g'(1)$ C) $g'(1)$

D) $g(1)$ E) 0

ÇÖZÜM:

$$f(x) = g^2(x^2 - x + 1) = [g(x^2 - x + 1)]^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= 2[g(x^2 - x + 1)]^1 \cdot [g(x^2 - x + 1)]' \\ &= 2 g(x^2 - x + 1) \cdot g'(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)' \\ &= 2 g(x^2 - x + 1) \cdot g'(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) \end{aligned}$$

olur.

$$f'(1) = 2 g(1) \cdot g'(1) \text{ dir.}$$

Cevap : A

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu veriliyor.

$$f'(f'(x)) = 2 \text{ ise } x = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ ise } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(f'(x)) = (f' \circ f')(x) = 2$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \circ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 64 \text{ bulunur.}$$

9) TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

$A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu bire bir ve örten olmak üzere f fonksiyonu $x_0 \in A$ da türevli ve $f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ da türevli olsun.

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ dir. Eşitliğin her iki tarafının x e göre türevini alalım.

$$x' = [f^{-1}(y)]'$$

$$\Rightarrow 1 = (f^{-1})'(y) \cdot y'$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} \text{ olur.}$$

$y = f(x)$ te $y = y_0$ için $x = x_0$ olmak üzere,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dir.}$$

UYARI:

Bir fonksiyonun tersinin türevini hesaplamak için bu fonksiyonun önce tersi bulunur. Daha sonra da ters fonksiyonun türevi alınır.

Ancak bir fonksiyonun tersinin herhangi bir noktadaki türevini hesaplamak için ters fonksiyonu bulmaya gerek yoktur. Yukarıdaki eşitlik kullanılarak ters fonksiyonun bir noktadaki türevi hesaplanabilir.

ÖRNEK:

$$f(x) = 4x - 1$$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(5)$ i bulalım.

ÇÖZÜM:

Fonksiyonun tersini bulup türevini alalım:

$$f(x) = 4x - 1 \text{ ise } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{4} \text{ tür.}$$

Buna göre,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{4}$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

2.YOL:

Tersini kolayca bulamayacağımız fonksiyonlarla da karşılaşabiliriz. Bunun için, şimdi de verilen kuralı uygulayalım:

$y_0 = 5$ deki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_0 = 5$ koşulunu sağlayan x_0 değerini bulmalıyız.

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_0 = 4x_0 - 1$$

$$5 = 4x_0 - 1$$

$$x_0 = \frac{3}{2} \dots (\star)$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} \text{ dir. Buna göre,}$$

$$f(x) = 4x - 1$$

$$f'(x) = 4$$

$$f'(1) = 4$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} \text{ ise } (f^{-1})'(5) = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$ ise $(f^{-1})'(x)$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Önce $f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun tersini bulalım.

$$y = x^3 - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} \text{ olur.}$$

x ile y nin yerleri değiştirilirse,

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} \text{ tür.}$$

O halde,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3} \cdot (x+1)'$$

$$= \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK:

$x > 2$ olmak üzere, $f(x) = (x-2)^2 + 1$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(5)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

ÇÖZÜM:

1.YOL

Fonksiyonun tersini bulup türevini alalım:

$x > 2$ ve $f(x) = (x-2)^2 + 1$ ise,

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$ dir.

Buradan

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

2.YOL:

İsa GEDİK**TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI**

$y_0 = 5$ deki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_0 = 5$ koşulunu sağlayan x_0 değerini bulmalıyız.

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_0 = (x_0 - 2)^2 + 1$$

$$5 = (x_0 - 2)^2 + 1$$

$$\sqrt{(x_0 - 2)^2} = \sqrt{4}$$

$$|x_0 - 2| = 2, (x_0 > 2)$$

$$x_0 - 2 = 2$$

$$x_0 = 4 \dots (\star)$$

Buna göre,

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$f'(x) = 2 \cdot (x - 2)$$

$$f'(4) = 2 \cdot (4 - 2)$$

$$f'(4) = 4$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(4)}$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Cevap C

ÖRNEK:

$f: [1, \infty) \rightarrow [-3, \infty)$, $f(x) = x^2 - 2x - 2$ için $(f^{-1})'(x)$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Önce $f(x) = x^2 - 2x - 2$ fonksiyonunun tersini bulalım.

$$y = x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3 \Rightarrow (x - 1)^2 = y + 3$$

$$\Rightarrow |x - 1| = \sqrt{y + 3}$$

$x > 1$ (f nin tanım kümesinden) olduğundan,

$$\Rightarrow x - 1 = \sqrt{y + 3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y + 3} + 1 \text{ olur.}$$

x ile y nin yerleri değiştirilirse,

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3} + 1 \text{ elde edilir.}$$

O halde,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{(x + 3)'}{2\sqrt{x + 3}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$f: [1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ için $(f^{-1})'(3)$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

f^{-1} in $y_0 = 3$ noktasındaki türevini hesaplamak için f^{-1} i bulmaya gerek yoktur.

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ eşitliğinden hesaplayabiliriz.

$$y = f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x - 5 \text{ olur.}$$

$$y_0 = 3 = 3x_0^2 - 5x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = 2 \text{ veya } x_0 = -\frac{1}{3}$$

Ancak $-\frac{1}{3} \notin [1, \infty)$ olduğundan $y_0 = 3$ için

$x_0 = 2$ dir.

O halde,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{6 \cdot 2 - 5} = \frac{1}{7} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 - x$$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(6)$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{11}$

ÇÖZÜM:

İsa GEDİK**TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI**

$y_0 = 6$ daki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_0 = 6$ koşulunu sağlayan x_0 değerini bulmalıyız.

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_0 = x_0^3 - x_0$$

$$6 = x_0^3 - x_0$$

$$x_0 = 2 \dots (\star)$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)} \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1$$

$$f'(2) = 11$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{11} \text{ dir.}$$

Cevap E

ÖRNEK:

$f: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ için $(f^{-1})'(8)$ değerini bulalım.

ÇÖZÜM:

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ eşitliğini kullanalım.

$y = f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ olur.

$$y_0 = 8 = x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2$$

$$\Rightarrow x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_0^3 - 2x_0^2 - x_0^2 + x_0^2 - x_0 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + x_0^2 - x_0 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 - 3)(x_0^2 + x_0 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 3 \text{ tür.}$$

o halde,

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{3 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 - 1} = \frac{1}{14} \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$ ise,

$\sqrt{x^2 + 2x} \cdot \frac{df^{-1}(x)}{dx}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-x$ B) $-x - 1$ C) $-x - 2$
D) $x + 1$ E) $x + 2$

ÇÖZÜM:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

$$\Rightarrow y + 1 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow (y + 1)^2 - 1 = x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y + 1)^2 - 1} = |x|$$

$x < 0$ (f nin tanım kümesinden) olduğundan,

$$\Rightarrow \sqrt{(y + 1)^2 - 1} = -x$$

x ile y nin yerleri değiştirilirse,

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{(x + 1)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 2x}$$

bulunur.

O halde,

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = -\frac{(x^2 + 2x)'}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$\sqrt{x^2 + 2x} \cdot \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \sqrt{x^2 + 2x} \cdot \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} = -x - 1 \text{ dir.}$$

Cevap : B

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ olduğuna göre $(f^{-1})'(6) = ?$

ÇÖZÜM:

$y_0 = 6$ için $x^3 - x = 6$ burdan $x_0 = 2$ bulunur.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$$

bu taktirde

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{11} \text{ bulunur.}$$

10) TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

A) Sinx FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \sin u(x) \Rightarrow y' = \cos u(x) \cdot u'(x)$$

ÖRNEK:

$$y = \sin(2x - 60^\circ)$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \sin(2x - 60^\circ)$$

$$2x - 60^\circ = u \text{ olsun.}$$

$$u' = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(60^\circ)$$

$$u' = 2$$

$$y = \cos u$$

$$y' = u' \cdot \cos u$$

$$= 2 \cos(2x - 60^\circ) \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}[x \sin x + x]$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2 \cos x - \sin x + 1$

B) $x \cos x + \sin x + 1$

C) $2 \cos x + \sin x + 1$

D) $2 \cos x + x \sin x + 1$

E) $2 \sin x - x \sin x$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x \sin x + x) &= \frac{d}{dx}(x \sin x) + \frac{d}{dx}(x) \\ &= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + 1 \\ &= x \cos x + \sin x + 1 \end{aligned}$$

Cevap B

ÖRNEK:

$$y = \sin \frac{x}{3} \Rightarrow y' = \cos \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$$

ÖRNEK:

$y = \sin(\sqrt[3]{x^2})$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y = \sin(\sqrt[3]{x^2}) &\Rightarrow y' = \cos(\sqrt[3]{x^2}) \cdot (\sqrt[3]{x^2})' \\ &= \cos(\sqrt[3]{x^2}) \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \text{ tir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin^3 x) &= 3 \sin^2 x \cdot (\sin x)' \\ &= 3 \sin^2 x \cdot \cos x \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} y = \sin^3 5x &\Rightarrow y' = 3 \sin^2 5x \cdot (\sin 5x)' \\ y' &= 3 \sin^2 5x \cdot (5 \cos 5x) \\ y' &= 15 \sin^2 5x \cdot \cos 5x \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin(\sin x)) &= (\sin x)' \cdot \cos(\sin x) \\ &= \cos x \cdot \cos(\sin x) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \sin(\sin^2 x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y &= \sin(\sin^2 x) \\ y' &= \cos(\sin^2 x) \cdot (\sin^2 x)' \\ &= \cos(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)' \\ &= \cos(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\ &= \cos(\sin^2 x) \cdot \sin 2x \text{ tir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \sin^7(x^2)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y &= \sin^7(x^2) = (\sin x^2)^7 \\ y' &= 7(\sin x^2)^6 \cdot (\sin x^2)' \\ &= 7(\sin x^2)^6 \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' \\ &= 7(\sin x^2)^6 \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\ &= 14x \cdot \sin^6(x^2) \cdot \cos x^2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

2.YOL

Şimdi de $y = \sin^7(x^2)$ fonksiyonunun türevini zincir kuralı yardımı ile hesaplayalım.

$y = \sin^7(x^2)$ ifadesinde,
 $x^2 = z$, $\sin z = u$ denilirse $y = u^7$ olur.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= 7u^6 \cdot \cos z \cdot 2x \\ &= 7 \sin^6(x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\ &= 14x \cdot \sin^6(x^2) \cdot \cos x^2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \frac{2}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = 2(\sin x)^{-2/3} \\ \Rightarrow y' &= 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (\sin x)^{-5/3} \cdot (\sin x)' \\ &= -\frac{4 \cos x}{3 \sin x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = -\frac{4 \cot x}{3 \sqrt[3]{\sin^2 x}} \text{ tir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = 2^{\sin x}$ ise $y' = ?$

ÇÖZÜM:

$y' = \cos x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2$ dir.

ÖRNEK:

$y = e^{\sin^2 x}$ ise $y' = ?$

ÇÖZÜM:

$y' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$ dir.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(3x+4) = \sin ax$ ve
 $f'(4) = 2$ ise a nın değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

$f'(3x+4) \cdot 3 = \cos ax \cdot a$ bu türevde $x=0$ değerini yerine koyalım.

$$f'(3 \cdot 0 + 4) \cdot 3 = \cos(a \cdot 0) \cdot a$$

$$f'(4) \cdot 3 = \cos 0 \cdot a$$

$$2 \cdot 3 = 1 \cdot a \Rightarrow a = 6 \text{ bulunur.}$$

A) Cosx FONKSİYONUNUN TÜREVİ

O halde,

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \cos u(x) \Rightarrow y' = -\sin u(x) \cdot u'(x) \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$4x + \frac{\pi}{6} = u \text{ olsun.}$$

$$u' = \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$u' = 4$$

$$y = \cos u$$

$$y' = -u' \cdot \sin u$$

$$= -4 \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}
 y &= \cos^2 \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\cos \frac{1}{x} \right)' \\
 \Rightarrow y' &= 2 \cos \frac{1}{x} \left[-\sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' \right] \\
 \Rightarrow y' &= 2 \cos \frac{1}{x} \left[-\sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right] \\
 \Rightarrow y' &= \frac{2}{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\sin 3x) + \frac{d}{dx} (\cos 2x) \\
 = 3 \cdot \cos 3x - 2 \sin 2x
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}
 y &= \cos(\sin 2x) \Rightarrow y' = -\sin(\sin 2x) \cdot (\sin 2x)' \\
 \Rightarrow y' &= -\sin(\sin 2x) \cdot (2 \cos 2x) \\
 \Rightarrow y' &= -2 \sin(\sin 2x) \cdot \cos 2x
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}
 y &= 3 \sin 2x + 4 \cos 5x \text{ ise,} \\
 y' &= 3 \cdot (2x)' \cos 2x + 4 \cdot (-5x)' \sin 5x \\
 \Rightarrow y' &= 6 \cos 2x - 20 \sin 5x
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\sin^3 x + \cos^3 x) &= 3 \sin^2 x \cdot (\sin x)' + 3 \cos^2 x \cdot (\cos x)' \\
 &= 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \\
 &= 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) \\
 &= \frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x)
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos^2(\sin x) \text{ ise, } f'(x) \text{ türev fonksiyonu} \\
 f(x) &= [\cos(\sin x)]^2 \text{ olduğundan,} \\
 f'(x) &= 2[\cos(\sin x)] \cdot [\cos(\sin x)]' \\
 &= 2 \cos(\sin x) \cdot [-(\sin x)' \cdot \sin(\sin x)] \\
 &= 2 \cos(\sin x) \cdot \sin(\sin x) \cdot (-\cos x) \\
 &= -\cos x \cdot \sin(2 \sin x)
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \sqrt{\cos(\sqrt{x})}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{\cos(\sqrt{x})} \Rightarrow y' = \frac{(\cos(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x})}} \\
 &= \frac{-\sin(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x})}} \\
 &= \frac{-\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x})}} \\
 &= -\frac{\sin(\sqrt{x})}{4\sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x})} \text{ tir.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \cos(\sin x^2)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}
 y &= \cos(\sin x^2) \\
 y' &= -\sin(\sin x^2) \cdot (\sin x^2)' \\
 &= -\sin(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' \\
 &= -\sin(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\
 &= -2x \cdot \sin(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

Şimdi de $y = \cos(\sin x^2)$ fonksiyonunun türevini zincir kuralı yardımı ile hesaplayalım.

$y = \cos(\sin x^2)$ ifadesinde,
 $x^2 = z$, $\sin z = u$ denilirse $y = \cos u$ olur.

O halde,

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \text{ tir.} \\
 &= -\sin u \cdot \cos z \cdot 2x \\
 &= -2x \cdot \sin(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \frac{x}{\cos^3 x}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Bölümün türevi uygulanırsa,

$$y = \frac{x}{\cos^3 x}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \cos^3 x - 3 \cos^2 x \cdot (\cos x)' \cdot x}{(\cos^3 x)^2}$$

$$= \frac{\cos^3 x - 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot x}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\cos x + 3x \cdot \sin x}{\cos^4 x} \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = \sin(\sin x) \cdot \cos x$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Çarpımın türevi uygulanırsa,

$$y = \sin(\sin x) \cdot \cos x$$

$$y' = \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin(\sin x) \\ = \cos(\sin x) \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \sin(\sin x) \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = x + \cos^2(1 - x^2)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = x + \cos^2(1 - x^2) = x + [\cos(1 - x^2)]^2$$

$$y' = 1 + 2[\cos(1 - x^2)]^1 \cdot [\cos(1 - x^2)]' \\ = 1 + 2 \cos(1 - x^2) \cdot [-\sin(1 - x^2)] \cdot (1 - x^2)' \\ = 1 + 2 \cos(1 - x^2) \cdot [-\sin(1 - x^2)] \cdot (-2x) \\ = 1 + 2x \cdot 2 \cos(1 - x^2) \cdot \sin(1 - x^2) \\ = 1 + 2x \cdot \sin(2 - 2x^2) \text{ dir.}$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \tan u(x) \Rightarrow y' = (1 + \tan^2 u(x)) \cdot u'(x) \\ = \sec^2 u(x) \cdot u'(x) \text{ tir.}$$

İSPAT:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

bölümün türevi uygulanırsa,

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \tan^2 3x \Rightarrow y' = 2 \tan 3x \cdot (\tan 3x)'$$

$$y' = 2 \tan 3x \cdot [(1 + \tan^2 3x) \cdot 3]$$

$$y' = 6 \tan 3x \cdot (1 + \tan^2 3x)$$

ÖRNEK:

$$y = \tan x^3 + \tan^3 x$$

$$\Rightarrow y' = (1 + \tan^2 x^3) \cdot (x^3)' + 3 \tan^2 x \cdot (\tan x)'$$

$$\Rightarrow y' = (1 + \tan^2 x^3) 3x^2 + 3 \tan^2 x \cdot (1 + \tan^2 x)$$

ÖRNEK:

$y = \sqrt[4]{\tan 3x}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \sqrt[4]{\tan 3x} = (\tan 3x)^{1/4}$$

$$y' = \frac{1}{4} (\tan 3x)^{-3/4} \cdot (\tan 3x)'$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{\tan^3 3x}} \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot (3x)'$$

$$= \frac{3(1 + \tan^2 3x)}{4\sqrt[4]{\tan^3 3x}} \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = \tan(x^2 - \sin 5x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \tan(x^2 - \sin 5x)$$

$$\Rightarrow y' = \sec^2(x^2 - \sin 5x) \cdot (x^2 - \sin 5x)'$$

$$= \sec^2(x^2 - \sin 5x) \cdot (2x - 5 \cos 5x) \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = \tan^7(\cos x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \tan^7(\cos x) = [\tan(\cos x)]^7$$

$$y' = 7 [\tan(\cos x)]^6 \cdot (\tan(\cos x))'$$

$$= 7 \tan^6(\cos x) \cdot \sec^2(\cos x) \cdot (\cos x)'$$

$$= -7 \tan^6(\cos x) \cdot \sec^2(\cos x) \cdot \sin x \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}(\sin x^3 + \tan \sqrt{x}) = (x^3)' \cos x^3 + (\sqrt{x})'(1 + \tan^2 \sqrt{x})$$

$$= 3x^2 \cos x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \tan^2 \sqrt{x})$$

ÖRNEK:

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x) = \tan x$$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(1)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{11}$

ÇÖZÜM:

$y_0 = 1$ deki türevi hesaplayacağımıza göre, $y_0 = 1$ koşulunu sağlayan x_0 değerini bulmalıyız.

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_0 = \tan x_0$$

$$1 = \tan x_0$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \dots (\star)$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \text{ tür. Buna göre,}$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Cevap A

D) $\cot x$ FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \cot u(x) \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 u(x)) \cdot u'(x) = -\csc^2 u(x) \cdot u'(x) \text{ tir.}$$

İSPAT:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

bölümün türevi uygulanırsa,

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$y = \cot x \cdot \sqrt[3]{\cot^2 x}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \cot x \cdot (\cot x)^{2/3} = (\cot x)^{5/3}$$

$$y' = \frac{5}{3} (\cot x)^{2/3} \cdot (\cot x)'$$

$$= \frac{5}{3} \sqrt[3]{\cot^2 x} \cdot (-\csc^2 x)$$

$$= -\frac{5}{3} \sqrt[3]{\cot^2 x} \cdot \csc^2 x \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = \cot \left(x + \frac{1}{x^2} \right)^2$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \cot \left(x + \frac{1}{x^2} \right)^2 = \cot (x + x^{-2})^2$$

$$y' = -\csc^2 (x + x^{-2})^2 \cdot [(x + x^{-2})^2]'$$

$$= -\csc^2 (x + x^{-2})^2 \cdot 2(x + x^{-2})^1 \cdot (x + x^{-2})'$$

$$= -2 \csc^2 (x + x^{-2})^2 \cdot (x + x^{-2}) \cdot (1 - 2x^{-3})$$

tür.

ÖRNEK:

$f(x) = \tan(\cot x)$ ise, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulalım.

ÇÖZÜM:

$u = \cot x$ denilirse, $f(x) = \tan u$ olur.

$$f(x) = \tan u \text{ ise, } f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u} \text{ olur.}$$

$$u' = \frac{-1}{\sin^2 x} \text{ olduğundan, } f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x \cdot \cos^2(\cot x)}$$

ÖRNEK:

$y = \sec^3 x$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \sec^3 x = (\sec x)^3$$

$$y' = 3(\sec x)^2 \cdot (\sec x)'$$

$$= 3 \sec^2 x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} \right)'$$

$$= 3 \sec^2 x \cdot \left(\frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{\cos^2 x} \right)$$

$$= 3 \sec^4 x \cdot \sin x \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{\sin 3x + \cos x}{\tan x} \text{ ise } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \text{ nedir?}$$

A) $-4\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) 0 D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

ÇÖZÜM:

Bölümün türev kuralından,

$$f'(x) = \frac{(\sin 3x + \cos x)' \tan x - (\tan x)' (\sin 3x + \cos x)}{(\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3\cos 3x - \sin x) \tan x - (1 + \tan^2 x)(\sin 3x + \cos x)}{(\tan x)^2}$$

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{(3\cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) \tan \frac{\pi}{4} - (1 + \tan^2 \frac{\pi}{4})(\sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4})}{(\tan \frac{\pi}{4})^2} \\ &= \frac{(-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot 1 - (1+1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{1} \\ &= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Doğru cevap (A) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \tan \left(\frac{\pi}{4} \cos 2x \right) \text{ ise } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \text{ nin değeri nedir?}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{\pi}{2}$ E) π

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \cos 2x \right)] \left(\frac{\pi}{4} \cos 2x \right)' \\ &= [1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \cos 2x \right)] \cdot \left[\frac{\pi}{4} (-2 \sin 2x) \right] \\ &= [1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \cos 2x \right)] \cdot \left[-\frac{\pi}{2} \sin 2x \right] \\ f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= [1 + \tan^2 0] \cdot \left[-\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right] \\ &= (1+0) \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Doğru cevap (D) seçeneğidir.

**11) TERS TRİGONOMETRİK
FONKSİYONLARIN TÜREVİ**

A) Arcsin x FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \text{Arcsin } x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \text{Arcsin } u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \text{ tir.}$$

İSPAT:

$f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, $f(x) = \text{Arcsin } x$ olmak üzere,

$$y = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ olur.}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$x' = (\sin y)'$$

$$\Rightarrow 1 = \cos y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} \text{ olur.}$$

$$x = \sin y \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2} \text{ olduğundan,}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$y = \text{Arcsin } x^3$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \text{Arcsin } x^3$$

$$y' = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f'(x) = \arcsin(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{1 - (x^2 + 1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + 1)^2}}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ için $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \arcsin \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \text{ olur.}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ ise $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ nedir?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) 2

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \arcsin \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{1 - x}}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Doğru cevap (D) seçeneğidir.

ÖRNEK:

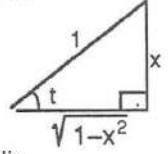
$f(x) = \cos(\arcsin x)$ ise $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ nin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

Önce verilen fonksiyonu düzenliyorum.

$$f(x) = \cos(\arcsin x) = \cos t$$

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin t$$



Bu durumda $f(x) = \cos t = \sqrt{1 - x^2}$ dir

$$f'(x) = \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

B) Arccosx FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ dir.}$$

Buna göre, bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \arccos u(x) \Rightarrow y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} \text{ tir.}$$

İSPAT:

$f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ olmak üzere,

$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ olur.

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$x' = (\cos y)'$$

$$\Rightarrow 1 = -\sin y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin y} \text{ olur.}$$

$$x = \cos y \Rightarrow \sin y = \sqrt{1 - x^2} \text{ olduğundan,}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$y = \sqrt{1-x^2}$. Arccos x fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

Çarpımın türevi uygulanırsa,

$$y = \sqrt{1-x^2} \cdot \text{Arccos } x$$

$$y' = (\sqrt{1-x^2})' \cdot \text{Arccos } x + (\text{Arccos } x)' \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \text{Arccos } x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{-x \cdot \text{Arccos } x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \arccos(\sin x), 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ise } f'(x) = ?$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \arccos(\sin x^2), 0 < x^2 < \frac{\pi}{2} \text{ ise } f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (\sin x^2)'}{\sqrt{1-(\sin x^2)^2}} = \frac{-1 \cdot \cos x^2 \cdot 2x}{\sqrt{1-\sin^2 x^2}}$$

$$= \frac{-2x \cdot \cos x^2}{\sqrt{\cos^2 x^2}} = \frac{-2x \cdot \cos x^2}{\cos x^2} = -2x$$

C) Arctanx FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \text{Arctan } x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ dir.}$$

Buna göre, bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \text{Arctan } u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \text{ tir.}$$

İSPAT:

$f: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \text{Arctan } x$ olmak üzere,

$$y = \text{Arctan } x \Leftrightarrow x = \tan y \text{ olur.}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınır,

$$x' = (\tan y)'$$

$$\Rightarrow 1 = \sec^2 y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y \text{ olur.}$$

$$x = \tan y \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ olduğundan,}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \text{Arctan}(\sin x)$ için $f'(\frac{\pi}{4})$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \text{Arctan}(\sin x)$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \text{ olur.}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} \text{ ise } f'(1) \text{ nedir?}$$

A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ buradan } f'(1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Doğru cevap (C) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$y = \cos(\arctan x) \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM:

$$\left. \begin{array}{l} u = \arctan x \\ y = \cos u \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot u'$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(\arctan x) \cdot (\arctan x)'$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Diğer taraftan ,

$$u = \arctan x$$

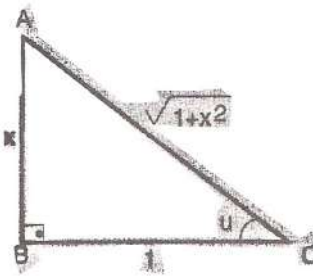
$$\Rightarrow x = \tan u$$

$$\Rightarrow \sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ dir.}$$

$$\text{O halde } \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK:**

$$f(x) = \arctan \sqrt{x} \text{ ise } f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \arctan(1-x^2) \text{ ise } f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)'}{1 + (1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1 + (1-x^2)^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \arctan \sqrt{1+x} \text{ ise } f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{1+x})'}{1 + (\sqrt{1+x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+1+x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}(2+x)} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \sin(\arctan x) \text{ ise } f'(x) = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \sin u \\ u = \arctan x \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

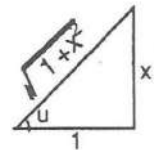
Zincir kuralını uyguluyalım.

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{1+x^2} = \cos(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

bunu daha kısa yazmak gerekirse

$$u = \arctan x \Rightarrow x = \tan u$$

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

D) Arccotx FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \text{Arccot } x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ dir.}$$

Burada, bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \text{Arccot } u(x) \Rightarrow y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \text{ tir.}$$

İSPAT:

$f: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \pi)$, $f(x) = \text{Arccot } x$ olmak üzere,

$$y = \text{Arccot } x \Rightarrow x = \cot y \text{ olur.}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$x' = (\cot y)'$$

$$\Rightarrow 1 = -\csc^2 y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\sin^2 y \text{ olur.}$$

$$x = \cot y \Rightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ olduğundan,}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK:

$y = \text{Arccot} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \text{Arccot} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-(x - \frac{1}{x})'}{1 + (x - \frac{1}{x})^2} = \frac{-(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \\ &= \frac{-(x^2 + 1)}{x^4 - x^2 + 1} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \text{arccotan}(\cos x) \text{ ise } f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (\cos x)'}{1 + \cos^2 x} = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \text{arccotan}(\tan x) \Rightarrow f'(x) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (\tan x)'}{1 + \tan^2 x} = \frac{-1(1 + \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x} = -1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ olduğuna göre, $f'(\frac{\pi^2}{4})$ türevi kaç eştir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\sin \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sin \sqrt{x})'}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})'}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$f'(\frac{\pi^2}{4}) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}}} = 0 \text{ dir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$$y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

olduğuna göre, y' aşağıdakilerden hangisi-dir?

A) $2 \sin 2x$ B) $\sin 2x$ C) $-\sin 2x$
D) $\tan x$ E) $\cot x$

İsa GEDİK
ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\csc^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sec^2 x} = \sin^4 x - \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \text{ olur.} \\ y' &= -(-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= 2 \sin 2x \text{ tir.} \end{aligned}$$

Cevap : A

ÖRNEK:

$f(x) = x \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x$ olduğuna göre, $f'(\frac{\pi}{16})$ türevi kaç eştir?

- A) $\frac{2}{5}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x = \frac{x}{2} \cdot \sin 8x \text{ olur.}$$

Çarpımın türevi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \sin 8x + (\sin 8x)' \cdot \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin 8x + 8 \cos 8x \cdot \frac{x}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 8 \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{32} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Cevap : E

TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI

ÖRNEK:

$$y = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} \text{ olduğuna göre,}$$

$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) 2x D) x E) -x

ÇÖZÜM:

$$y = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$$

Çarpımın türevi uygulanırsa,

$$\frac{dy}{dx} = x' \cdot \arccos x + (\arccos x)' \cdot x - \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \arccos x + \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot x - \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \arccos x \text{ olur.}$$

$$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos(\arccos x) = x \text{ tir.}$$

Cevap : D

ÖRNEK:

$f(x) = \arctan^2(x^2)$ olduğuna göre, $f'(1)$ türevi kaç eştir?

- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2π

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \arctan^2(x^2) = (\arctan x^2)^2 \text{ olur.}$$

$$f'(x) = 2(\arctan x^2)' \cdot (\arctan x^2)'$$

$$= 2 \arctan x^2 \cdot \frac{(x^2)'}{1 + (x^2)^2}$$

$$= 2 \arctan x^2 \cdot \frac{2x}{1 + x^4} \text{ olur.}$$

$$f'(1) = 2 \arctan(1) \cdot \frac{2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Cevap : B

ÖRNEK:

$f(x) = \cos^2 (\text{Arctan } x)$ olduğuna göre, $f'(1)$ türevi kaç eştir?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 (\text{Arctan } x) = [\cos (\text{Arctan } x)]^2 \text{ olur.} \\ f'(x) &= 2[\cos (\text{Arctan } x)]^1 \cdot [\cos (\text{Arctan } x)]' \\ &= 2 \cos (\text{Arctan } x) [-\sin (\text{Arctan } x)] \cdot (\text{Arctan } x)' \\ &= -\sin (2 \text{ Arctan } x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \text{ olur.} \\ f'(1) &= -\sin (2 \text{ Arctan } (1)) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Cevap : B**ÖRNEK:**

$f(x) = \text{Arcsec } x$ olduğuna göre, $f'(3)$ türevi kaç eştir?

- A) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{11}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{13}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{14}$

ÇÖZÜM:

$$y = \text{Arcsec } x \Leftrightarrow x = \sec y = \frac{1}{\cos y} \text{ olur.}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{1}{\cos y} \right)' \\ \Rightarrow 1 &= \frac{\sin y \cdot y'}{\cos^2 y} \\ \Rightarrow y' &= \frac{\cos^2 y}{\sin y} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{\cos y} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{x} \text{ ve } \sin y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

olduğundan,

$$y' = f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \text{ olur.}$$

$$f'(3) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \text{ dir.}$$

Cevap : C**12) LOGARİTMA FONKSİYONUN TÜREVİ**

Logaritma fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında tanımlı, sürekli ve monoton bir fonksiyondur.

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun türevi,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e \text{ veya } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \text{ dir.}$$

Buna göre, $u = u(x)$, x e göre türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \log_a e = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln a} \text{ dir.}$$

$a = e$ için, $f(x) = \ln x$ in türevi $f'(x) = \frac{1}{x}$ ve

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

ÖRNEK:

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} y = \log_3(2/x) \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x} \right)' \cdot \log_3 e \\ &= \frac{-2}{x^2} \log_3 e = -\frac{1}{x} \log_3 e \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = \log_2(x^2+x)$ ise $y = \log_2 u$ dersek

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} \log_2 e = \frac{2x+1}{x^2+x} \cdot \log_2 e$$

ÖRNEK:

$$y = \log_3(x^2 + 5x)$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$u = x^2 + 5x \text{ olsun.}$$

$$u' = 2x + 5 \text{ olduğu için,}$$

$$y' = (\log_3 u)'$$

$$= \frac{u'}{u} \cdot \log_3 e$$

$$= \frac{2x+5}{x^2+5x} \cdot \log_3 e$$

ÖRNEK:

$$y = \log_5 \sin x \text{ ise}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} \cdot \log_5 e = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \log_5 e$$

$$= \cotan x \cdot \log_5 e$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 10)$$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{4}{15}$

ÇÖZÜM:

$$y' = [\ln(x^2 - x + 10)]'$$

$$= \frac{(x^2 - x + 10)'}{x^2 - x + 10}$$

$$= \frac{2x-1}{x^2 - x + 10}$$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1^2 - 1 + 10}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ dur.}$$

Cevap B

ÖRNEK:

$$y = \ln(\tan x) \text{ ise } y = \ln u, \quad u = \tan x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

$$= \frac{1}{\tan x} + \tan x = \cotan x + \tan x$$

ÖRNEK:

$$y = \ln^2(\cotan x) \text{ ise}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = u^2 \\ u = \ln(t) \\ t = \cotan x \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

şeklinde zincir kuralını uygulayalım.

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot \frac{t'}{t} \cdot [-(1+\cotan^2 x)]$$

u ve t' yi x cinsinden yazıp yerine koyalım.

$$= 2 \ln t \cdot \frac{[-(1+\cotan^2 x)]}{\cotan x} \cdot [-(1+\cotan x)]$$

$$= 2 \cdot \ln(\cotan x) \cdot \frac{1+\cotan^2 x}{\cotan x} \cdot (1+\cotan x)$$

ÖRNEK:

$$y = \ln(\ln x) \text{ ise}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

ÖRNEK:

$y = x^2 \cdot \ln x$ çarpımın türevi, kuralını uygulayalım.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} x^2$$

$$= 2x \cdot \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

ÖRNEK:

$$y = \ln \sqrt[3]{\sin x} = \ln (\sin x)^{1/3}$$

$$y = \frac{1}{3} \ln (\sin x) \text{ haline getirilir.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{3} \cdot \cotan x \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \ln(x^2 - x) \text{ ise, } y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \log_3(1 + x^2) \text{ ise, } f'(1) \text{ in değeri}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \log_3 e \Rightarrow f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2} \cdot \log_3 e$$

$$\Rightarrow f'(1) = \log_3 e = \frac{1}{\ln 3}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} (\ln(\ln x)) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{x^3 + 6x} \text{ ise, } f'(1) \text{ in değeri,}$$

$$f(x) = \ln (x^3 + 6x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \ln (x^3 + 6x)$$

$$\text{şeklinde düzenlenirse, } f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 6x} \text{ olur}$$

$$\text{Sadeleştirme yapılırsa } f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x} \text{ ve}$$

$$x = 1 \text{ için, } f'(1) = \frac{3}{7} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{\ln \sqrt[4]{\sin x}}$$

olduğuna göre, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulalım.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \sqrt{\ln \sqrt[4]{\sin x}} = \sqrt{\ln(\sin x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} \ln(\sin x)} = \frac{1}{2} \sqrt{\ln(\sin x)}$$

$$\text{olduğuna göre, } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{[\ln(\sin x)]'}{2 \cdot \sqrt{\ln(\sin x)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\sin x)'}{\sqrt{\ln(\sin x)}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cot x}{4 \cdot \sqrt{\ln(\sin x)}} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$y = \log(\tan x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \log(\tan x) \Rightarrow y' = \frac{(\tan x)'}{\tan x} \log e$$

$$= \frac{\sec^2 x}{\tan x} \log e \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = \ln(\sqrt{\ln x})$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Logaritma özelliğinden,

$$y = \ln(\sqrt{\ln x}) = \ln(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(\ln x) \text{ olur.}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{2x \cdot \ln x} \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = \log_2 (\sqrt[3]{\sin^2 x})$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Logaritma özelliğinden,

$$y = \log_2 (\sqrt[3]{\sin^2 x}) = \log_2 (\sin x)^{2/3}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \log_2 (\sin x) \text{ olur.}$$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} \cdot \log_2 e = \frac{2}{3} \cdot \cot x \cdot \log_2 e \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Logaritma özelliğinden,

$$y' = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \ln (x^2 - 1) - \ln (x^2 + 1) \text{ olur.}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} - \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{4x}{x^4 - 1} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{\tan x} \right) \text{ ise } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = ?$$

ÇÖZÜM:

Logaritmanın özelliğinden

$$f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{\tan x} \right) = \ln(\sin x) - \ln(\tan x) \text{ şeklinde ya}$$

zıp türevini alalım

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$$

$$= \cot x - \frac{1}{\tan x} - \tan x$$

$$= \cot x - \cot x - \tan x$$

$$f'(x) = -\tan x \text{ ise } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln(x^2 \cdot \ln x) \text{ ise } f' \left(\frac{1}{e} \right) = ?$$

ÇÖZÜM:

Önce logaritma fonksiyonunun özelliğinden yararlanarak düzenleme yapıp, sonra fonksiyonunun türevini alalım.

$$f(x) = \ln(x^2 \cdot \ln x) = 2\ln x + \ln(\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\ln x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

$$f' \left(\frac{1}{e} \right) = \frac{2}{\frac{1}{e}} + \frac{1}{\frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e}} = 2e + \frac{1}{\frac{1}{e} \cdot (-1)}$$

$$= 2e - e = e \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = x - x \ln x \text{ ise } f'(e) \text{ nedir?}$$

A) e B) -e C) $\frac{1}{e}$ D) -1 E) 1

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = 1 - (1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

$$f'(e) = -\ln e = -1 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (D) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln(3 - \sqrt{2x+1}) \text{ ise } f'(0) \text{ nedir?}$$

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(3 - \sqrt{2x+1})'}{3 - \sqrt{2x+1}} = \frac{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{3 - \sqrt{2x+1}}$$

$$\text{ve } f'(0) = \frac{-1}{3-1} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (B) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln(\arctan x) \text{ ise } f'(1) \text{ nedir?}$$

A) $\frac{1}{8\pi}$ B) $\frac{1}{4\pi}$ C) $\frac{2}{\pi}$ D) $\frac{4}{\pi}$ E) π

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(\arctan x)'}{\arctan x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \text{ olur.}$$

Doğru cevap (C) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln(\cos^2 2x) \text{ ise } f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ kaçtır?}$$

A) $-\frac{4}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 4

ÇÖZÜM:

$f(x) = \ln(\cos^2 2x)$ fonksiyonu logaritma özelliğinden $f(x) = 2\ln \cos 2x$ biçiminde yazılır. Buna göre,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(\cos 2x)'}{\cos 2x} = 2 \cdot \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} = -4\tan 2x$$

$$\text{ve } f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4 \cdot \tan \frac{\pi}{6} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (A) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \log_x 5 + \arctan(\ln x) \Rightarrow f'(e) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \frac{1}{\log_5 x} + \arctan(\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \log_5 e}{(\log_5 x)^2} + \frac{1}{1+(\ln x)^2}$$

$$f'(e) = \frac{-\frac{1}{e} \log_5 e}{(\log_5 e)^2} + \frac{1}{1+(\ln e)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{e}}{\log_5 e} + \frac{1}{1+1}$$

$$= -\frac{1}{e} \ln 5 + \frac{1}{2e} = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2} - \ln 5 \right)$$

ÖRNEK:

$$f: \left[\frac{2}{3}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ye tanımlı } f(x) = \log_3(3x-2)$$

$$\text{ise } \frac{d f^{-1}}{dx}(2) = ?$$

ÇÖZÜM:**1.YOL:**

Önce fonksiyonun tersini bulup daha sonra 2'yi türevde yerine yazalım.

$$y = \log_3(3x-2) \Rightarrow 3x-2 = 3^y$$

$$x = \frac{3^y + 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{x-1} + \frac{2}{3}$$

$$\text{Bu durumda } (f^{-1})'(x) = 3^{x-1} \cdot \ln 3$$

$$(f^{-1})'(2) = 3^{2-1} \cdot \ln 3 = \ln 27$$

2.YOL:

$$y_0 = 2 \text{ için } \log_3(3x-2) = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{11}{3}$$

$$f(x) = \log_3(3x-2) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3x-2} \cdot \log_3 e$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{3}{3 \cdot \frac{11}{3} - 2} \cdot \log_3 e = \frac{1}{3 \cdot \ln 3}$$

Buna göre

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'\left(\frac{11}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3 \cdot \ln 3}} = 3 \cdot \ln 3 = \ln 27 \text{ dir.}$$

13) ÜSTEL FONKSİYONUN TÜREVİ

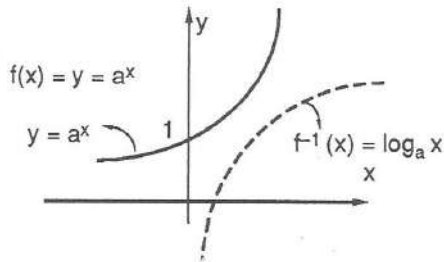
$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = a^x \text{ ise } f'(x) = a^x \cdot \ln a \text{ dir.}$$

Ayrıca, $a = e$ için, $f(x) = e^x$ ise, $f'(x) = e^x$ olur.

İSPAT:

Üstel fonksiyonlar logaritma fonksiyonunun bir ters fonksiyonudur. Buna göre ters fonksiyonunun türevini alalım.



$$y = a^x \text{ ise } x = \log_a y \text{ dir.}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\log_a y)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \log_a e} = y \cdot \frac{1}{\log_a e}$$

$$= a^x \log_e a = a^x \cdot \ln a \text{ dir.}$$

İSPAT 2:

$y = a^{g(x)}$ fonksiyonunun her iki tarafının e ta-banına göre logaritmasını alıp, daha sonra her ik-tarafın türevini alalım.

$$y = a^{g(x)}$$

$$\ln y = \ln a^{g(x)}$$

$\ln y = g(x) \cdot \ln a$ her iki tarafın türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln a$$

$$y' = g'(x) \cdot y \cdot \ln a$$

ÖRNEK:

$$y = 5^{x^3 - 2x^2}$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$u = x^3 - 2x^2$$

$$u' = 3x^2 - 4x$$

$$y = 5^u$$

$$y' = (5^u)'$$

$$= u' \cdot 5^u \cdot \ln 5$$

$$= (3x^2 - 4x) \cdot 5^{x^3 - 2x^2} \cdot \ln 5$$

olur.

ÖRNEK:

$$y = e^{2x-1}$$

olduğuna göre, y nin türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$u = 2x - 1$$

$$u' = 2$$

$$y = e^u$$

$$y' = (e^u)'$$

$$= u' \cdot e^u$$

$$= 2 \cdot e^{2x-1}$$

olur.

ÖRNEK:

$$y = e^{2x^2-3} \text{ ise } y' = ?$$

$$y' = 4x \cdot e^{2x^2-3} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = 3^{1+x^2}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$y = 3^{1+x^2}$ eşitliğinin iki yanının e tabanına göre logaritmasını alarak, y' türevini bulalım.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln 3^{1+x^2} \Rightarrow \ln y = (1+x^2) \cdot \ln 3 \\ \Rightarrow (\ln y)' &= [(1+x^2) \cdot \ln 3]' \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= 2x \cdot \ln 3 \\ \Rightarrow y' &= y \cdot 2x \cdot \ln 3 \\ \Rightarrow y' &= 2x \cdot 3^{1+x^2} \cdot \ln 3 \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = 3^{x^2-2x}$ ise $y' = ?$

$$y = 3^{(x^2-2x)} \Rightarrow y' = (2x-2) \cdot 3^{x^2-2x} \cdot \ln 3$$

ÖRNEK:

$y = \frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ ise $y' = ?$

$$y' = 1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = \sqrt[4]{e^{(x^2)}}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \sqrt[4]{e^{(x^2)}} = e^{(x^2/4)} \text{ olur.}$$

$$y' = e^{(x^2/4)} \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)' = \frac{x}{2} \cdot e^{(x^2/4)} \text{ tür.}$$

ÖRNEK:

$y = m^x + x^m$ ise $y' = ?$

$$y' = 1 \cdot m^x \cdot \ln m + m \cdot x^{m-1}$$

ÖRNEK:

$y = x^2 \cdot 3^x$ ise $y' = ?$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx} = 2x \cdot 3^x + 3^x \cdot \ln 3 \cdot x^2 \\ &= x \cdot 3^x (2+x \cdot \ln 3)\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = x \cdot 3^x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Çarpım türevinden,

$$\begin{aligned}y &= x \cdot 3^x \Rightarrow y' = (x)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x \\ \Rightarrow y' &= 1 \cdot 3^x + 3^x \cdot \ln 3 \cdot x = 3^x (1+x \ln 3) \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$f(x) = 5^x + x^5$ ise $f'(1)$ nedir?

A) 5 B) $5 \ln 5$ C) $\ln 5 + 1$ D) 10 E) $5(\ln 5 + 1)$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5^x + x^5 \Rightarrow f'(x) = (5^x)' + (x^5)' \\ \Rightarrow f'(x) &= 5^x \cdot \ln 5 + 5x^4 \text{ ve} \\ f'(1) &= 5 \ln 5 + 5 = 5(\ln 5 + 1) \text{ olur.}\end{aligned}$$

Doğru cevap (E) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$y = x \cdot e^{-x}$ ise $y' = ?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 \cdot e^{-x} + (-1) \cdot e^{-x} \cdot x = e^{-x} (1-x)$$

ÖRNEK:

$y = e^x \cdot \sin^2 x$ ise $y' = ?$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}y' &= e^x \cdot \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x \cdot e^x \\ y' &= e^x \cdot \sin^2 x + e^x \cdot \sin 2x = e^x (\sin^2 x + \sin 2x)\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = 2^{(e^x)}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

$$y = 2^{(e^x)} \Rightarrow y' = 2^{(e^x)} \cdot (e^x)' \cdot \ln 2 \\ = 2^{(e^x)} \cdot e^x \cdot \ln 2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = 2^{(2^x)}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = 2^{(2^x)} \Rightarrow y' = 2^{(2^x)} \cdot (2^x)' \cdot \ln 2 \\ = 2^{(2^x)} \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \\ = 2^{(2^x)} \cdot 2^x \cdot \ln^2 2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = 2^x + 6^x + 12^x$ ise,

$$y' = 2^x \cdot \ln 2 + 6^x \cdot \ln 6 + 12^x \cdot \ln 12 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ ise,

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot (x^2 + x + 1) \\ = (2x + 1)e^x + e^x(x^2 + x + 1) \\ = (x^2 + 3x + 2)e^x \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$e^{-x} \cdot \frac{d}{dx} (e^x \sin x) = e^{-x} \cdot (e^x \cdot \sin x + \cos x \cdot e^x) \\ = \sin x + \cos x \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$y = t^3 + 2t + 3 \\ x = \ln t$$

eşitlikleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ olmak üzere, } f'(0) \text{ değerini bulalım.}$$

ÇÖZÜM:**1.YOL:**

$x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$ değerini, $y = t^3 + 2t + 3$ eşitliğinde yerine yazıp, $y = f(x)$ kuralını bularak çözüm yapalım.

Bu durumda,

$$y = f(x) = e^{3x} + 2 \cdot e^x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x} + 2e^x \text{ olur.}$$

$$x = 0 \text{ yazılırsa, } f'(0) = 3 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0 = 5 \text{ tir.}$$

2.YOL:

$$y = t^3 + 2t + 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2 \text{ ve}$$

$$x = \ln t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \text{ olur. Buradan,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2}{\frac{1}{t}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = F(t) = 3t^3 + 2t$$

bulunur.

$\frac{dy}{dx}(0) = f'(0)$ değerini bulmak için, $x = \ln t$ eşitliğinde

$$x = 0 \text{ yazılarak bulunan, } 0 = \ln t \Leftrightarrow t = e^0 \Rightarrow t = 1$$

değeri $F(t)$ de yerine yazılırsa,

$$\frac{dy}{dx}(0) = f'(0) = F(1) = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 \\ \Rightarrow f'(0) = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$y = x^x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x \text{ olur.}$$

Elde edilen eşitliğin iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{d}{dx} (x \cdot \ln x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot (1 + \ln x)$$

$$\Rightarrow y' = x^x \cdot (1 + \ln x) \text{ olur.}$$

KURAL:

$[f(x)]^{g(x)}$ ifadesinin türevi; taban $(f(x))$ sabit olarak düşünülüp (üstel fonksiyon gibi) türev alınarak elde edilen ifade ile, üs $(g(x))$ sabit olarak düşünülüp (polinom - x^n gibi) türev alınarak elde edilen ifadenin toplanmasıyla da bulunabilir.

ÖRNEK:

$y = x^{\sin x}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

ÇÖZÜM:**1.YOL:**

Taban: x = sabit olarak düşünülürse,

$$y_1' = (\sin x)' \cdot x^{\sin x} \cdot \ln x \Rightarrow y_1' = \cos x \cdot x^{\sin x} \cdot \ln x$$

Üs: $\sin x$ = sabit olarak düşünülürse,

$$y_2' = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \Rightarrow y_2' = \frac{\sin x}{x} \cdot x^{\sin x} \text{ olur.}$$

$y = x^{\sin x}$ in türevi, $y' = y_1' + y_2'$ toplamından,

$$y' = \cos x \cdot x^{\sin x} \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \cdot x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \text{ olur.}$$

2.YOL:

$$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

şeklinde yukarıdaki 1. çözüm yolundan bulunan sonucun aynısı elde edilir.

ÖRNEK:

$$f(x) = (x+2)^{\tan x} \text{ ise } f'(0) \text{ kaçtır?}$$

- A) 0 B) $\ln 2$ C) 1 D) $1 + \ln 2$ E) $2 \ln 2$

ÇÖZÜM:

$$y = (x+2)^{\tan x} \Rightarrow \ln y = \tan x \ln(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (1 + \tan^2 x) \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \cdot \tan x$$

$$y' = y \left[(1 + \tan^2 x) \ln(x+2) + \frac{\tan x}{x+2} \right]$$

$$y' = (x+2)^{\tan x} \left[(1 + \tan^2 x) \ln(x+2) + \frac{\tan x}{x+2} \right]$$

$$y'(0) = 2^0 \left[1 \cdot \ln 2 + \frac{0}{2} \right] = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2$$

Doğru cevap (B) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} \text{ ise } f'(0) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot (e^x - x) - (e^x - 1) \cdot (e^x + x)}{(e^x - x)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{(e^0 + 1) \cdot (e^0 - 0) - (e^0 - 1) \cdot (e^0 + 0)}{(e^0 - 0)^2} \\ &= \frac{(1+1) \cdot (1-0) - (1-1) \cdot (1+0)}{(1-0)^2} = 2 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) 0

ÇÖZÜM:

Bölüm türevinden ,

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$m_{\text{teğet}} = f'(0) = \frac{2 \cdot 2 - 0}{2^2} = 1 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (C) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = e^x \cdot 2^{x^2} \text{ ise } f'(1) = ?$$

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = e^x \cdot 2^{x^2} + 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 \cdot e^x$$

$$f'(x) = e^x \cdot 2^{x^2} \cdot (1 + 2x \cdot \ln 2)$$

$$f'(1) = e^1 \cdot 2^1 (1 + 2 \cdot 1 \cdot \ln 2)$$

$$= 2e (1 + \ln 4)$$

$$= 2e (\ln e + \ln 4)$$

$$= 2e \cdot \ln(4e) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$y = \sin 2^{\sin x}$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y = \sin 2^{\sin x} &\Rightarrow y' = \cos 2^{\sin x} \cdot (2^{\sin x})' \\ &= \cos 2^{\sin x} \cdot 2^{\sin x} \cdot (\sin x)' \cdot \ln 2 \\ &= \cos 2^{\sin x} \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$y = x^{\ln x}$ fonksiyonunun türevi nedir?

A) $x^{\ln x} \cdot \ln x$ B) $\frac{\ln x}{x}$ C) $2x^{\ln x - 1}$

D) $2 \ln x \cdot x^{\ln x}$ E) $2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$

ÇÖZÜM:

$$y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2(\ln x) \cdot (\ln x)'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\Rightarrow y' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x} \cdot x^{-1} = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (E) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$y = (x^2 + x)^x$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y = (x^2 + x)^x &\Rightarrow \ln y = \ln (x^2 + x)^x \\ &\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln (x^2 + x) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln (x^2 + x) + \frac{2x + 1}{x^2 + x} \cdot x$$

$$\Rightarrow y' = (x^2 + x)^x \cdot \left(\ln (x^2 + x) + \frac{2x + 1}{x + 1} \right) \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = x^{e^x} \text{ ise } y' = ?$$

ÇÖZÜM:

$\ln y = e^x \cdot \ln x$ her iki tarafın türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot e^x \text{ ise}$$

$$y' = y \cdot e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = x^{e^x} \cdot e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = (\sin x)^x \text{ ise } y' = ?$$

ÇÖZÜM:

$y = (\sin x)^x$ her iki tarafın logaritmasını alalım.

$$\ln y = x \cdot \ln(\sin x)$$

$\ln y = x \cdot \ln(\sin x)$ her iki tarafın türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot x$$

$$y' = y (\ln(\sin x) + x \cdot \cotan x)$$

$$y' = (\sin x)^x [\ln(\sin x) + x \cdot \cotan x]$$

ÖRNEK:

$y = \sin x^x$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \sin x^x \Rightarrow y' = \cos x^x \cdot (x^x)' \text{ olur.}$$

$$z = x^x \Rightarrow \ln z = \ln x^x = x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z} = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x$$

$$\Rightarrow z' = x^x \cdot (\ln x + 1) \text{ olduğundan,}$$

$$y' = \cos x^x \cdot x^x \cdot (\ln x + 1) \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$y = 10^{\tan x} \text{ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.}$$

ÇÖZÜM:

$$y = 10^{\tan x} \Rightarrow y' = 10^{\tan x} \cdot (\tan x)' \cdot \ln 10 \\ = 10^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln 10 \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \arctan e^{-x} \text{ ise } f'(0) \text{ nedir?}$$

$$A) -2 \quad B) -1 \quad C) -\frac{1}{2} \quad D) \frac{1}{2} \quad E) 2$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \arctan e^{-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(e^{-x})'}{1+(e^{-x})^2} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}$$

$$\text{ve } f'(0) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Doğru cevap (C) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \text{ fonksiyonu için } f'\left(\frac{1}{2}\right) \text{ türevi}$$

kaçı eşittir?

$$A) 1 \quad B) \frac{8}{9} \quad C) \frac{7}{8} \quad D) \frac{5}{6} \quad E) \frac{4}{5}$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/3}$$

$$= \frac{1}{3} (\ln(x+1) - \ln(x-1)) \text{ olur.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{(x-1)'}{x-1} \right) \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{-2}{3(x^2-1)} \text{ olur.}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{3\left(\frac{1}{2^2}-1\right)} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

Cevap : B

ÖRNEK:

$$f(x) = \ln(\ln^3 x^2) \text{ fonksiyonu için } f'(e) \text{ türevi kaç}$$

eşittir?

$$A) \frac{1}{e} \quad B) \frac{2}{e} \quad C) \frac{3}{e} \quad D) e \quad E) 2e$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \ln(\ln^3 x^2) = \ln(\ln x^2)^3 \\ = 3 \cdot \ln(2 \cdot \ln x) \text{ olduğundan,}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{(2 \cdot \ln x)'}{2 \cdot \ln x} = 3 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot \ln x} = \frac{3}{x \cdot \ln x} \text{ olur.}$$

$$f'(e) = \frac{3}{e \cdot \ln e} = \frac{3}{e} \text{ dir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$$f(x) = x \cdot \log_x e \text{ fonksiyonu için } f'(e) \text{ türevi kaç}$$

eşittir?

$$A) 4 \quad B) 3 \quad C) 2 \quad D) 1 \quad E) 0$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x \cdot \log_x e = x \cdot \frac{1}{\log_e x} = \frac{x}{\ln x} \text{ olduğundan,}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \text{ olur.}$$

$$f'(e) = \frac{\ln e - 1}{\ln^2 e} = 0 \text{ dir.}$$

Cevap : E**ÖRNEK:**

$f(x) = e^{(x^2)} \cdot x^e + x$ fonksiyonu için $f'(1)$ türevi kaç eşittir?

- A) $e + 1$ B) $e + 2$ C) $e^2 + 1$
D) $(e + 1)^2$ E) e

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(x^2)} \cdot x^e + x \\ \Rightarrow f'(x) &= e^{(x^2)} \cdot 2x \cdot x^e + e \cdot x^{e-1} \cdot e^{(x^2)} + 1 \text{ olur.} \\ f'(1) &= e \cdot 2 + e \cdot e + 1 = (e + 1)^2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Cevap : D**ÖRNEK:**

$f(x) = \frac{x^2 + 2^x}{x^2 \cdot 2^x}$ fonksiyonu için $f'(1)$ türevi kaç eşittir?

- A) $-\ln(\sqrt{2} e^2)$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\ln(2e)$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2^x}{x^2 \cdot 2^x} = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2} = 2^{-x} + x^{-2} \text{ olur.} \\ f'(x) &= 2^{-x} \cdot (-1) \cdot \ln 2 - 2 \cdot x^{-3} \text{ olduğundan,} \\ f'(1) &= -2^{-1} \cdot \ln 2 - 2 = -\ln(\sqrt{2} e^2) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Cevap : A**ÖRNEK:**

$f(x) = \left(\frac{x+1}{2^x}\right)^x$ fonksiyonu için $f'(1)$ türevi kaç eşittir?

- A) $\frac{1}{2} + \ln 2$ B) $\frac{1}{2} - \ln 2$ C) $1 - \ln 2$
D) $1 + \ln 2$ E) 0

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x+1}{2^x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln \left(\frac{x+1}{2^x}\right)^x \\ &\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln \left(\frac{x+1}{2^x}\right) \\ &\Rightarrow \ln y = x \cdot (\ln(x+1) - \ln 2^x) \\ &\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln(x+1) - x^2 \cdot \ln 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= 1 \cdot \ln(x+1) + \frac{(x+1)'}{x+1} \cdot x - 2x \cdot \ln 2 \\ \Rightarrow y' &= \left(\frac{x+1}{2^x}\right)^x \cdot (\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 2x \cdot \ln 2) \text{ olduğundan,} \\ f'(1) &= \left(\frac{1+1}{2^1}\right)^1 \cdot (\ln(1+1) + \frac{1}{1+1} - 2 \cdot 1 \cdot \ln 2) \\ &= \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Cevap : B**KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ**

x ve y değişken olmak üzere, $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen bağıntılara **kapalı fonksiyon** denir.

$$3xy - x^2 - 2y = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0,$$

$$x^2y + 5x - \sqrt{y} + 3 = 0, \dots$$

şeklindeki ifadeler birer kapalı fonksiyon ya da kapalı bağıntıdır.

$F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen bir kapalı fonksiyonda,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ i hesaplarken iki yöntem kullanılır.}$$

$F(x, y) = 0$ eşitliğinin her iki tarafının x e göre türevi, zincir kuralından yararlanılarak bulunur. Elde edilen eşitlikten de $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ bulunur.

$$F(x, y) = 2x^2 - 3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3 = 0$$

olduğuna göre, $y' = F'(x, y)$ kuralını bulalım.

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow 4x - (6x \cdot y + y' \cdot 3x^2) + (3 \cdot y^2 + 2y \cdot y' \cdot 3x) + 4y' = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 6xy - 3x^2y' + 3y^2 + 6xy \cdot y' + 4y' = 0$$

$$\Rightarrow y'(-3x^2 + 6xy + 4) = 6xy - 4x - 3y^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6xy - 4x - 3y^2}{6xy - 3x^2 + 4} \text{ olur.}$$

2.YÖNTEM:

$$F(x, y) = 0 \text{ ise } F'(x, y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

* F'_x ifadesi kapalı fonksiyonun x 'e göre kısmi türevidir, bu türev alınırken y sabit bir sayı gibi kabul edilir.

* F'_y ifadesi kapalı fonksiyonun y 'ye göre kısmi türevidir. Bu türev alınırken ise x sabit bir sayı gibi kabul edilir.

ÖRNEK:

$$F(x, y) = 3x^2y^5 + 2x^3y + x^3 + y^2 + 1 = 0$$

olduğuna göre, F_x i hesaplayalım:

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = 3x^2y^5 + 2x^3y + x^3 + y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{F(x, y)\} = \frac{d}{dx}\{3x^2y^5 + 2x^3y + x^3 + y^2 + 1\}$$

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 2 \cdot 3 \cdot x^1y^5 + 3 \cdot 2 \cdot x^2y + 3 \cdot x^2 + 0 + 0$$

$$F_x = 6xy^5 + 6x^2y + 3x^2$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = 3x^2y^5 + 2x^3y + x^3 + y^2 + 1 = 0$$

olduğuna göre, F_y yi hesaplayalım:

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = 3x^2y^5 + 2x^3y + x^3 + y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{d}{dy}\{F(x, y)\} = \frac{d}{dy}\{3x^2y^5 + 2x^3y + x^3 + y^2 + 1\}$$

$$\frac{dF(x, y)}{dy} = 5 \cdot 3 \cdot x^2y^4 + 1 \cdot 2 \cdot x^3y^0 + 0 + 2y^1 + 0$$

$$F_y = 15x^2y^4 + 2x^3 + 2y$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = x^2y^{10} + x^5 + y^{21} + 1 = 0$$

olduğuna göre, F_x i hesaplayalım:

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = x^2y^{10} + x^5 + y^{21} + 1 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{F(x, y)\} = \frac{d}{dx}\{x^2y^{10} + x^5 + y^{21} + 1\}$$

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 2 \cdot x^1y^{10} + 5x^4 + 0 + 0$$

$$F_x = 2xy^{10} + 5x^4$$

ÖRNEK:

$3x^2 - y + 2x + 1 = 0$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

- I. Yol: Verilen fonksiyon $y = 3x^2 + 2x + 1$ şeklinde yazılabildiğinden dolayı

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6x + 2 \quad \text{dir.}$$

- II. Yol: $3x^2 - y + 2x + 1 = 0$ ise

$$F'(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6x+2}{-1} = 6x+2$$

- III. Yol: Terim terim türev alalım:

$$3x^2 - y + 2x + 1 = 0 \quad \text{ise}$$

$$6x - y' + 2 + 0 = 0 \Rightarrow y' = 6x + 2$$

ÖRNEK:

$x^3 + y^2 - 2xy^2 + xy + 1 = 0$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

- I. Yol: Formülden

$$F'_x = 3x^2 - 2y^2 + y, \quad F'_y = 2y - 4xy + x$$

$$F'(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 2y^2 + y}{2y - 4xy + x}$$

- II. Yol: Terim terim türev alalım.

$$x^3 + y^2 - 2xy^2 + xy + 1 = 0 \quad \text{ise türevi;}$$

$$3x^2 + 2y \cdot y' - 2y^2 - 4xy \cdot y' + y + x \cdot y' = 0$$

$$y'(2y - 4xy + x) + 3x^2 - 2y^2 + y = 0$$

$$y' = -\frac{3x^2 - 2y^2 + y}{2y - 4xy + x} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = 3x^2y + 2xy^3 + 3 = 0$$

olduğuna göre, $F'(x, y)$ yi hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Şimdi kural yardımıyla istenen türevi hesaplayalım:

$$F(x, y) = 3x^2y + 2xy^3 + 3 = 0$$

$$F_x = 6xy + 2y^3$$

$$F_y = 3x^2 + 6xy^2$$

$$F'(x, y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{6xy + 2y^3}{3x^2 + 6xy^2}$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = x^3y + x^2y^4 + x^5 + y^3 - 5 = 0$$

olduğuna göre, $F'(x, y)$ yi hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$F_x = 3x^2y + 2xy^4 + 5x^4$$

$$F_y = x^3 + 4x^2y^3 + 3y^2$$

$$F'(x, y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2y + 2xy^4 + 5x^4}{x^3 + 4x^2y^3 + 3y^2}$$

ÖRNEK:

$$F(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy + x = 0$$

kapalı fonksiyonun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$F'_x = 3x^2 - 2y + 1, \quad F'_y = 2y - 2x$$

$$F'(x,y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 2y + 1}{2y - 2x} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$x^2y + y^3 + y^2 + x^2 = 7$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

Verilen denklemde y yi x cinsinden bulmak çok zor olduğundan eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$\begin{aligned}x^2 y + y^3 + y^2 + x^2 &= 7 \\(x^2 y)' + (y^3)' + (y^2)' + (x^2)' &= (7)' \\ \Rightarrow 2xy + y' x^2 + 3y^2 y' + 2yy' + 2x &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 + 3y^2 + 2y) y' &= -2xy - 2x \\ \Rightarrow y' &= \frac{-2xy - 2x}{x^2 + 3y^2 + 2y} \text{ dir.}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$x^2 y^3 + 3xy - 2x + y - 7 = 0$ bağıntısı ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = x^2 y^3 + 3xy - 2x + y - 7$$

$$F'_x(x, y) = 2y^3 x + 3y - 2 \quad (x' \text{ e göre türev } y \text{ sabit})$$

$$F'_y(x, y) = 3x^2 y^2 + 3x + 1 \quad (y' \text{ ye göre türev } x \text{ sabit})$$

Buna göre ,

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2y^3 x + 3y - 2}{3x^2 y^2 + 3x + 1} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$F(x, y) = x^3 y^2 + x + y^2 + 5 = 0$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = x^3 y^2 + x + y^2 + 5 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 1 + 0 + 0 \quad (y \text{ sabit})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yx^3 + 0 + 2y + 0 \quad (x \text{ sabit})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 y^2 + 1}{2yx^3 + 2y} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + 1 = 0$$

olduğuna göre, $F'(x, y)$ yi hesaplayalım:

ÇÖZÜM:

Şimdi kural yardımıyla istenen türevi hesaplayalım:

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + 1 = 0$$

$$F_x = 2x - 0 + 0$$

$$F_x = 2x \quad \dots (\star)$$

$$F_y = 0 - 2y + 0$$

$$F_y = -2y \quad \dots (\star\star)$$

$$F'(x, y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

ÖRNEK:

$y > 0$ olmak üzere $x^2 + y^2 - 9 = 0$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{9 - x^2}$$

$y > 0$ olduğundan,

$$\Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2} \text{ olur.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(9 - x^2)'}{2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \text{ dir.}$$

y' türevini ikinci bir yolla daha hesaplayalım.

$x^2 + y^2 - 9 = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$2x + 2y y' - 0 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = x \cdot \cos y + y \cdot \cos x = 0$$

olduğuna göre, y' türevini bulalım.

ÇÖZÜM:**1.YOL:**

Verilen eşitliğin iki yanının x e göre türevi, zincir kuralı yardımıyla hesaplanırsa;

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (x \cdot \cos y) + \frac{d}{dx} (y \cdot \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \cos y + (-y' \cdot \sin y) \cdot x + y' \cdot \cos x - \sin x \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow y' (\cos x - x \cdot \sin y) = y \cdot \sin x - \cos y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \sin x - \cos y}{\cos x - x \cdot \sin y} \text{ olur.}$$

2.YOL:

$$F(x, y) = x \cdot \cos y + y \cdot \cos x = 0 \text{ ise}$$

$$F'_x = 1 \cdot \cos y - y \cdot \sin x \quad (y \text{ sabit})$$

$$F'_y = -x \cdot \sin y + 1 \cdot \cos x \quad (x \text{ sabit})$$

$$\text{olduğundan, } y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\cos y - y \cdot \sin x}{-x \cdot \sin y + \cos x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \sin x - \cos y}{\cos x - x \cdot \sin y} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = 1 \text{ ise}$$

$$F'(x, y) = \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM:

$$F'_x = \sin y + y \cos x, \quad F'_y = x \cdot \cos y + \sin x$$

olduğundan bunları formülde yerine yazalım.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\sin y + y \cos x}{x \cdot \cos y + \sin x}$$

ÖRNEK:

$$F(x, y) = e^x + e^y - xy = 0$$

fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$F'_x = e^x - y, \quad F'_y = e^y - x$$

$$F'(x, y) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^x - y}{e^y - x} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$x \cdot \ln y + y \cdot e^x = 0 \text{ fonksiyonunun } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM:

$$F'_x = \ln y + y \cdot e^x, \quad F'_y = \frac{x}{y} + e^x$$

Bu kısmi türevleri formülde yerine yazdığımızda

$$F'(x, y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\ln y + y e^x}{\frac{x}{y} + e^x} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$\tan(xy) + x^2 = \ln y$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$\tan(xy) + x^2 = \ln y$$

$$(\tan(xy))' + (x^2)' = (\ln y)'$$

$$\Rightarrow (1 \cdot y + y' x) \sec^2(xy) + 2x = \frac{y'}{y}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2 \sec^2(xy) + 2xy}{1 - xy \sec^2(xy)} \text{ olur.}$$

$$\tan(xy) + x^2 = \ln y \text{ eşitliğinden } x = 0 \text{ için,}$$

$$\tan(0 \cdot y) + 0^2 = \ln y$$

$$\Rightarrow 0 = \ln y \Rightarrow y = 1 \text{ bulunur. O halde,}$$

y' türevinde x yerine 0 ve y yerine 1 yazılırsa $f'(0) = 1$ elde edilir.

ÖRNEK:

$F(x, y) = e^x + \ln y + \sin(xy) + x + y = 0$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = e^x + \ln y + \sin(xy) + x + y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x + 0 + \cos(xy) \cdot y + 1 + 0 \quad (y \text{ sabit})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + \frac{1}{y} + \cos(xy) \cdot x + 0 + 1 \quad (x \text{ sabit})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{e^x + y \cdot \cos(xy) + 1}{\frac{1}{y} + x \cdot \cos(xy) + 1} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$(\sin x)^y = y^3$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki türevi kaç eştir?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM:

$$(\sin x)^y = y^3$$

$$\ln(\sin x)^y = \ln y^3$$

$$\Rightarrow y \cdot \ln(\sin x) = 3 \cdot \ln y$$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$y' \cdot \ln(\sin x) + \frac{(\sin x)'}{\sin x} \cdot y = 3 \cdot \frac{y'}{y}$$

$$\Rightarrow y^2 \cdot \cot x = (3 - y \cdot \ln(\sin x)) \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2 \cdot \cot x}{3 - y \cdot \ln(\sin x)} \text{ olur.}$$

$$(\sin x)^y = y^3 \text{ eşitliğinde } x = \frac{\pi}{2} \text{ için,}$$

$$1^y = y^3 \Rightarrow y = 1 \text{ bulunur. O halde,}$$

y' türevinde x yerine $\frac{\pi}{2}$ ve y yerine 1 yazılırsa

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

Aşağıdaki kapalı fonksiyonların $\frac{dy}{dx}$ türevlerini bulunuz.

a) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5$

b) $x - \arcsin x = y - \arcsin y$

c) $e^x + e^y = e^{x+y}$

d) $y \ln x + \arcsin xy = 1$

e) $\sin xy + \cos(2x+3y) = \frac{1}{3}$

f) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$

ÇÖZÜM:

a) $F(x,y) = (x-4)^2 + (y+2)^2 - 5 = 0$

$$F'_x = 2(x-4), \quad F'_y = 2(y+2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2(x-4)}{2(y+2)} = \frac{4-x}{y+2} \text{ olur.}$$

b) $F(x,y) = x - \arcsin x - y + \arcsin y = 0$

$$F'_x = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F'_y = -1 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-1 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

c) $F(x,y) = e^x + e^y - e^{x+y}$

$$F'_x = e^x - e^{x+y} \cdot (1+0) = e^x - e^{x+y}$$

$$F'_y = e^y - e^{x+y} \cdot (0+1) = e^y - e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^x - e^{x+y}}{e^y - e^{x+y}}$$

d) $F(x, y) = y \ln x + \arcsin xy - 1$

$$F'_x = y \cdot \frac{1}{x} + \frac{(xy)'}{\sqrt{1-(xy)^2}} = \frac{y}{x} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$$

$$F'_y = \ln x + \frac{(xy)'}{\sqrt{1-(xy)^2}} = \ln x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{y}{x} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}}{\ln x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}}$$

e) $F(x, y) = \sin xy + \cos(2x+3y) - \frac{1}{3}$

$$F'_x = \cos xy \cdot (xy)' + [-\sin(2x+3y)] \cdot (2x+3y)'$$

$$= y \cdot \cos xy - \sin(2x+3y) \cdot 2$$

$$= y \cos xy - 2 \sin(2x+3y)$$

$$F'_y = \cos(xy) \cdot (xy)' + [-\sin(2x+3y)] \cdot (2x+3y)'$$

$$= x \cos xy - \sin(2x+3y) \cdot 3$$

$$= x \cos xy - 3 \sin(2x+3y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y \cos xy - 2 \sin(2x+3y)}{x \cos xy - 3 \sin(2x+3y)}$$

f) $F(x, y) = 2x^{-1} + y^{-1} - 3$

$$F'_x = -2x^{-2}, \quad F'_y = -1y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-2x^{-2}}{-1y^{-2}} = -\frac{2y^2}{x^2}$$

ÖRNEK:

$x^2y = \cos(2x-y)$ kapalı fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ türevinin $(0, \frac{\pi}{2})$ noktasındaki değeri nedir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM:

$$F(x, y) = x^2y - \cos(2x-y)$$

$$F'_x = 2xy - [-\sin(2x-y)] \cdot (2x-y)'$$

$$= 2xy + \sin(2x-y) \cdot 2$$

$$= 2xy + 2\sin(2x-y)$$

$$F'_y = x^2 - [-\sin(2x-y)] \cdot (2x-y)'$$

$$= x^2 + \sin(2x-y) \cdot (-1)$$

$$= x^2 - \sin(2x-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xy+2\sin(2x-y)}{x^2-\sin(2x-y)} \text{ burada}$$

$$x=0, \quad y=\frac{\pi}{2} \text{ yazalım.}$$

$$y' = \frac{-2\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\sin(-\frac{\pi}{2})} = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$x^2+y^3+xy+2x-3y-4=0$ bağıntısı ile tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonunun $(1, -1)$ noktasındaki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Her terimin ayrı ayrı türevini alalım.

$$2x+3y^2y' + (1 \cdot y + xy') + 2 - 3y' - 0 = 0$$

$$\Rightarrow 3y^2y' + xy' - 3y' = -2x - y - 2$$

$$\Rightarrow y'(3y^2+x-3) = -2x-y-2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x-y-2}{3y^2+x-3} \quad \text{Burada } x=1, \quad y=-1$$

$$\text{yazalım. } y' = \frac{-2+1-2}{3+1-3} = \frac{-3}{1} = -3$$

bulunur.

ÖRNEK:

$\frac{1}{y} + \frac{5}{x^2+3} = 2$ bağıntısı ile tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Verilen bağıntıdan y yi çekelim.

$$\frac{1}{y} + \frac{5}{x^2+3} = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} = 2 - \frac{5}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{2x^2+6-5}{x^2+3} \Rightarrow y = \frac{x^2+3}{2x^2+1} \text{ olur. Şimdi}$$

türevini alalım.

$$y' = \frac{2x(2x^2+1) - 4x(x^2+3)}{(2x^2+1)^2} \text{ ve}$$

$$y'(1) = \frac{2 \cdot 3 - 4 \cdot 4}{3^2} = \frac{-10}{9} \text{ bulunur.}$$

PARAMETRİK OLARAK VERİLEN FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

$y = g(t)$, $x = h(t)$ denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonuna **parametrik fonksiyon** ve t ye de **parametre** denir.

$y = g(t)$ ve $x = h(t)$ denklemlerinden $y = f(x)$ elde edilerek f fonksiyonunun türevi hesaplanabilir.

Ancak $y = f(x)$ fonksiyonu kolaylıkla elde edilemiyorsa; g ve h fonksiyonları t ye göre türevlenebilen fonksiyonlar ve $h'(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

şeklinde hesaplanabilir.

ÖRNEK:

$$y = 8t + 3$$

$$x = 2t + 5$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 8t B) 4t C) 2t D) 4 E) 2

ÇÖZÜM:**1.YOL:**

$x = 2t + 5$ denkleminde t çekilip $y = 8t + 3$ denkleminde yerine yazılırsa, y nin x e bağlı değerini elde ederiz.

$$x = 2t + 5 \text{ ise } t = \frac{x-5}{2} \text{ dir.}$$

$$\text{ise } y = 8 \cdot \frac{x-5}{2} + 3$$

$$\text{ise } y = 4x - 17$$

$$\text{ise } \frac{d}{dx}\{y\} = \frac{d}{dx}\{4x - 17\}$$

$$\text{ise } \frac{dy}{dx} = 4 \text{ tür.}$$

2.YOL:

$$x = 2t + 5$$

$$\frac{d}{dt}\{x\} = \frac{d}{dt}\{2t + 5\}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \dots (\star)$$

$$y = 8 \cdot t + 3$$

$$\frac{d}{dt}\{y\} = \frac{d}{dt}\{8 \cdot t + 3\}$$

$$\frac{dy}{dt} = 8 \dots (\star\star)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$= 4 \text{ olur.}$$

Cevap D

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} y = t^3 + 2t + 3 \\ x = t^2 + 2 \end{array} \right\} \text{ biçiminde tanımlanan}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun $t = -1$ için türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t^3 + 2t + 3)'}{(t^2 + 2)'} = \frac{3t^2 + 2}{2t}$$

$$t = -1 \text{ için } y' = \frac{3+2}{-2} = -\frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{array} \right\} \text{ ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2 \cdot e^{2t}}{-e^{-t}} \\ &= -2 \cdot e^{2t} \cdot e^t = -2 \cdot e^{3t} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t+3 \\ y = t^3+t^2+1 \end{array} \right\} \text{ şeklinde tanımlanan}$$

$y = f(x)$ fonksiyonu için $f'(-1)$ nedir?

- A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 2

ÇÖZÜM:

$x = -1$ için $2t+3 = -1 \Rightarrow t = -2$ dir.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+2t}{2} \text{ türevinde } t = -2 \text{ koyalım.}$$

$$f'(-1) = \frac{12-4}{2} = 4 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap D seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$y = t^3 - 8t + 5$$

$$x = t^2 + 8t + 1$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $t = 2$ için değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

ÇÖZÜM:

Bundan önceki örnekte t yi kolayca yok etmiştik. Oysa, bu örnekte, bu kolay değildir. Bunun için, doğrudan kuralı uygulayacağız.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 8}{2t + 8} \text{ dir.}$$

Buna göre,

$$\frac{dy}{dx} \text{ in } t = 2 \text{ için değeri:}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = \frac{3 \cdot 2^2 - 8}{2 \cdot 2 + 8} = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Cevap C

ÖRNEK:

$$y = t^2 + t + 1$$

$$x = \ln t$$

denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$x = \ln t \Rightarrow x = \log_e t \Leftrightarrow t = e^x \text{ olur.}$$

$$y = t^2 + t + 1 = (e^x)^2 + e^x + 1 = e^{2x} + e^x + 1 \text{ bulunur. O halde,}$$

$$y' = e^{2x} \cdot (2x)' + e^x + 0 = 2e^{2x} + e^x \text{ tir.}$$

y' türevini ikinci bir yolla hesaplayalım

$$\frac{dy}{dx} = 2t + 1 \text{ ve } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t + 1}{\frac{1}{t}} = 2t^2 + t \\ &= 2e^{2x} + e^x \text{ tir.} \end{aligned}$$

$$y = e^t + \ln t$$

$$x = (t + 1)^3$$

denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 8$ noktasındaki türevi kaç eştir?

- A) $2e + 2$ B) $e + 1$ C) $\frac{e + 1}{12}$
D) $\frac{e + 1}{3}$ E) $\frac{e + 1}{6}$

ÇÖZÜM:

$$y = e^t + \ln t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t + \frac{1}{t}$$

$$x = (t + 1)^3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3(t + 1)^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + \frac{1}{t}}{3(t + 1)^2} \text{ olur.}$$

$x = (t + 1)^3$ eşitliğinde $x = 8$ için,
 $8 = (t + 1)^3 \Rightarrow t = 1$ bulunur.

O halde, y' türevinde t yerine 1 yazılırsa

$$y'(1) = \frac{e + 1}{12} \text{ dir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t \end{array} \right\} \text{ ise } t = \frac{\pi}{2}$$

noktasındaki $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t + \cos t \cdot t}{\cos t - \sin t \cdot t}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos \theta \\ y = \sin 3\theta \end{array} \right\} \text{ şeklinde tanımlanan } y = f(x)$$

fonksiyonunun $\theta = \frac{\pi}{4}$ için türevi nedir?

- A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(\sin 3\theta)'}{(\cos \theta)'} = \frac{3\cos 3\theta}{-\sin \theta}$$

burada $\theta = \frac{\pi}{4}$ konursa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos \frac{3\pi}{4}}{-\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (D) seçeneğidir.

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV (ARDIŞIK TÜREVLER)

$y = f(x)$ fonksiyonu bir aralıkta türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $f'(x)$ türevi de x e bağlı (veya sabit) bir fonksiyondur. Türev fonksiyonunun bir daha türevi alınırsa $f(x)$ fonksiyonunun **ikinci mertebeden türevi** elde edilir ve y'' , $f''(x)$ veya $\frac{d^2 y}{dx^2}$ sembollerinden birisiyle gösterilir.

$f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta türevleri de tanımlı ise

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{birinci türev}$$

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ikinci türev}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{üçüncü türev}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} \quad \text{dördüncü türev}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{n'inci türev}$$

ÖRNEK:

$$y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6 \text{ ve } y'' = 7 \cdot 6x^5 = 42x^5 \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x, y'' = -\sin x \text{ ve } y''' = -\cos x \text{ tir.}$$

ÖRNEK:

$y = x^4 - x^2 + 3x$ fonksiyonunun dördüncü türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y' = 4x^3 - 2x + 3$$

$$y'' = 12x^2 - 2$$

$$y''' = 24x$$

$y^{(4)} = 24$ bulunur ve fonksiyonun dördüncü türevinden sonraki bütün türevleri sıfırdır.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^{10}$$

olduğuna göre, $f^{(10)}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(10!) \cdot x$ B) $(9!) \cdot x^{10}$ C) $10 \cdot x^9$
D) $(10)^{10} \cdot x$ E) $10!$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x^{10}$$

$$f'(x) = 10 \cdot x^9$$

$$[f'(x)]' = (10 \cdot x^9)'$$

$$f''(x) = 10 \cdot 9 \cdot x^8$$

$$[f''(x)]' = (10 \cdot 9 \cdot x^8)'$$

$$f'''(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot x^7$$

$$f^{(3)}(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot x^7$$

$$f^{(4)}(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot x^6$$

...

$$f^{(9)}(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2x^1$$

$$f^{(10)}(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0$$

$$f^{(10)}(x) = 10!$$

Cevap E

ÖRNEK:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

olduğuna göre, $f^{(3)}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3x+2$ B) $6x+2$ C) $6x+1$
D) 6 E) 2

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 + 0$$

$$[f'(x)]' = (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 + 0)'$$

$$f''(x) = 6 \cdot x + 2 + 0$$

$$[f''(x)]' = (6 \cdot x + 2)'$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

Cevap D

ÖRNEK:

$$\frac{d^3}{dx^3} \{xe^x + x^2\}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $e^x \cdot (x+1)$ B) $e^x \cdot (x+2)$ C) $e^x \cdot (x+3)$
D) $e^x \cdot (2x+1)$ E) $e^x \cdot (3x+1)$

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} \{xe^x + x^2\} &= \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d}{dx} \{xe^x + x^2\} \right\} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \{1 \cdot e^x + xe^x + 2x\} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \{e^x + xe^x + 2x\} \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \{e^x + 1 \cdot e^x + xe^x + 2\} \\ &= e^x + e^x + 1 \cdot e^x + xe^x + 0 \\ &= e^x \cdot (x+3) \end{aligned}$$

Cevap C

ÖRNEK:

$\frac{d^2}{dx^2} (\cos^2 2x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $4\cos 4x$ B) $-4\cos 4x$ C) $8\cos 4x$
 D) $8\sin 2x$ E) $-8\cos 4x$

ÇÖZÜM:

$y = \cos^2 2x$ olsun.

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x (\cos 2x)' = 2\cos 2x (-2\sin 2x) \\ = -2\sin 4x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \cdot \cos 4x \cdot 4 = -8\cos 4x$$

Doğru cevap (E) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$f(x) = e^{5x}$ ise $f^{(n)}(1)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = 5e^{5x}$$

$$f''(x) = 5 \cdot 5e^{5x} = 5^2 e^{5x}$$

$$f'''(x) = 5^2 \cdot 5e^{5x} = 5^3 e^{5x} \text{ olur.}$$

Bu şekilde devam edilerek

$$f^{(n)}(x) = 5^n e^{5x} \text{ bulunur. Burada } x = 1 \text{ konursa}$$

$$f^{(n)}(1) = 5^n e^5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$y = e^x + x^2 + 3$ fonksiyonunun 25. türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y' = e^x + 2x \quad \text{fonksiyonun ikinci türevinden} \\ y'' = e^x + 2 \quad \text{sonraki bütün türevleri } e^x \text{ dir.} \\ y''' = e^x \quad y^{(25)} = e^x \text{ dir.} \\ y^{(4)} = e^x$$

.....

ÖRNEK:

$y = e^{ax}$ fonksiyonunun 90. türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y' = a \cdot e^{ax}$$

$$y'' = a^2 \cdot e^{ax}$$

$$y''' = a^3 \cdot e^{ax}$$

.....

$$y^{(n)} = a^n \cdot e^{ax} \text{ dir. Buna göre}$$

$$y^{(90)} = a^{(90)} \cdot e^{ax} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$\frac{d^2}{dx^2} (\ln(\tan x))$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $4\cot 2x$ B) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$
 C) $\tan x + \cot x$ D) $-4\tan 2x \cdot \sec 2x$
 E) $-4\cot 2x \cdot \operatorname{cosec} 2x$

ÇÖZÜM:

$$y = \ln \tan x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} + \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot x + \tan x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\cot x + \tan x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{-\cos 2x}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2}$$

$$= \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{4} \sin 2x} \cdot \frac{1}{\sin 2x}$$

$$= -4 \cot 2x \cdot \operatorname{cosec} 2x$$

Doğru cevap (E) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$y = \frac{1}{(1-x)}$ fonksiyonunun n'inci türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{2 \cdot 1}{(1-x)^3}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-3 \cdot (1-x)^2 \cdot (-1)}{(1-x)^6} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(1-x)^4}$$

..... Buna göre

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK:

$y = \ln x$ olduğuna göre, $\frac{d^{19}y}{dx^{19}}$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$y = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2 \cdot 1}{x^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{x^4}$$

.....

$$\frac{d^{19}y}{dx^{19}} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \dots 1}{x^{19}} = \frac{18!}{x^{19}} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{e^{3x} + e^{4x} + e^{5x}}{e^{2x} + e^x + 1}$$

fonksiyonu için $y^{(17)}$ türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $3^{16} e^{3x}$ B) $3^{17} e^{3x}$ C) $3^{18} e^{3x}$
D) 1 E) 0

ÇÖZÜM:

$$y = \frac{e^{3x} + e^{4x} + e^{5x}}{e^{2x} + e^x + 1} = \frac{e^{3x} (1 + e^x + e^{2x})}{e^{2x} + e^x + 1} = e^{3x}$$

$$y' = 3e^{3x}$$

$$y'' = 3 \cdot 3e^{3x} = 3^2 e^{3x}$$

$$y''' = 3 \cdot 3 \cdot 3 e^{3x} = 3^3 e^{3x}$$

.....

.....

$$y^{(17)} = 3^{17} e^{3x} \quad \text{tir.}$$

Cevap : B

ÖRNEK:

$$x^3 \cdot \frac{d^3(\ln x)}{dx^3}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) 2 C) x D) 2x E) 3x

ÇÖZÜM:

$y = \ln x$ olsun.

$$\frac{d^3(\ln x)}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' \quad \text{olur. O halde,}$$

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ve} \quad y''' = \frac{2}{x^3} \quad \text{olduğundan,}$$

$$x^3 \cdot \frac{d^3(\ln x)}{dx^3} = x^3 \cdot \frac{2}{x^3} = 2 \quad \text{dir.}$$

Cevap : B

ÖRNEK:

$y = x + e^x$ fonksiyonu için $\frac{d^2x}{dy^2}$ türevinin $x = 1$ noktasındaki değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{e}$ D) e E) $-\frac{e}{(1+e)^3}$

ÇÖZÜM:

$$y = x + e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + e^x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + e^x} \text{ olur.}$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right)$$

bölümün türevinden,

$$= \frac{0 \cdot (1 + e^x) - (1 + e^x)' \cdot 1}{(1 + e^x)^2}$$

$$= \frac{-e^x \cdot x'}{(1 + e^x)^2} \text{ olur.}$$

x' yerine $\frac{1}{1 + e^x}$ yazılırsa,

$$= \frac{-e^x}{(1 + e^x)^3} \text{ tür.}$$

O halde,

$$x = 1 \text{ için } \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{e}{(1 + e)^3} \text{ tür.}$$

Cevap : E

ÖRNEK:

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ olduğuna göre, $f^{(99)}(2)$ kaç eşittir?

- A) 99! B) $-99!$ C) $-2 \cdot 99!$
D) $2 \cdot 99!$ E) 100!

ÇÖZÜM:

$$y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot (x-1)^{-1}$$

$$y' = 2 \cdot (-1) \cdot (x-1)^{-2} = -2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$y'' = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (x-1)^{-3} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{(x-1)^3}$$

$$y''' = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (x-1)^{-4}$$

$$= -2 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$y^{(99)} = -2 \cdot \frac{99!}{(x-1)^{100}} \text{ ve}$$

$$f^{(99)}(2) = -2 \cdot \frac{99!}{(2-1)^{100}} = -2 \cdot 99! \text{ dir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$y = \sin x$ fonksiyonu için $y^{(1997)}$ türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sin x$ B) $-\cos x$ C) $\cos x$ D) $-\sin x$ E) 0

ÇÖZÜM:

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x \quad y^{(5)} = \cos x$$

$$y'' = -\sin x \quad y^{(6)} = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x \quad y^{(7)} = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x \quad y^{(8)} = \sin x$$

Yukarıdaki ardışık türev işleminin periyodik ve modülün de 4 olduğu görülür.

Buna göre $1997 \equiv 1 \pmod{4}$ olduğundan,

$$y^{(1997)} = y' = \cos x \text{ tir.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$y = \sin x + \cos x$ olduğuna göre, $y^{(99)}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\sin x + \cos x$ B) $\cos x - \sin x$
 C) $-\sin x - \cos x$ D) $\sin x - \cos x$
 E) $\sin 2x$

ÇÖZÜM:

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y'' = -\sin x - \cos x$$

$$y''' = -\cos x + \sin x$$

$$y^{(4)} = \sin x + \cos x$$

$$y^{(5)} = \cos x - \sin x$$

Yukarıdaki ardışık türev işleminin periyodik ve modülün de 4 olduğu görülür.

Buna göre $99 \equiv 3 \pmod{4}$ olduğundan,

$$y^{(99)} = y''' = -\cos x + \sin x \text{ tir.}$$

Cevap : D

ÖRNEK:

$-x^3 + y^2 + y + 1 = 0$ denkleminde $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $y = 0$ için y'' türevi kaç eşittir?

- A) 12 B) 6 C) 0 D) -6 E) -12

ÇÖZÜM:

$$-x^3 + y^2 + y + 1 = 0$$

eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$-3x^2 + 2y y' + y' + 0 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y + 1} \text{ olur.}$$

Bölümün türevinden,

$$y'' = \frac{6x \cdot (2y + 1) - 2y' \cdot 3x^2}{(2y + 1)^2} \text{ olur.}$$

$y = 0$ için $-x^3 + y^2 + 1 = 0$ eşitliğinden $x = 1$,

$x = 1$ ve $y = 0$ için $y' = \frac{3x^2}{2y + 1}$ türevinden $y' = 3$ bulunur.

O halde,

$x = 1$, $y = 0$ ve $y' = 3$ için $y'' = -12$ dir.

Cevap : E

ÖRNEK:

$x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ kapalı fonksiyonunun $(1,1)$ noktasındaki ikinci türevi nedir?

- A) -1 B) -3 C) -4 D) -6 E) -8

ÇÖZÜM:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 1$$

$$F'_x = 2x - y, \quad F'_y = 2y - x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x-y}{2y-x} = \frac{y-2x}{2y-x}$$

$$y'' = \frac{(y-2x)'(2y-x) - (2y-x)'(y-2x)}{(2y-x)^2}$$

$$= \frac{(y'-2)(2y-x) - (2y'-1)(y-2x)}{(2y-x)^2}$$

Diğer taraftan $x = 1$, $y = 1$ için $y' = \frac{1-2}{2-1} = -1$ dir.

İkinci türevde $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$ koyalım.

$$y'' = \frac{-3-3}{1} = -6 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (D) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$x = t^3$$

$$y = t^2 + t + 1$$

denklemleriyle $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $\frac{d^2y}{dx^2}$

türevinin $t = 1$ noktasındaki değeri kaçtır?

- A) $-\frac{9}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $-\frac{4}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) 0

ÇÖZÜM:

$$x = t^3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3t^2,$$

$$y = t^2 + t + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t + 1 \text{ dir.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t + 1}{3t^2} \text{ ve}$$

Bölümün türevinden,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{2 \cdot 3t^2 - 6t \cdot (2t + 1)}{(3t^2)^2} = -\frac{2t + 2}{3t^3} \text{ olu}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2t + 2}{3t^3}}{3t^2} = -\frac{2t + 2}{9t^5}$$

olarak bulunur.

$$t = 1 \text{ için } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{9} \text{ olur.}$$

Cevap : C

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} y = t^2 + t + 2 \\ x = t^3 + 1 \end{array} \right\} \text{ şeklinde tanımlanan}$$

$y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevinin $t = 1$ için değeri kaçtır?

- A) 1 B) 4 C) $\frac{5}{3}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $-\frac{4}{9}$

ÇÖZÜM:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t^2 + t + 2)'}{(t^3 + 1)'} = \frac{2t + 1}{3t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{2t + 1}{3t^2} \right)'}{3t^2}$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot 3t^2 - 6t(2t + 1)}{(3t^2)^2}}{3t^2} = \frac{6t^2 - 12t^2 - 6t}{(3t^2)^3}$$

$$= \frac{-6t^2 - 6t}{(3t^2)^3} \text{ olur.}$$

$$\text{Burada } t = 1 \text{ konursa } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6 - 6}{27} = -\frac{4}{9}$$

Doğru cevap (E) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$x = \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

denklemleriyle $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

$\frac{d^2x}{dy^2}$ türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{\cos^3 \theta}$ B) $\cos^3 \theta$ C) $-\cos^3 \theta$
D) $\sin^3 \theta$ E) $\frac{1}{\sin^3 \theta}$

ÇÖZÜM:

$$x = \cos \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta,$$

$$y = \sin \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta \text{ ve}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dx}{dy} \right) = -\frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dx}{dy} \right)}{\frac{dy}{d\theta}} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\cos \theta} = -\frac{1}{\cos^3 \theta} \text{ dir.}$$

Cevap : A

ÖRNEK:

$$f(x) = (x+1)^2 (2x+a)$$

$f''(1) = 2$ olduğuna göre a kaçtır?

- A) -9 B) -6 C) -2 D) 5 E) 7

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(2x+a) + 2(x+1)^2 \\ &= 2(x+1)(2x+a+1) \\ &= 2(x+1)(3x+a+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2[1 \cdot (3x+a+1) + 3(x+1)] \\ &= 2(6x+a+4) \end{aligned}$$

$$f''(1) = 2(6+a+4) = 2a+20$$

$$\Rightarrow 2a+20 = 2 \Rightarrow a = -9 \text{ olur.}$$

Doğru cevap (A) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$\left. \begin{array}{l} y = \tan t \\ x = 2 + \sin t \end{array} \right\} \text{ ise } t = \frac{\pi}{4} \text{ için } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ türevinin}$$

değeri kaçtır?

- A) $4\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{16}$ D) 8 E) 12

ÇÖZÜM:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+\tan^2 t}{\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)'} = \frac{\left(\frac{1+\tan^2 t}{\cos t}\right)'}{(2+\sin t)'}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{2\tan t(1+\tan^2 t)\cos t - (-\sin t)(1+\tan^2 t)}{\cos^2 t}}{\cos t} \\ &= \frac{2\tan t \cos t (1+\tan^2 t) + \sin t (1+\tan^2 t)}{\cos^3 t} \end{aligned}$$

olur. Burada $t = \frac{\pi}{4}$ konursa

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} (1+1)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 12$$

Doğru cevap (E) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$2 \frac{d}{dx} (x^2 e^x) - \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^x) - x^2 e^x$$

ifadesini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$y = x^2 e^x \text{ olsun.}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^x + x^2 e^x = (2x+x^2) e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2x+x^2)' e^x + (e^x)' \cdot (2x+x^2)$$

$$= (2+2x)e^x + e^x (2x+x^2)$$

$$= e^x (x^2+4x+2)$$

Bu türevler verilen ifadede yerine konursa,

$$2 \frac{d}{dx} (x^2 e^x) - \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^x) - x^2 e^x$$

$$= 2(2x+x^2) e^x - [e^x (x^2+4x+2)] - x^2 e^x$$

$$= 4xe^x + 2x^2 e^x - x^2 e^x - 4xe^x - 2e^x - x^2 e^x$$

$$= -2e^x \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{1}{3x+1} \text{ ise } f^{(40)}(0) \text{ türevini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \frac{1}{3x+1} = (3x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(3x+1)^{-2} \cdot 3$$

$$f''(x) = 1.2(3x+1)^{-3} \cdot 3 \cdot 3 = 2! (3x+1)^{-3} \cdot 3^2$$

$$f'''(x) = -1.2.3(3x+1)^{-4} \cdot 3^3 = -3! (3x+1)^{-4} \cdot 3^3$$

$$f^{(4)}(x) = 1.2.3.4(3x+1)^{-5} \cdot 3^4 = 4! (3x+1)^{-5} \cdot 3^4$$

Bu şekilde devam edilerek

$$f^{(40)}(x) = (-1)^{40} 40! (3x+1)^{-41} \cdot 3^{40}$$

$$= 40! 3^{40} (3x+1)^{-41}$$

$$x = 0 \text{ konursa } f^{(40)}(0) = 40! \cdot 3^{40} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$y = \frac{1}{x^2-2x}$ ise $y^{(5)}(1)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{1}{x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$1 = A(x-2) + Bx$$

$$x=0 \text{ için } A = -\frac{1}{2} \text{ ve } x=2 \text{ için } B = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{x^2-2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}$$

$$y = -\frac{1}{2} x^{-1} + \frac{1}{2} (x-2)^{-1}$$

$$y' = \frac{1}{2} x^{-2} - \frac{1}{2} (x-2)^{-2}$$

$$y'' = -x^{-3} + (x-2)^{-3}$$

$$y''' = 3x^{-4} - 3(x-2)^{-4}$$

$$y^{(4)} = -12x^{-5} + 12(x-2)^{-5}$$

$$y^{(5)} = 60x^{-6} - 60(x-2)^{-6}$$

$$y^{(5)}(1) = 60 - 60 = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$y = \frac{1}{2x+1}$ ise $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{(-1)^n 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$ B) $\frac{(-1)^n n! \cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$

C) $\frac{(-1)^n \cdot 2}{(2x+1)^{n+1}}$ D) $\frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x+1)^n}$

E) $\frac{n! \cdot 2^n}{(2x+1)^n}$

ÇÖZÜM:

$$y = \frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1}$$

$$y' = -1(2x+1)^{-2} \cdot 2$$

$$y'' = 1 \cdot 2 (2x+1)^{-3} \cdot 2^2 = 2! (2x+1)^{-3} \cdot 2^2$$

$$y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 (2x+1)^{-4} \cdot 2^3 = -3! (2x+1)^{-3} \cdot 2^3$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (2x+1)^{-(n+1)} \cdot 2^n$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap (B) seçeneğidir.

UYARI:

$F(x) = g(x) \cdot h(x)$ şeklinde iki fonksiyonun çarpımının türevi sorulduğunda aşağıda belirtilen "leibnitz kuralı" uygulanır.

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)} \cdot h^{(k)} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$y = x^2 \cdot \sin x$ in 25. türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = x^2$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$g'(x) = 2x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$g''(x) = 2$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$g'''(x) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$y^{(25)} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} f^{(25-k)} \cdot g^{(k)}$$

$$= \binom{25}{0} f^{(25)} \cdot g + \binom{25}{1} f^{(24)} \cdot g' + \binom{25}{2} f^{(23)} \cdot g''$$

$$+ \binom{25}{3} f^{(22)} \cdot g''' + \dots$$

sıfırdır.

$$= 1 \cdot f^{(25)} \cdot g + 25 \cdot f^{(24)} \cdot g' + 300 \cdot f^{(23)} \cdot g''$$

$$= \cos x \cdot x^2 + 25 \cdot \sin x \cdot 2x + 300 \cdot (-\cos x) \cdot 2$$

bulunur.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu;

$$f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

biçiminde bir **polinom fonksiyon** olsun. $x = a$ sayısı $f(x)$ fonksiyonunun n katlı bir kökü (sıfır noktası) ise,

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ dir.}$$

Eğer, $x = a$ sayısı $f(x) = 0$ denkleminin n katlı bir kökü ise,

$$f(x) = (x - a)^n \cdot g(x)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $f(a) = 0$ olduğu da göz önüne alınmalıdır.

ÖRNEK:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 2) \cdot (x - 2)^3$$

polinom fonksiyonunun yukarıdaki teoremi gerçekleştiğini gösterelim.

ÇÖZÜM:

$x = 2$ sayısı, $f(x)$ fonksiyonunun 3 katlı bir kökü (sıfır noktası) olduğundan,

$$f(2) = f'(2) = f''(2) = 0 \text{ olacaktır. O halde,}$$

$$f(x) = (x^2 + 2) \cdot (x - 2)^3 \Rightarrow f(2) = 0,$$

$$f'(x) = 2x \cdot (x - 2)^3 + 3(x - 2)^2 \cdot (x^2 + 2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x - 2)^2 (2x^2 - 4x + 3x^2 + 6)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x - 2)^2 (5x^2 - 4x + 6) \Rightarrow f'(2) = 0 \text{ ve}$$

$$f''(x) = 2(x - 2)(5x^2 - 4x + 6) + (10x - 4)(x - 2)^2$$

$$\Rightarrow f''(2) = 0 \text{ dir.}$$

Yani, $f(x)$ in 3 katlı bir kökü $x = 2$, $f(x)$ in ilk iki türevinin de köküdür.

SONUÇ:

$P(x)$ polinomu, $(x - a)^n$ ile tam bölünebiliyorsa $P(x)$ in $(n - 1)$ in mertebeye kadar olan bütün türevleri de $(x - a)$ ile tam bölünür. Dolayısıyla,

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0 \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$$P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 3$$

polinomunun $(x - 1)^2$ ile tam bölünebilmesi için, a ve b nin alabileceği değerleri bulalım.

ÇÖZÜM:

$P(x)$ polinomu $(x - 1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, $P(1) = 0$ ve $P'(1) = 0$ olmalıdır. O halde,

$$P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax + b$$

$$P'(1) = 4 - 3 + 2a + b = 0$$

$$P(1) = 1 - 1 + a + b + 3 = 0$$

$$a = 2 \text{ ve } b = -5 \text{ olur.}$$

TÜREVİN LİMİT TANIMI

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir fonksiyon

$x, x_0 \in [a,b]$ olsun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$$

limitinin değerine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve bu türev,

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}$$

sembolleriyle gösterilir. $f(x) = y$ alındığında bu türev

$$f'(x) = y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}$$

sembolleriyle gösterilir.

Yukarıdaki ifadede $x = x_0 + h$ alındığında

$$x = x_0 + h \Rightarrow x - x_0 = h \text{ olur.}$$

$x \rightarrow x_0$ iken $h \rightarrow 0$ olur. Buna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{ dir.}$$

$f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir x değeri için türevi ise

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

şeklinde gösterilmektedir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^{100}} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ limitinin değeri kaçtır?}$$

- A) 5050 B) 5000 C) - 4500
D) - 5000 E) - 5050

ÇÖZÜM:

Bir noktadaki türev tanımından,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \text{ dir. O halde,}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^{100}}$$

$$= x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots + x^{-100} \text{ ve}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} - \dots - 100x^{-101}$$

$$f'(1) = -1 - 2 - 3 - \dots - 100 = -\frac{100 \cdot 101}{2}$$

$$= -5050 \text{ dir.}$$

Cevap : E

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x^e + x^\pi}{x} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

limitinin değeri kaç eşittir?

- A) $e + \pi - 2$ B) $e + \pi - 1$ C) $e + \pi$
D) $e + \pi + 1$ E) $e + \pi + 2$

ÇÖZÜM:

Bir noktadaki türev tanımından,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{ dir. O halde,}$$

$$f(x) = \frac{x^e + x^\pi}{x} = \frac{x^e}{x} + \frac{x^\pi}{x} = x^{e-1} + x^{\pi-1} \text{ ve}$$

$$f'(x) = (e-1)x^{e-2} + (\pi-1)x^{\pi-2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = e - 1 + \pi - 1 = e + \pi - 2 \text{ dir.}$$

Cevap : A

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2x + 1 \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \text{ limitinin değeri nedir?}$$

- A) -2 B) $-\frac{3}{2}$ C) -1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM:

$$\text{Türev tanımına göre } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \text{ dir.}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} - 2$$

$$\text{ve } f'(1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

Doğru cevap (B) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4$$

$$\text{olduğuna göre, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} \text{ kaçtır?}$$

- A) 10 B) 6 C) -4 D) -8 E) -10

ÇÖZÜM:

Türev tanımına göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = f'(-1) \dots (\star)$$

Buna göre,

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2$$

$$f'(-1) = -10 \text{ olur.}$$

Cevap E

ÖRNEK:

$$f(x) = e^{10x} + x^{10} + 10$$

$$\text{olduğuna göre, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ kaçtır?}$$

- A) 0 B) 1 C) 10 D) 20 E) 30

ÇÖZÜM:

Türev tanımına göre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \dots (\star)$$

olur. Buna göre,

$$f(x) = e^{10x} + x^{10} + 10$$

$$f'(x) = 10e^{10x} + 10x^9 + 0$$

$$f'(0) = 10 \cdot e^{10 \cdot 0} + 10 \cdot 0^9$$

$$f'(0) = 10 \cdot e^0 + 10 \cdot 0$$

$$f'(0) = 10 \cdot 1 + 0$$

$$f'(0) = 10 \text{ olur.}$$

Cevap C

**TÜREVİN SÜREKLİLİK İLE İLİŞKİSİ
VE SAĞDAN SOLDAN TÜREV**

Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir a noktasında türevli olması için:

1)

f fonksiyonu a noktasında sürekli olmalı,

2)

f fonksiyonunun a noktasındaki sağdan türevi soldan türevine eşit olmalıdır.

Buna göre f fonksiyonu a noktasında türevli ise bu noktada süreklidir.

Bir fonksiyonun kritik noktalarında türevi araştırılırken; bu noktalarda süreklilik incelenir. Fonksiyon süreksiz ise türevsizdir. Sürekli ise sağdan ve soldan türeve bakılır.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ x^2 + x + 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyelim.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2, f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \text{ ve}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ olduğundan } f(x) \text{ fonksiyonu } x = 1 \text{ noktasında süreksizdir.}$$

Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x < -1 \text{ ise} \\ x^3 + 2x + 1, & x \geq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

$f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki türevini varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyelim.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 2x + 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (-x^2 + x) = -2,$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) + 1 = -2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \text{ olduğundan}$$

$f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında sürekli dir.

Şimdi de $f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki sağdan ve soldan türevini hesaplayalım.

$x \geq -1$ için $f(x) = x^3 + 2x + 1$ olduğundan,

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \text{ ve } f'(-1^+) = 5 \text{ tir.}$$

$x < -1$ için $f(x) = -x^2 + x$ olduğundan,

$$f'(x) = -2x + 1 \text{ ve } f'(-1^-) = 3 \text{ tür.}$$

O halde $f'(-1^+) \neq f'(-1^-)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \text{ ise} \\ x^3 + 2, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun varsa $x = 1$ deki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x = 1$ de önce süreklilik incelenmelidir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \text{ olduğundan}$$

f fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir ve $f'(1)$ yoktur.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{x} + 5x, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyelim.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} + 5x \right) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + 1) = 3 \text{ ve } f(1) = 3 \text{ tür.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{ olduğundan } f(x) \text{ fonksiyonu } x = 1 \text{ noktasında süreksizdir.}$$

Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında türevsizdir. Ancak sağdan ve soldan türeve bakıldığında,

$$x > 1 \text{ için } f(x) = \frac{1}{x} + 5x \text{ olduğundan,}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 5 \text{ ve } f'(1^+) = 4$$

$$x \leq 1 \text{ için } f(x) = 2x^2 + 1 \text{ olduğundan,}$$

$$f'(x) = 4x \text{ ve } f'(1^-) = 4 \text{ ve}$$

$f'(1^+) = f'(1^-)$ olduğu görülür. Fakat $f(x)$ fonksiyonu, $x = 1$ noktasında süreksiz olduğundan bu noktada türevsizdir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \frac{1}{x}, & x \leq \frac{3}{2} \text{ ise} \\ \sin x, & x > \frac{3}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = \pi$ noktasındaki türevini hesaplayalım.

$x = \pi$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası değildir. $\pi > \frac{3}{2}$ olduğundan,

$$f(x) = \sin x \text{ ve } f'(x) = \cos x \\ \Rightarrow f'(\pi) = \cos \pi = -1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini, varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir. Sağdan ve soldan türeve bakalım.

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty$$

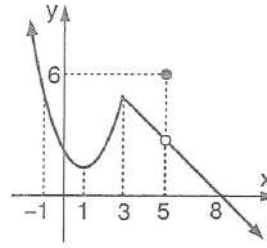
olduğundan sağdan türevsizdir. O halde $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 8, & x \geq 3 \text{ ve } x \neq 5 \\ 6, & x = 5 \\ (x - 1)^2 + 1, & x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonunun x in $-1, 1, 3, 5$ ve 8 değerlerinin kaçında türevi vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM:

Verilen fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -4$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

Verilen grafikte de görülmekte olduğu üzere, $f(x)$ fonksiyonu, $x = 3$ ün sağında $y = -x + 8$; solunda $y = (x - 1)^2 + 1$ fonksiyonuyla tanımlanmıştır. Buna göre,

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 4 \text{ olur.}$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -1$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+)$ olduğu için $f'(3)$ yoktur.

Fonksiyonun $x = 3$ te sürekli olduğu hâlde türevinin olmadığına dikkat ediniz.

f fonksiyonu $x = 5$ de sürekli değildir. Bunun için bu noktada türevli de değildir. $f'(5)$ yoktur.

Buna göre, verilen noktalardan üçünde ($-1, 1$ ve 8 de) fonksiyonun türevi vardır.

Cevap C

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & x < -1 \text{ ise} \\ b, & x = -1 \text{ ise} \\ cx + 2, & x > -1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = -1$ noktasında türevli olması için $a + b + c$ toplamı kaç olmalıdır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasında türevli olması için $f(x)$ fonksiyonu bu noktada sürekli ve sağdan türevi soldan türevine eşit olmalıdır.

Önce süreklilik şartını yazalım.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 + 1) = a + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (cx + 2) = -c + 2 \text{ ve } f(-1) = b \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\Rightarrow a + 1 = -c + 2 = b \text{ olmalıdır.}$$

Şimdi de sağdan ve soldan türeve bakalım.

$$x < -1 \text{ için } f(x) = ax^2 + 1 \text{ olup } f'(x) = 2ax \text{ ve}$$

$$f'(-1^-) = -2a,$$

$$x > -1 \text{ için } f(x) = cx + 2 \text{ olup } f'(x) = c \text{ ve}$$

$$f'(-1^+) = c \text{ dir.}$$

$$f'(-1^-) = f'(-1^+) \Rightarrow -2a = c \text{ olmalıdır.}$$

Elde edilen denklemler ortak çözümlürse,

$$\begin{cases} a + 1 = -c + 2 = b \\ -2a = c \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 0 \text{ ve } c = 2$$

bulunur. O halde $a + b + c = 1$ dir.

Cevap : B

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2 - 16), & x < 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{x-2}, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM:

$x < 1$ için $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 16)$ dir. $x = -4$ için $x^2 - 16 = 0$ olduğundan bu noktada $f(x)$ fonksiyonu türevsizdir.

$$x > 1 \text{ için } f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ dir. } x = 2 \text{ noktasında } f(x)$$

fonksiyonu tanımsız ve dolayısıyla süreksiz olduğundan türevsizdir.

$x = 1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu sürekli. Şimdi de sağdan ve soldan türeve bakalım.

$$x < 1 \text{ için } f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 16) \text{ olup } f'(1^-) = 0,$$

$$x > 1 \text{ için } f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ olup}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \text{ ve } f'(1^+) = -1 \text{ dir.}$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan $x = 1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu türevsizdir.

O halde $f(x)$ fonksiyonu $-4, 1$ ve 2 noktalarında türevsizdir.

Cevap : C

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN TÜREVİ

$g: A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = |g(x)|$ verilsin. $a \in A, g(a) \neq 0$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi:

$$y' = f'(x) = \begin{cases} -g'(x), & g(a) < 0 \text{ ise} \\ g'(x), & g(a) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$g(a) = 0$ için, $f(x)$ in $x = a$ daki sağdan türevi, soldan türevine eşit ise fonksiyonun $x = a$ da türevi vardır, aksi taktirde bu noktada türev yoktur.

ÖRNEK:

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ ve}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ da sürekli olduğundan sağ ve sol türevlere bakalım.

$$f'(0^+) = 1, f'(0^-) = -1 \text{ ve } f'(0) \text{ yoktur.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = |x + 2|$$

fonksiyonunun türevinin kuralını bulalım.

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonunun $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ deki türevini öncelikle araştıralım.

$x = -2$ de $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, bu noktadaki sağdan ve soldan türevlerinin değerine bakalım.

$$f(x) = |x + 2| = \begin{cases} -x - 2, & x \leq -2 \\ x + 2, & x > -2 \end{cases}$$

$$x \leq -2 \text{ için } f'(x) = (-x - 2)' \Rightarrow f'(x) = -1 \\ \Rightarrow f'(-2^-) = -1$$

$$x > -2 \text{ için } f'(x) = (x + 2)' \Rightarrow f'(x) = 1 \\ \Rightarrow f'(-2^+) = 1 \text{ ve}$$

$f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$ olduğundan $x = -2$ de türev yoktur.

Buna göre, $f(x) = |x + 2|$ fonksiyonunun türevi:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \text{ ise} \\ \text{Yoktur}, & x = -2 \text{ ise} \\ 1, & x > -2 \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK:

$f(x) = |2x - 6|$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

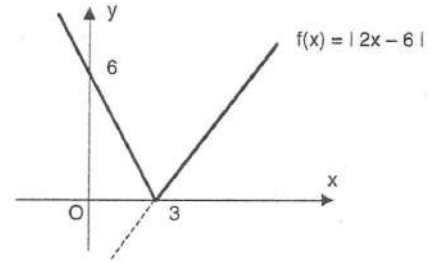
ÇÖZÜM:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x > 3 \text{ ise} \\ 0, & x = 3 \text{ ise} \\ -2x + 6, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

$x > 3$ için $f(x) = 2x - 6$ olup $f'(x) = 2$,

$x < 3$ için $f(x) = -2x + 6$ olup $f'(x) = -2$ dir.

$x = 3$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu sürekli dir. Fakat sağdan türev $f'(3^+) = 2$ ile soldan türev $f'(3^-) = -2$ birbirinden farklı olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bu noktada türevsizdir.



Burada $x = 3$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin kırılma noktasıdır. Bu noktada $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğu halde türevsizdir.

Bir fonksiyonun grafiğinin kırılma noktalarında bu fonksiyon türevsizdir.

ÖRNEK:

$f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < -2 \text{ veya } x > 2 \text{ ise} \\ 0, & x = \pm 2 \text{ ise} \\ -x^2 + 4, & -2 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

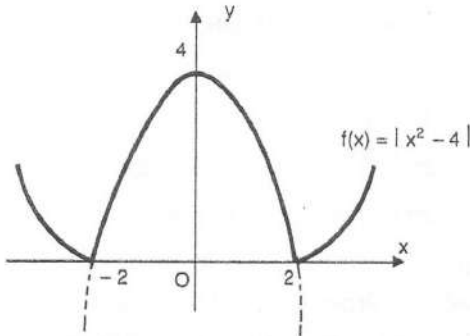
$x < -2$ veya $x > 2$ için $f(x) = x^2 - 4$ olup $f'(x) = 2x$,
 $-2 < x < 2$ için $f(x) = -x^2 + 4$ olup $f'(x) = -2x$ tir.

$x = -2$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreklidir.

Fakat sağdan türev $f'(-2^+) = 4$ ile soldan türev $f'(-2^-) = -4$ birbirinden farklı olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bu noktada türevsizdir.

$x = 2$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreklidir.

Fakat sağdan türev $f'(2^+) = 4$ ile soldan türev $f'(2^-) = -4$ birbirinden farklı olduğundan bu noktada da $f(x)$ fonksiyonu türevsizdir.



Burada $x = \pm 2$ noktaları $f(x)$ fonksiyonunun kırılma noktalarıdır. Bu noktalarda $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğu halde türevsizdir.

ÖRNEK:

$f(x) = |(x - 1)^3|$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

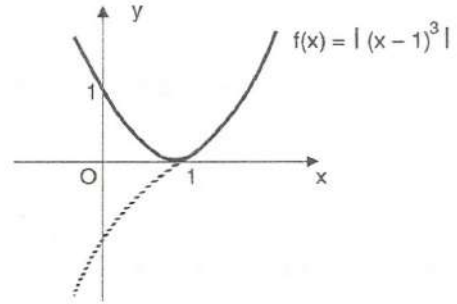
ÇÖZÜM:

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x > 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ -(x - 1)^3, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$x > 1$ için $f(x) = (x - 1)^3$ olup $f'(x) = 3(x - 1)^2$,

$x < 1$ için $f(x) = -(x - 1)^3$ olup $f'(x) = -3(x - 1)^2$ dir.

$x = 1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca sağdan türev $f'(1^+) = 0$ ile soldan türev $f'(1^-) = 0$ birbirine eşit olduğundan bu noktada $f(x)$ fonksiyonu türevlidir.



Burada $x = 1$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin kırılma noktası değildir. Bu noktada $f(x)$ fonksiyonu sürekli ve türevlidir.

KURAL:

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$f(x) = |(x - a)^n| \Rightarrow f'(a) = \begin{cases} \text{Yoktur,} & n = 1 \text{ ise} \\ 0, & n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK:

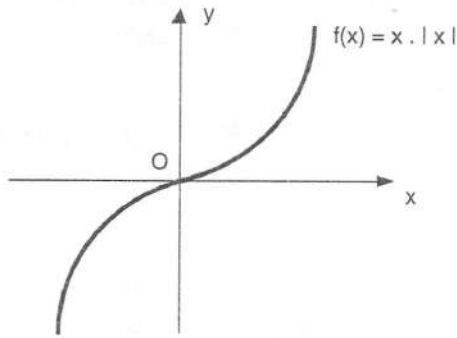
$f(x) = x \cdot |x|$ fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki türevini inceleyelim.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x^2, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$x > 0$ için $f(x) = x^2$ olup $f'(x) = 2x$,

$x < 0$ için $f(x) = -x^2$ olup $f'(x) = -2x$ tir.

$x = 0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca sağdan türev $f'(0^+) = 0$ ile soldan türev $f'(0^-) = 0$ biribine eşit olduğundan bu noktada $f(x)$ fonksiyonu türevidir.



Burada $x = 0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin kırılma noktası değildir. Bu noktada $f(x)$ fonksiyonu sürekli ve türevidir.

Mutlakdeğer fonksiyonu türevi alınacak noktada önce tanımlanır, sonra türev alınır, daha sonra verilen nokta türevde yerine konulur.

ÖRNEK:

$f(x) = |x-5|$ fonksiyonunun $x = 8$, $x = 5$, $x = -4$ için türevlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Önce fonksiyonu parçalı biçimde yazalım.

$$f(x) = |x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5 \text{ ise} \\ -x+5, & x < 5 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 5 \text{ ise} \\ -1, & x < 5 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Buna göre $f'(8) = 1$, $f'(-4) = -1$ olur. $x = 5$ için f

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3-8|$ ise $f'(2)$ nedir?

A) -12 B) -6 C) 6 D) 12 E) yoktur.

ÇÖZÜM:

$x = 2$ de f süreklidir. $x = 2$ değeri mutlak değer için sıfır yapmaktadır. Bu yüzden $x = 2$ noktası f nin kritik noktasıdır. Kritik noktalarda soldan ve sağdan türevlere bakılır. Önce $f(x)$ fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım.

$$f(x) = |x^3-8| = \begin{cases} x^3-8, & x \geq 2 \text{ ise} \\ -x^3+8, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 2 \text{ ise} \\ -3x^2, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$f'(2^+) = 3 \cdot 4 = 12$, $f'(2^-) = -3 \cdot 4 = -12$ ve

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan $f'(2)$ yoktur.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3+x^2-2|$ ise $f'(-2)$ nedir?

A) -8 B) -6 C) -2 D) 3 E) yoktur.

ÇÖZÜM:

Mutlak değer için $x = -2$ yazalım.

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 2 = -8 + 4 - 2 = -6 < 0$$

Yani $x = -2$ nin komşuluğunda mutlak değer için negatiftir. Buna göre $x = -2$ nin komşuluğunda

$$f(x) = |x^3+x^2-2| = -x^3-x^2+2$$

$$f'(x) = -3x^2-2x \text{ ve } f'(-2) = -12+4 = -8$$

bulunur.

Doğru cevap A seçeneğidir.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 |x^2 - 3|$ ise $f'(2)$ nedir?

- A) -44 B) -36 C) 36 D) 44 E) yoktur.

ÇÖZÜM:

Mutlak değer içinde $x = 2$ yazalım. $2^2 - 3 = 1 > 0$ yani $x = 2$ nin komşuluğunda mutlak değer içi pozitiftir. Buna göre $x = 2$ nin komşuluğunda

$$f(x) = x^3 |x^2 - 3| = x^3 (x^2 - 3) = x^5 - 3x^3 \text{ dir.}$$

Buradan $f'(x) = 5x^4 - 9x^2$ ve

$$f'(2) = 5 \cdot 16 - 9 \cdot 4 = 80 - 36 = 44 \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap D seçeneğidir.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |5 - x| + 2$ olduğuna göre, $f(2) + f'(7)$ nin değeri nedir?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

ÇÖZÜM:

$x > 5$ için $5 - x < 0 \Rightarrow |5 - x| = -5 + x$ ve

$f(x) = -5 + x + 2 = x - 3$ dir. Buradan $f'(x) = 1$ ve

$f'(7) = 1$ bulunur. Diğer taraftan $f(2) = |5 - 2| + 2 = 5$ ve $f(2) + f'(7) = 5 + 1 = 6$ olur.

Doğru cevap (C) seçeneğidir.

ÖRNEK:

$f(x) = |x|$ ve $g(x) = x^2 |x|$ fonksiyonlarının $x = 0$ için türevlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$g(x) = x^2 |x| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases} \text{ ve}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

g fonksiyonu $x = 0$ da sürekli olduğundan sağ ve sol türevlere bakılır. $g'(0^+) = 3 \cdot 0 = 0$, $g'(0^-) = 0$ ve $g'(0) = 0$ bulunur.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3 - 5x^2|$ olduğuna göre $f'(0)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$x = 0$ için mutlak değer içi sıfır oluyor. Fonksiyonu parçalı biçimde yazalım.

x	0	5
$x^3 - 5x^2$	-	+
$f(x)$	$-x^3 + 5x^2$	$x^3 - 5x^2$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 5x^2, & x < 5 \text{ ise} \\ x^3 - 5x^2, & x \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 10x, & x < 5 \text{ ise} \\ 3x^2 - 10x, & x > 5 \text{ ise} \end{cases}$$

Buradan $f'(0) = 0$ bulunur.

ÖRNEK:

$f(x) = \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$ fonksiyonunun $x < -1$ için türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$x < -1$ için $\frac{x}{x^2 - 1} < 0$ olduğundan,

$$f(x) = \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right| = -\frac{x}{x^2 - 1} \text{ olur.}$$

$$f'(x) = -\frac{1 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = |\sin 2x|$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

İsa GEDİK**TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI**

$x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ için ($x = \frac{\pi}{4}$ noktası civarında)

$\sin 2x \rightarrow 1$ olup $\sin 2x > 0$ olduğundan,

$f(x) = |\sin 2x| = \sin 2x$ olur.

$f'(x) = 2 \cos 2x$

$f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \cos (2 \cdot \frac{\pi}{4}) = 0$ olur.

ÖRNEK:

$f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|$ olduğuna göre, $f'(-2)$ türevini hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$x \rightarrow -2$ için ($x = -2$ noktası civarında)

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \rightarrow -60$ olup $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$ olduğundan,

$f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6| = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ olur.

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 11$

$f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) - 11 = -47$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = |x^3 + 2x^2 - x - 2|$ olduğuna göre, $f'(-1)$ türevini varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$x \rightarrow -1$ için ($x = -1$ noktası civarında)

$x^3 + 2x^2 - x - 2 \rightarrow 0$ olup, $x = 0$ noktası kritik nokta olduğundan, sağdan ve soldan türeve bakalım.

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x^3 + 2x^2 - x - 2$	-	0	+	0	+

Yukarıdaki tablodan,

$-1 < x < 1$ için $x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$ olduğundan,

$f(x) = |x^3 + 2x^2 - x - 2| = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ olur.

$f'(x) = -3x^2 - 4x + 1$

$f'(-1^+) = -3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 2$ dir.

$-2 < x < -1$ için $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$ olduğundan,

$f(x) = |x^3 + 2x^2 - x - 2| = x^3 + 2x^2 - x - 2$ olur.

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$f'(-1^-) = 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 1 = -2$ dir.

$f'(-1^+) \neq f'(-1^-)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4x^2 + 12x + 9| + |x^2 + 4| + x + 1$

fonksiyonunun türevini ve $f'(-\frac{3}{2})$ türevini, varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$f(x) = |(2x + 3)^2| + |x^2 + 4| + x + 1$

$(2x + 3)^2 \geq 0$ ve $x^2 + 4 > 0$ olduğundan,

$f(x) = (2x + 3)^2 + x^2 + 4 + x + 1 = 5x^2 + 13x + 14$

$f'(x) = 10x + 13$ tür. Buradan,

$f'(-\frac{3}{2}) = 10 \cdot (-\frac{3}{2}) + 13 = -2$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = |x - x^2|$ fonksiyonunun $x=2$ ve $x=3$ noktalarında türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$f(2) \neq 0$ ve $f(3) \neq 0$ olduğundan

İsa GEDİK

TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI

$x = 2$ için $f(x) = -(x - x^2) = -x + x^2$

$$f'(x) = -1 + 2x$$

$$f'(2) = -1 + 2 \cdot 2 = 3 \text{ bulunur.}$$

$x = 3$ için $f(x) = -(x - x^2) = -x + x^2$

$$f'(x) = -1 + 2x$$

$$f'(3) = -1 + 2 \cdot 3 = 5 \text{ bulunur.}$$

Bu fonksiyonun $x=1$ noktasında türevi sorulsaydı $f(1)=0$ olduğundan sağdan ve soldan türevlere bakılırdı

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ ve $f(x) = |\cos x|$ fonksiyonunun

$x = \frac{\pi}{3}$ ve $x = \pi$ noktalarındaki türevlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

* $x = \frac{\pi}{3}$ için $\cos x > 0$ olduğundan

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

* $x = \pi$ için $\cos x < 0$ olduğundan

$$f(x) = -\cos x \Rightarrow f'(x) = \sin x \quad f'(\pi) = \sin \pi = 0$$

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^3 - 9| + x^2$

fonksiyonu verildiğine göre $f''(2) = ?$

ÇÖZÜM:

$x = 2$ için mutlakdeğerin içi negatif

$$f(x) = -x^3 + 9 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2x$$

$$f''(x) = -6x + 2 \Rightarrow f''(2) = -6 \cdot 2 + 2 = -10$$

ÖRNEK:

$f(x) = |x^3 - 8| - x^2$ şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için $f''(-1)$ in değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

$x < 2$ için $x^3 - 8 < 0$ olduğundan fonksiyon

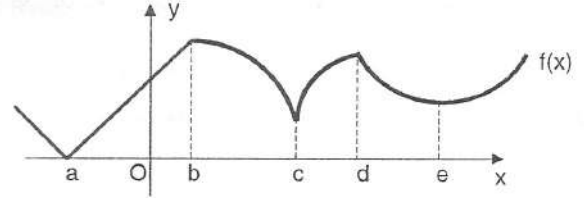
$$f(x) = -(x^3 - 8) - x^2 = -x^3 - x^2 + 8$$

şeklinde tanımlanır.

$$f'(x) = -3x^2 - 2x \Rightarrow f''(x) = -6x - 2 \text{ dir.}$$

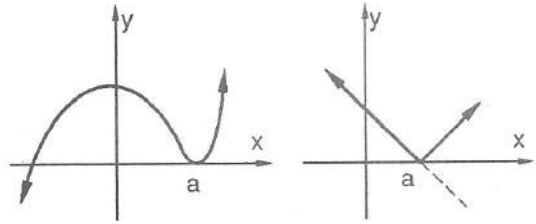
$$f''(-1) = -6 \cdot (-1) - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ bulunur.}$$

UYARI:



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaları bulalım.

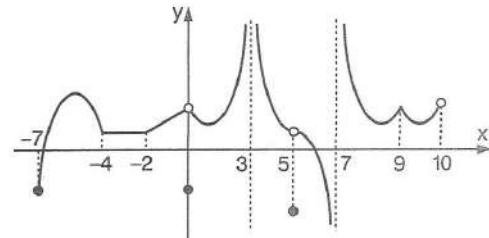
Apsisi a, b, c ve d olan noktalar grafiğin kırılma noktaları olduğundan bu noktalarda $f(x)$ fonksiyonu türevsizdir.



$|f'(a)|$ mevcuttur.

$|f'(a)|$ mevcut değildir.

ÖRNEK:



$[-7, 10]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu, yukarıda verilen grafikte tanımlanıyor.

Buna göre, x in $-7, -4, -2, 0, 3, 5, 7, 9$ ve 10 değerlerinin kaçında f nin türevi vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

İsa GEDİK

ÇÖZÜM:

Bir aralıkta tanımlı fonksiyonun uç noktalarda türevi olmaz. Çünkü bu noktalarda birden fazla teğet söz konusudur.

Buna göre, $x = -7$ de ve $x = 10$ da türev yoktur.

$x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$ noktalarında fonksiyon süreksizdir. Süreksizlik noktalarında türev olmayacağı için, bu noktalarda türev yoktur.

$x = -4$, $x = -2$, $x = 9$ noktalarında sağdan türev, soldan türevden farklı olacağı için, bu noktalarda da (süreklilik olmasına rağmen) türev yoktur.

Belirtilen noktalar dışında kalan diğer bütün noktalarda türev vardır.

Buna göre, verilen noktalardan hiçbirinde fonksiyonun türevi yoktur.

Cevap A

TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI

$$x^3 - x = 0$$

$$x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \text{ ise,}$$

$$x = 0 \text{ veya } x - 1 = 0 \text{ veya } x + 1 = 0 \text{ dır.}$$

Buna göre,

$$x = 0 \text{ veya } x = 1 \text{ veya } x = -1 \text{ dir.}$$

$$x = 0, x = 1, x = -1 \text{ değerleri için } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} \text{ kesrinin paydası sıfıra eşit olur.}$$

Bunun için, $f(x)$ bu noktalarda tanımsızdır.

Fonksiyon, tanımsız olduğu noktalarda süreksizdir.

Süreksizlik noktalarında türev olmayacağı için, bu noktalarda türev yoktur.

Buna göre, fonksiyonun 3 noktada türevi yoktur.

Cevap D

İŞARET FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$f(x) = \text{sgn}[g(x)] \text{ ise } f'(x_0) = \begin{cases} 0, & g(x_0) \neq 0 \\ \text{Yoktur,} & g(x_0) = 0 \end{cases}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \text{sgn}(x^2 - 5x + 4)$$

olduğuna göre, $f'(-2)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$$

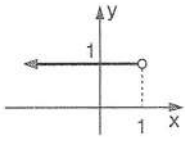
fonsiyonunun türevinin olmadığı noktaların sayısı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM:

ÇÖZÜM:

1.YOL:

**1. Yol**

$x = -2$ deki türevi araştıracağımıza göre fonksiyonun $x = -2$ yi kapsayan küçük bir aralıktaki görüntüsü, örneğin $x < 1$ için

oluşan görüntüsü türevi belirlemek için yeterli olur.

Grafikten de görüleceği gibi, bir sabit sayının ($y = 1$) türevi sorulmaktadır.

Bütün sabit sayıların türevi sıfır olacağı için, $f'(-2) = 0$ dır.

2.YOL:

$x = -2$ deki türevi yukarıdaki kurala göre bulalım:

$x = -2$ değeri, $x^2 - 5x + 4 = 0$ denklemini sıfır yapmaz.

Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi vardır; ve sıfıra eşittir.

Cevap A

ÖRNEK:

$$f(x) = \text{sgn}(x^2 - 5x + 4)$$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

ÇÖZÜM:

$x = 1$ değeri, $x^2 - 5x + 4 = 0$ denkleminin köküdür.

Bunun için fonksiyonun bu noktalarda türevi yoktur.

Cevap E

ÖRNEK:

$$f(x) = x^3 + \text{sgn}(x^2 - 4)$$

olduğuna göre, $f'(-1)$ ve $f'(2)$ türevlerini araştıralım.

ÇÖZÜM:

$x = -1$ için, $x^2 - 4 \neq 0$ olduğundan $x = -1$, $f(x)$ in kritik noktası değildir. O halde,

$x = -1$ için, $x^2 - 4 < 0$ olduğundan,

$$f(x) = x^3 + (-1) \text{ ve } f'(x) = 3x^2 + 0$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \text{ tür.}$$

$x = 2$ için, $x^2 - 4 = 0$ olduğundan

$x = 2$ de $\text{sgn}(x^2 - 4)$ türevlenemez. Buna göre,

$f(x) = x^3 + \text{sgn}(x^2 - 4)$ fonksiyonunun $x = 2$ de türevi yoktur.

ÖRNEK:

$f(x) = \text{sgn}(x-5)$ fonksiyonunun $x = 5$, $x = -8$ için türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x = 5$ için f fonksiyonu süreksiz olduğundan $f'(5)$ yoktur.

$x < 5 \Rightarrow x-5 < 0$ ve $f(x) = \text{sgn}(x-5) = -1$ dir.

Buradan $f'(x) = 0$ ve $f'(-8) = 0$ olur.

ÖRNEK:

$f(x) = \text{sgn} \frac{x^2-9}{x+2}$ fonksiyonunun türevsiz olduğu

x değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

x	$-\infty$	-3	-2	3	$+\infty$
$\frac{x^2-9}{x+2}$	-	0	+	0	+
f(x)	-1	1	-1	1	

Yukarıdaki işaret tablosuna bakılırsa f nin -3 , -2 , 3 için süreksiz olduğu görülür. Öyle ise bu değerler için türev yoktur.

UYARI:

fonksiyon kritik noktasında sürekli ise bu noktada türevinin olup olmadığını anlamak için bu noktadaki sağdan ve soldan türevine bakılmalıdır.

Buradan fonksiyon, sürekli olduğu bütün noktalarda türevlenebilir şeklinde bir sonuç çıkarılamaz. Fonksiyonun sürekli olduğu bir kritik noktasında türevi olmayabilir.

ÖRNEK:

$$f(x) = (x-1) \cdot \text{sgn}(x-1)$$

fonksiyonunun $x = 1$ deki türevini araştıralım.

ÇÖZÜM:

İsa GEDİK**TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI**

$\text{sgn}(x-1)$ için, $x=1$ kritik noktadır. O halde, bu noktada fonksiyonun sürekli olup olmadığına ve sürekli ise sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x-1) \cdot \text{sgn}(x-1)] = (1-1) \cdot 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x-1) \cdot \text{sgn}(x-1)] = (1-1) \cdot (-1) = 0$$

$$\text{ve } f(1) = (1-1) \cdot \text{sgn}(1-1) \Rightarrow f(1) = 0 \text{ dır.}$$

$$\text{O halde, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{ olduğundan}$$

$x=1$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu sürekli dir. Dolayısıyla $f(x)$ in $x=1$ deki sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$f'(1^+) = 1 \text{ ve } f'(1^-) = -1 \text{ ve } f'(1^+) \neq f'(1^-)$$

$$\text{olduğundan } f(x) = (x-1) \cdot \text{sgn}(x-1)$$

fonksiyonunun $x=1$ de türevi yoktur.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^2 \cdot \text{sgn}x$$

fonksiyonunun $x=0$ daki türevini araştıralım.

ÇÖZÜM:

$\text{sgn}x$ için, $x=0$ kritik nokta olduğundan $f(x)$ in bu noktada sürekli olup olmadığına bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \text{sgn}x) = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \cdot \text{sgn}x) = 0 \cdot (-1) = 0 \text{ ve}$$

$$f(0) = 0^2 \cdot \text{sgn}0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ dır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{ olduğundan, } x=0 \text{ da}$$

fonksiyon sürekli dir. Dolayısıyla $f(x)$ in $x=0$ da sağdan ve soldan türevine bakalım.

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cdot 1 - 0}{x} = 0 \text{ ve}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \cdot (-1) - 0}{x} = 0 \text{ dır.}$$

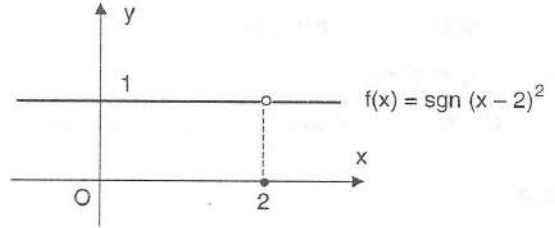
Buna göre, $f'(0^+) = f'(0^-)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ da türevi vardır ve $f'(0) = f'(0^+) = f'(0^-) = 0$ dır.

ÖRNEK:

$f(x) = \text{sgn}(x-2)^2$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \text{sgn}(x-2)^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \text{ ise} \\ 0, & x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$



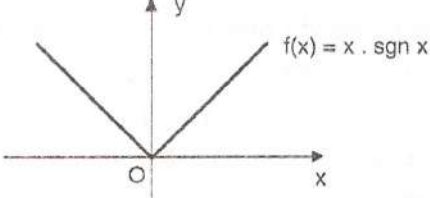
$x \neq 2$ için $f(x) = 1$ olup $f'(x) = 0$,

$x=2$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreksiz olduğundan türevsizdir.

ÖRNEK:

$f(x) = x \cdot \text{sgn } x$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = x \cdot \text{sgn } x = \begin{cases} -x, & x < 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ x, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$


$x < 0$ için $f(x) = -x$ olup $f'(x) = -1$,

$x = 0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğu halde türevsizdir. Çünkü bu nokta grafiğin kırılma noktasıdır. Yani bu noktada sağdan ve soldan türev birbirinden farklıdır.

$x > 0$ için $f(x) = x$ olup $f'(x) = 1$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = \text{sgn} \left(\frac{x}{x^2 - 4} \right)$ fonksiyonunun türevini inceleyelim.

ÇÖZÜM:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$\frac{x}{x^2 - 4}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	-1	1	0	-1	1
$f'(x)$	0	0	0	0	0

$-2, 0$ ve 2 noktalarında $f(x)$ fonksiyonu süreksiz olduğundan türevsizdir.

$\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ için $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan $f'(x) = 0$ dir.

$f(x) = \text{sgn}(\tan x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi,$

$x = \frac{9\pi}{8}$ noktalarında, varsa türevini bulalım.

$x = \frac{\pi}{2}$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu süreksiz olduğundan bu noktada türevsizdir.

$x = \pi$ için $\tan x = 0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bu noktada türevsizdir.

$x = \frac{9\pi}{8}$ için $\tan x \neq 0$ olduğundan $f' \left(\frac{9\pi}{8} \right) = 0$ olur.

TAM DEĞER FONKSİYONUN TÜREVİ

$$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket \text{ ise } f'(x_0) = \begin{cases} 0, & g(x_0) \notin \mathbb{Z} \\ \text{Yoktur,} & g(x_0) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ancak bunun istisnaları vardır.

$f(x) = \llbracket u(x) \rrbracket$ fonksiyonunda $u(x) = 0$ denkleminin çift katlı bir kökü a ise $u(a) = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğu halde $f'(a) = 0$ dir.

ÖRNEK:

$$f: [-4, 8] \rightarrow \mathbb{R}$$

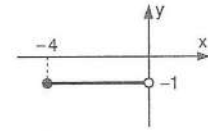
$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$$

olduğuna göre, $f'(-2)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

ÇÖZÜM:

1.YOL:



$x = -2$ deki türevi araştıracağımıza göre fonksiyonun $x = -2$ yi kapsayan küçük bir aralıktaki görüntüsü, örneğin $x < 0$ için oluşan görüntüsü türevi belirlemek için yeterli olur.

Grafikten de görüleceği gibi, bir sabit sayının ($y = -1$) türevi sorulmaktadır.

Bütün sabit sayıların türevi sıfır olacağı için, $f'(-2) = 0$ dir.

2.YOL:

$x = -2$ deki türevi yukarıdaki kurala göre bulalım:

$x = -2$ değeri, $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$ ifadesinin içini tam sayı yapmaz.

Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi vardır; ve sıfıra eşittir.

Cevap A

ÖRNEK:

$$f: [-4, 8] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$$

olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

ÇÖZÜM:

$x = 4$ deki türevi en son verdiğimiz kurala göre bulalım:

$x = 4$ değeri, $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$ ifadesinin içini tam sayı yapar.

Bunun için fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Cevap E

ÖRNEK:

$$f(x) = \left\lfloor \frac{3x+1}{7} \right\rfloor$$

olduğuna göre, $f'(3)$ ü hesaplayalım:

ÇÖZÜM:

$$g(x) = \frac{3x+1}{7} \text{ olsun.}$$

$$g(3) = \frac{3 \cdot 3 + 1}{7} = \frac{10}{7} \notin \mathbb{Z} \text{ olduğu için, } f'(3) = 0 \text{ dır.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \lfloor 2x + 3 \rfloor \text{ ise, } f'\left(\frac{1}{3}\right) \text{ değerini bulalım.}$$

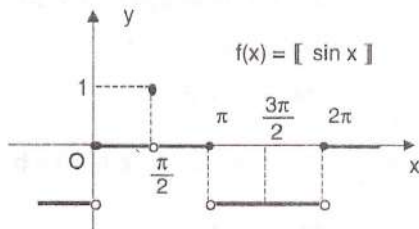
ÇÖZÜM:

$x = \frac{1}{3}$ için $2x - 3$ ün değeri $\left(2 \cdot \frac{1}{3} + 3\right)$ tamsayı olmadığından $f(x)$ in $x = \frac{1}{3}$ teki türevi vardır ve bu türevin değeri $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ dır.

ÖRNEK:

$f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$, π ve $\frac{3\pi}{2}$ noktalarındaki türevini inceleyelim.

ÇÖZÜM:



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi $f(x)$ fonksiyonu

$\frac{\pi}{2}$ ve π noktalarında süreksiz olduğundan türevsizdir. $\frac{3\pi}{2}$ noktasında ise sürekli ve türevlidir.

$\pi < x < 2\pi$ için $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan,

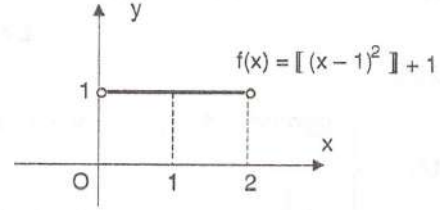
$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ dır.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \lfloor x^2 - 2x + 2 \rfloor$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini inceleyelim.

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lfloor x^2 - 2x + 2 \rfloor = \lfloor x^2 - 2x + 1 + 1 \rfloor \\ &= \lfloor (x-1)^2 \rfloor + 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi $x = 1$ noktasında sürekli ve türevlidir. $0 < x < 2$ için $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan $f'(1) = 0$ olur.

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + |x| + \operatorname{sgn} x$ fonksiyonu verildiğine göre $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = ?$

ÇÖZÜM:

$x = -\frac{1}{2}$ de özel tanımlı fonksiyonları tanımlıyalım, sonra türevlerini alalım. $x = -\frac{1}{2}$ de fonksiyon süreklidir.

$$x = -\frac{1}{2} \text{ için } f(x) = 2x - x + (-1) = x - 1$$

$$f(x) = x - 1 \text{ ise } f'(x) = 1 \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = x \cdot |x| + \lfloor x \rfloor \cdot \operatorname{sgn}(x)$ fonksiyonu ve

rildiğine göre $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ nin değeri nedir?

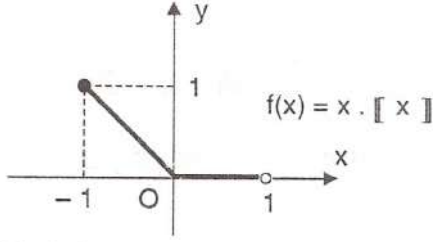
ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} x = \frac{3}{2} \text{ de } f(x) &= x \cdot x + 1 \cdot 1 \\ f(x) &= x^2 + 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x \cdot \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevini, varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreklidir. Ancak bu nokta grafiğin kırılma noktası olduğundan bu noktada $f(x)$ fonksiyonu türevsizdir.

Ayrıca $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevsiz olduğunu sağdan ve soldan türeve bakarak görebiliriz.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \llbracket x \rrbracket - 0}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \llbracket x \rrbracket - 0}{x} = -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Sağdan türev ile soldan türev birbirinden farklı olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$f(x) = \llbracket \frac{3x-4}{5} \rrbracket$ fonksiyonunun $x = \frac{14}{3}$ noktasındaki türevini, varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$x = \frac{14}{3} \text{ için } \frac{3x-4}{5} = \frac{3 \cdot \frac{14}{3} - 4}{5} = 2 \in \mathbb{Z}$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = \frac{14}{3}$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$f(x) = \llbracket \frac{x^2+5}{4} + \frac{x}{2} \rrbracket$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki türevini, varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$x = 3 \text{ için } \frac{x^2+5}{4} + \frac{x}{2} = \frac{3^2+5}{4} + \frac{3}{2} = 5 \in \mathbb{Z}$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında türevsizdir.

ÖRNEK:

$f(x) = \llbracket x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \rrbracket$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ noktasındaki türevini, varsa hesaplayalım

ÇÖZÜM:

$$x = \frac{1}{2} \text{ için } x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$$

olduğundan $f'(\frac{1}{2}) = 0$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = \llbracket x^3 - x^2 - x + 1 \rrbracket$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini, varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \llbracket x^3 - x^2 - x + 1 \rrbracket = \llbracket (x-1)^2 \cdot (x+1) \rrbracket \text{ olur.}$$

$(x-1)^2 \cdot (x+1) = 0$ denkleminin çift katlı bir kökü 1 olduğundan $f'(1) = 0$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = \llbracket \sin x + \tan x \rrbracket$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevini varsa hesaplayalım.

ÇÖZÜM:

$x = 0$ için $\sin x + \tan x = \sin(0) + \tan(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $f(x) = \llbracket \sin x + \tan x \rrbracket$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevsizdir.

$$f(x) = \frac{x \cdot |x+1| + \operatorname{sgn}(x-1)}{\left\lfloor 2x + \frac{3}{2} \right\rfloor}$$

fonksiyonunun $x = \frac{1}{4}$ noktasındaki türevi nedir?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) Türev yoktur

ÇÖZÜM:

$x = \frac{1}{4}$ için $|x+1|$ de $x+1 = \frac{5}{4} \neq 0$ (türev var)

$\operatorname{sgn}(x-1)$ de $x-1 = -\frac{3}{4} \neq 0$ (türev var)

$\left\lfloor 2x + \frac{3}{2} \right\rfloor$ de $2x + \frac{3}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$ (türev yok)

olduğundan $x = \frac{1}{4}$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

Cevap : E

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 17| + x}{x \cdot \left\lfloor \sqrt[4]{x} \right\rfloor \cdot \operatorname{sgn} x}$$

fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki türevi nedir?

- A) $\frac{17}{16}$ B) $-\frac{17}{18}$ C) $\frac{33}{16}$ D) $-\frac{33}{16}$ E) Türev yoktur

ÇÖZÜM:

$x \rightarrow 4$ için ($x = 4$ noktası civarında),

$x^2 - 17 < 0$ olduğundan

$|x^2 - 17| = -(x^2 - 17) = -x^2 + 17$

$\sqrt[4]{x} \rightarrow \sqrt[4]{4} \rightarrow \sqrt{2}$ olduğundan $\left\lfloor \sqrt[4]{x} \right\rfloor = 1$,

$x > 0$ olduğundan $\operatorname{sgn} x = 1$ dir.

O halde $x \rightarrow 4$ için,

$$f(x) = \frac{|x^2 - 17| + x}{x \cdot \left\lfloor \sqrt[4]{x} \right\rfloor \cdot \operatorname{sgn} x} = \frac{-x^2 + 17 + x}{x \cdot 1 \cdot 1} = -x + 1 + \frac{17}{x} \text{ olur.}$$

$$f'(x) = -1 + 0 - \frac{17}{x^2}$$

$$f'(4) = -1 - \frac{17}{16} = -\frac{33}{16} \text{ dir.}$$

Cevap : D

$$f(x) = \frac{|\sin x| \cdot \left\lfloor \sin x \right\rfloor}{\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)}$$

fonksiyonunun $x = \frac{5\pi}{4}$ noktasındaki türevi nedir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Türev yoktur

ÇÖZÜM:

$x \rightarrow \frac{5\pi}{4}$ için ($x = \frac{5\pi}{4}$ noktası civarında),

$\sin x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan $|\sin x| = -\sin x$,

$\left\lfloor \sin x \right\rfloor = -1$ ve $\operatorname{sgn}(\sin x) = -1$ dir.

O halde $x \rightarrow \frac{5\pi}{4}$ için,

$$f(x) = \frac{|\sin x| \cdot \left\lfloor \sin x \right\rfloor}{\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)} = \frac{-\sin x \cdot (-1)}{\cos x \cdot (-1)} = -\tan x \text{ olur.}$$

$$f'(x) = -(1 + \tan^2 x) \Rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 \text{ dir.}$$

Cevap : A

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{\left\lfloor \operatorname{Arctan} x \right\rfloor + 1}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi nedir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) Türev yoktur

ÇÖZÜM:

$x \rightarrow 1$ için ($x = 1$ noktası civarında),

$\operatorname{Arctan} x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ($0 < \frac{\pi}{4} < 1$) olduğundan

$\left\lfloor \operatorname{Arctan} x \right\rfloor = 0$ dir.

O halde $x \rightarrow 1$ için,

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{\left\lfloor \operatorname{Arctan} x \right\rfloor + 1} = \frac{\operatorname{Arctan} x}{0 + 1} = \operatorname{Arctan} x \text{ olur.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Cevap : A

$$x = t + \lfloor \ln t \rfloor$$

$$y = \lfloor \ln t \rfloor \cdot \ln t$$

denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $t = 2$ için türevi kaçadır?

- A) $\ln 4$ B) $\ln 2$ C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM:

$t \rightarrow 2$ için ($t = 2$ noktası civarında),

$0 < \ln 2 < 1$ olduğundan $\lfloor \ln t \rfloor = 0$ ve $\lfloor \ln t \rfloor = \ln t$ dir.

O halde $t \rightarrow 2$ için,

$$x = t + \lfloor \ln t \rfloor = t + 0 = t \text{ ve}$$

$$y = \lfloor \ln t \rfloor \cdot \ln t = \ln t \cdot \ln t = \ln^2 t \text{ olur.}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ ve } \frac{dy}{dt} = 2 \cdot \ln t \cdot (\ln t)' = \frac{2 \cdot \ln t}{t} \text{ olup,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cdot \ln t}{t} = \frac{2 \cdot \ln t}{t}$$

$$t = 2 \text{ için } \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot \ln 2}{2} = \ln 2 \text{ dir.}$$

Cevap : B

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot \lfloor x^3 \rfloor + |x^2 - 2|}{\operatorname{sgn}(x - 1)}$$

fonsiyonu için $f''\left(\frac{3}{2}\right)$ türevi kaçadır?

- A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

ÇÖZÜM:

$x \rightarrow \frac{3}{2}$ için ($x = \frac{3}{2}$ noktası civarında),

$$x^3 \rightarrow \frac{27}{8} \text{ olduğundan } \lfloor x^3 \rfloor = 3,$$

$$x^2 - 2 > 0 \text{ olduğundan } |x^2 - 2| = x^2 - 2 \text{ ve}$$

$$x - 1 > 0 \text{ olduğundan } \operatorname{sgn}(x - 1) = 1 \text{ dir.}$$

O halde $x \rightarrow \frac{3}{2}$ için,

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot \lfloor x^3 \rfloor + |x^2 - 2|}{\operatorname{sgn}(x - 1)} = \frac{x^3 \cdot 3 + x^2 - 2}{1} = 3x^3 + x^2 - 2 \text{ olur.}$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 18x + 2 \text{ ve } f''\left(\frac{3}{2}\right) = 29 \text{ dir.}$$

Cevap : D

$$f(x) = \lfloor x+1 \rfloor^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ ise } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

ÇÖZÜM:

önce $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında tamdeğer fonksiyonunu tanımlayıp sonra türev alalım. ($\pi = 3,14$)

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ noktasında } \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 = 1+1 = 2$$

bulunur. Buna göre

$$f(x) = \lfloor x+1 \rfloor^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = 2^{\tan\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{\tan\frac{x}{2}} \cdot \ln 2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \tan^2\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{\tan\frac{\pi}{4}} \cdot \ln 2$$

$$= (1+1^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^1 \cdot \ln 2$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 = \ln 4$$

1)

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun türevi sıfırdır.

$$y = c \Rightarrow y' = 0 \text{ dir.}$$

2)

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonu x noktasında türevli olsun.

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} \text{ dir.}$$

3)

$c \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ve f , x noktasında türevli bir fonksiyon olsun.

$$y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x) \text{ tir.}$$

4)

f ve g , x noktasında türevli iki fonksiyon olsun.

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) \text{ tir.}$$

5)

f ve g , x noktasında türevli iki fonksiyon olsun.

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \text{ tir.}$$

6)

f , g ve h , x noktasında türevli fonksiyonlar olsun.

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + g'(x) \cdot f(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot f(x) \cdot g(x)$$

7)

f ve g , x noktasında türevli iki fonksiyon olsun.

$g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} \text{ dir.}$$

8)

$$y = [f(x)]^n \Rightarrow y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \text{ tir.}$$

9)

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = [f(x)]^n$ fonksiyonu x noktasında türevli olsun.

$u = f(x)$ denilirse $y = [f(x)]^n = u^n$ olur.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= n \cdot u^{n-1} \cdot u' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \text{ olur.}$$

10)

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \sin u(x) \Rightarrow y' = \cos u(x) \cdot u'(x)$$

11)

O halde,

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \cos u(x) \Rightarrow y' = -\sin u(x) \cdot u'(x) \text{ tir.}$$

12)

$$y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \tan u(x) \Rightarrow y' = (1 + \tan^2 u(x)) \cdot u'(x) = \sec^2 u(x) \cdot u'(x) \text{ tir.}$$

13)

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x \text{ tir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \cot u(x) \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 u(x)) \cdot u'(x) = -\csc^2 u(x) \cdot u'(x) \text{ tir.}$$

14)

$$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dir.}$$

Buna göre bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \arcsin u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \text{ tir.}$$

15)

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dir.}$$

Buna göre, bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \arccos u(x) \Rightarrow y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \text{ tir.}$$

16)

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ dir.}$$

Buna göre, bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \arctan u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \text{ tir.}$$

17)

$$y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ dir.}$$

Burada, bileşke fonksiyonun türevinden,

$$y = \operatorname{arccot} u(x) \Rightarrow y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \text{ tir.}$$

18)

Buna göre, $u = u(x)$, x e göre türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \log_a e = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln a} \text{ dir.}$$

$a = e$ için, $f(x) = \ln x$ in türevi $f'(x) = \frac{1}{x}$ ve

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ olur.}$$

20)

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = a^x \text{ ise } f'(x) = a^x \cdot \ln a \text{ dır.}$$

Ayrıca, $a = e$ için, $f(x) = e^x$ ise, $f'(x) = e^x$ olur.

21)

$[f(x)]^{g(x)}$ ifadesinin türevi; taban $(f(x))$ sabit olarak düşünülüp (üstel fonksiyon gibi) türev alınarak elde edilen ifade ile, üs $(g(x))$ sabit olarak düşünülüp (polinom - x^n gibi) türev alınarak elde edilen ifadenin toplanmasıyla da bulunabilir.

22)

$$F(x,y) = 0 \text{ ise } F'(x,y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

- * F'_x ifadesi kapalı fonksiyonun x 'e göre kısmi türevidir, bu türev alınırken y sabit bir sayı gibi kabul edilir.
- * F'_y ifadesi kapalı fonksiyonun y 'ye göre kısmi türevidir. Bu türev alınırken ise x sabit bir sayı gibi kabul edilir.

23)

$y = g(t)$, $x = h(t)$ denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonuna **parametrik fonksiyon** ve t ye de **parametre** denir.

$y = g(t)$ ve $x = h(t)$ denklemlerinden $y = f(x)$ elde edilerek f fonksiyonunun türevi hesaplanabilir.

Ancak $y = f(x)$ fonksiyonu kolaylıkla elde edilemiyorsa; g ve h fonksiyonları t ye göre türevlenebilen fonksiyonlar ve $h'(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

şeklinde hesaplanabilir.

24)

Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir a noktasında türevli olması için:

a)

f fonksiyonu a noktasında sürekli olmalı,

b)

f fonksiyonunun a noktasındaki sağdan türevi soldan türevine eşit olmalıdır.

Buna göre f fonksiyonu a noktasında türevli ise bu noktada süreklidir.

Bir fonksiyonun kritik noktalarında türevi araştırılırken; bu noktalarda süreklilik incelenir. Fonksiyon süreksiz ise türevsizdir. Sürekli ise sağdan ve soldan türeve bakılır.

25)

$g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = |g(x)|$ verilsin. $a \in A$, $g(a) \neq 0$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi:

$$y' = f'(x) = \begin{cases} -g'(x), & g(a) < 0 \text{ ise} \\ g'(x), & g(a) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$g(a) = 0$ için, $f(x)$ in $x = a$ daki sağdan türevi, soldan türevine eşit ise fonksiyonun $x = a$ da türevi vardır, aksi takdirde bu noktada türev yoktur.

26)

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$f(x) = |(x - a)^n| \Rightarrow f'(a) = \begin{cases} \text{Yoktur,} & n = 1 \text{ ise} \\ 0, & n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

27)

$$f(x) = \text{sgn}[g(x)] \text{ ise } f'(x_0) = \begin{cases} 0, & g(x_0) \neq 0 \\ \text{Yoktur,} & g(x_0) = 0 \end{cases}$$

28)

$$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket \text{ ise } f'(x_0) = \begin{cases} 0, & g(x_0) \notin \mathbb{Z} \\ \text{Yoktur,} & g(x_0) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ancak bunun istisnaları vardır.

**TÜREV ALMA KURALLARI İLE İLGİLİ
ALİŞTIRMALAR**

1)

$$f(x) = x^3 \cdot t - t^2x + 3 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

2)

$$f(x) = (1-x) \cdot (3-2x) \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

3)

$$f(x) = x \cdot \sqrt{a+bx} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

4)

$$f(x) = (\cos x + 3x - 2)^3 \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

5)

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' =$$

6)

$$y = \sin(x^2 + x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

7)

$$y = \sin \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y' =$$

8)

$$y = \sin(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

9)

$$y = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad y' =$$

10)

$$y = \sin^2(\cos x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

11)

$$y = \cos(x + x^3) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

12)

$$y = \cos \left(\frac{1}{x} \right) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

13)

$$y = \cos^2 3x \quad \Rightarrow \quad y' =$$

14)

$$y = \cos(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

15)

$$y = \tan 2x \quad \Rightarrow \quad y' =$$

16)

$$y = \tan(1-x^2) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

17)

$$y = \tan(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

18)

$$y = \cotan(5x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

19)

$$y = \cotan(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

20)

$$y = x^2 \cdot \sin(2x+1) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

21)

$$y = \sin^2 x \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad y' =$$

22)

$$y = \frac{2x^2-1}{\cos x} \Rightarrow y' =$$

23)

$$y = \tan^2(x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

24)

$$y = \sin^3(\tan x) \quad \Rightarrow \quad y' =$$

25)

$$y = x^2 \cdot \cos x \quad \text{ise} \quad y' =$$

26)

$$y = \tan \left(\frac{\sin x}{x^2} \right) \quad \text{ise} \quad y' =$$

27)

$$f(x) = \frac{2x - \cos x}{\sin x} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

28)

$$f(x) = \sin 2x \cdot \cos x^2 \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

29)

$$f(x) = \sin \left(\sqrt[3]{x^2} \right) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

30)

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

31)

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

32)

$$f(x) = \tan^2\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

33)

$$f(x) = \arcsin \sqrt{2x} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

34)

$$f(x) = \arctan (\cos x) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

35)

$$f(x) = \operatorname{arccotan}\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

36)

$$f(x) = \ln(x^2 + c) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

37)

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

38)

$$f(x) = \ln \sqrt{2-x^2} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

39)

$$f(x) = \log(3x-5) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

40)

$$f(x) = \ln^2 (3x) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

41)

$$f(x) = \ln(\ln \sqrt{x}) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

42)

$$f(x) = e^{\tan x} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

43)

$$f(x) = x \cdot e^{2x} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

44)

$$f(x) = e^x \sin x \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

45)

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

46)

$$f(x) = \ln(\sin(x+1)) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

47)

$$f(x) = \sqrt{\log(x+2)} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

48)

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

49)

$$f(x) = \ln x \quad \text{ise} \quad f''(x) = ?$$

50)

$$f(x) = e^x \cdot \cos x \quad \text{ise} \quad f'''(x) = ?$$

51)

$$f(x) = \ln(\sec x) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

52)

$$f(x) = \ln(3+\sin x) \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

53)

$$f(x) = x^3 \cdot e^{-x} \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

54)

$$f(x) = (\sqrt{e})^x \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

55)

$$f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x + 2x^2 \quad \text{ise} \quad f'(x) = ?$$

56)

İsa GEDİK

TÜREVİN TANIMI VE TÜREV ALMA KURALLARI

$$\log_3(\sin x)^x$$

$$\text{ise } f'(x) = ?$$

$$f(x) = e^{\tan x}$$

$$\text{ise } f'(x) = ?$$

57)

$$f(x) = x^{\sin \frac{1}{x}}$$

$$\text{ise } f'(x) = ?$$

73)

$$x = \cos(x \cdot y)$$

$$\text{ise } y' = ?$$

58)

$$y = e^x \cdot \ln x$$

$$\text{ise } y' = ?$$

74)

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$\text{ise } f'(1) = ?$$

59)

$$y = \ln(\sec x + \tan x)$$

$$\text{ise } y' = ?$$

75)

$$f(x) = \ln(\sqrt{\sin^3 x + 1}) \text{ ise } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$$

60)

$$y = \sin(\ln x)$$

$$\text{ise } y' = ?$$

76)

$$f(x) = |e^{\tan x} - 3| \text{ ise } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$$

61)

$$y = \arcsin \sqrt{a^x + e^x}$$

$$\text{ise } y' = ?$$

77)

$$f(x) = \ln \left| \ln \frac{3x}{4} \right| \text{ ise } f'\left(\frac{1}{3}\right) = ?$$

62)

$$y = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$$

$$\text{ise } y' = ?$$

78)

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 3x - 4)}{|x^2 - 4|} \text{ ise } f'(1) = ?$$

63)

$$y = \cos(e^x + 1)$$

$$\text{ise } y' = ?$$

79)

$$f(x) = \ln(x - |x - 1|) \text{ ise } f'(0) = ?$$

64)

$$x = \sqrt{y} + 2$$

$$\text{ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

80)

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \text{ ise } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$$

65)

$$f(x) = e^{tx}$$

$$\text{ise } f^{(50)}(x) = ?$$

81)

$$f(x) = x^3 \cdot \llbracket x^2 + 1 \rrbracket \text{ ise } f''\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

66)

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{ise } f^{(90)}(x) = ?$$

82)

$$f(x) = x^4 |x^2 - 3x + 1| \text{ ise } f'(2) = ?$$

67)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

83)

$$f(x) = |x^2 - 2x + 1| \text{ ise } f'(1) = ?$$

68)

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$$

$$\text{ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

84)

$$f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket + x^2 - 4x \text{ ise } f'(0) = ?$$

69)

$$f(x) = 4 \cdot \tan^2 x^3$$

$$\text{ise } f'(x) = ?$$

85)

$$y = x^x \text{ ise } y' = ?$$

70)

$$f(x) = x^{\sin^2 x^2}$$

$$\text{ise } f'(x) = ?$$

86)

$$y = x^{\ln x} \text{ ise } y' = ?$$

71)

$$f(x) = \cos(x^2 - \sin x) \text{ ise } f'(x) = ?$$

87)

$$y = \tan^3 x + \tan x^2 \Rightarrow y' =$$

72)

İsa GEDİK